Die Stokesschen Konstanten und die Trägheitsmomente einer Gleichgewichtsfigur

Karl Ledersteger [1]

[1] *Technische Hochschule Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **47** (4), S. 97–114

1959

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen), der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer

Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. Lego und o. Prof. Hofrat Dr. phil. K. Ledersteger

Nr. 4 — Baden bei Wien, Ende August 1959 — XLVII. Jg.

Die Stokesschen Konstanten und die Trägheitsmomente einer Gleichgewichtsfigur

Von K. Ledersteger, Wien

(Veröffentlichung der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung)

Zusammenfassung:

Die klassische Theorie hat auf Grund der berühmten Transformation von Radau zu dem Schluß geführt, daß die Trägheitsmomente einer Gleichgewichtsfigur mit sehr großer Annäherung Stokessche Konstante und somit weitgehend unabhängig vom Dichtegesetz sind. Dieses Ergebnis schien sich empirisch vollkommen zu bestätigen. Einfache Beispiele lehren jedoch, daß die Trägheitsmomente sehr wesentlich von der Massenkonfiguration abhängen und daher niemals Integralinvarianten für verschiedene Dichtegesetze sein können. Zur Klärung des Widerspruches ist eine eingehende Analyse der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren erforderlich. Es zeigt sich, daß es zu jedem System Stokesscher Elemente höchstens eine Massenanordnung im hydrostatischen Gleichgewicht gibt. Jede Gleichgewichtsfigur ist mit ihren sämtlichen physikalischen Daten eindeutig und völlig streng durch ihre Stokesschen Elemente bestimmt. Dank der Eindeutigkeit des streng individuellen Dichtegesetzes sind demnach auch die Trägheitsmomente reine Funktionen der Stokesschen Elemente, jedoch nicht Integralinvarianten für verschiedene Massenanordnungen, die es gar nicht gibt. Hingegen gibt es eine lineare Reihe heterogener Gleichgewichtsfiguren, in welcher die Rotationsgeschwindigkeit, die Trägheitsmomente und die dynamische Abplattung völlig konstant sind. Die Konstanz der Trägheitsmomente ist dadurch ermöglicht, daß die zunehmende Massenkonzentration gegen den Schwerpunkt durch eine beträchtliche Expansion der Figuren kompensiert wird. In dieser Reihe ändert sich die Abplattung und auch das Verhältnis von Fliehkraft zur Schwere im Äquator nur sehr gering, woraus sich die empirische Bestätigung der falschen Interpretation erklärt. Die Berechnung dieser Figurenreihe gibt erstmalig die Möglichkeit, die klassische Formel für die dynamische Abplattung zu prüfen; ihr Fehler beträgt bloß $0{,}6^0/_{00}$.

Summary:

The classical theory founded on the famous transformation of Radau shows that the moments of inertia of a figure of equilibrium are „Quasi-Stokes' constants" and therfore independent from the density distribution. This result seemed to prove from experience. Otherwise simple examples teach that the moments of inertia essentially depend from configuration of masses and therefore never can be integral invariants for different laws of density. To clear up this contradiction an exact analysis of spheroidal equilibrium figures is necessary. For each system of Stokes' elements exists at best one figure in hydrostatical equilibrium. Each equilibrium figure with all its physical dates is evalueted exactly by its Stokes' elements. Owing to the strongly individual density distribution also the moments of inertia are pure functions of Stokes' elements but not at all integral invariants for different masses distributions. But there is a linear row of inhomogeneous figures in which the rotational angular velocity, the moments of inertia and the mechanical ellipticity are constant. The constance of moments of inertia is made possible by a considerable expansion of figures combined with the contraction of masses to centre of gravity. In this row the flattening and the ratio of the centrifugal acceleration to gravity in equator change only little by which the seeming empirical sanction of the wrong interpretation is explained. The calculation of this row the first time gives the possibility to prove the classical formula for the mechanical ellipticity: its error amounts only to 0,6 $^0/_{00}$.

Nach einem wichtigen Satz von Stokes, der auch als „Umkehrproblem der Potentionaltheorie“ bekannt ist, gibt es zu einer eine vorgegebene Masse M umschließenden Niveaufläche S unendlich viele Massenanordnungen, welche diese Niveaufläche und das gesamte Außenraumpotentional unverändert lassen, falls nur die Existenz einer zweiten Massenanordnung dieser Eigenschaft vorausgesetzt werden darf. Diesen, von Stokes für das reine Gravitationspotential, d. h. für ruhende Massen abgeleiteten Satz konnte Poincaré auf Massen ausdehnen, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine unveränderliche Drehachse rotieren. Freilich ist damit bereits eine gewisse Einschränkung der möglichen Massenkonfigurationen verbunden. Denn da wir selbstverständlich von äußeren Kräften oder von weiteren Körpern abstrahieren, muß der Schwerpunkt in einem Inertialsystem ruhen; er kann also unmöglich an der Rotation teilhaben und muß demnach in der Rotationsachse verharren. Dennoch gibt es nach wie vor unendlich viele denkbare Massenanordnungen zu einem System der sogenannten „Stokesschen Elemente“, nämlich der Masse M, der Rotationsgeschwindigkeit ω und der Niveaufläche S.

Die Niveaufläche S ist für die beim Problem der Erdfigur allein in Frage kommenden schwach abgeplatteten, sphäroidischen Figuren durch die beiden Parameter Achse a und Abplattung α des achsengleichen Rotationsellipsoides und durch die unter 45^0 Breite auftretende maximale Abweichung h_m von diesem Ellipsoid eindeutig gegeben: $S = (a, \alpha, h_m)$. Die fünf Stokesschen Elemente genügen nun zur eindeutigen Auflösung des Helmertschen Gleichungssystemes für die Rotations-Niveausphäroide 4. Ranges mit dem Potentialausdruck

$$U_4 = \frac{k^2 M}{l}\left[1 + \frac{K}{2l^2}(1-3\ \sin^2\varphi') + \frac{\omega^2 l^3}{2k^2 M}\cos^2\varphi' + \right.$$
$$\left. + \frac{D}{l^4}\left(\sin^4\varphi' - \frac{6}{7}\sin^2\varphi' + \frac{3}{35}\right)\right], \quad \ldots (1)$$

in welchem l den Radiusvektor des Niveausphäroides, φ' die geozentrische Breite, K die durch die Gesamtmasse dividierte Differenz der Hauptträgheitsmomente

$$K = \frac{C-A}{M}, \quad \ldots (2)$$

also eine Massenfunktion 2. O., und schließlich D eine Massenfunktion 4. O.

$$D = \left(\frac{35}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{M} \int l^4 \left(\sin^4 \varphi' - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi' + \frac{3}{35}\right) dm \qquad \ldots (3)$$

bedeuten. Das Helmertsche Gleichungssystem verknüpft ja 13 Parameter durch 8 Gleichungen. Es sind dies neben der Masse M drei Massengrößen: die mittlere Dichte ρ_m, die statische Abplattung K/a^2 und die Funktion $\delta = D/a^4$; drei weitere physikalische Größen: der Potentialwert W_0, das Verhältnis ε von Fliehkraft zur Schwere am Äquator und die Rotationsgeschwindigkeit ω; die drei Parameter der Formel für die theoretische Schwere

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 + \beta \sin^2 \varphi - \frac{\beta_4}{4} \sin^2 2\varphi\right), \qquad \ldots (4)$$

also die Äquatorschwere γ_0, die Schwereabplattung β und der Koeffizient β_4; schließlich die drei geometrischen Bestimmungsstücke a, α und h_m. Dabei sind α, ε, β und K/a^2 Größen 2. O., β_4 und δ Größen 4. O., während h_m/a eine Größe 5. O. ist. Die Helmertschen Gleichungen sind unabhängig von dem die Massenkonfiguration bestimmenden Dichtegesetz. Mithin sind die 8 Parameter ρ_m, K/a^2, W_0, ε, δ, γ_0, β und β_4 explizit unabhängig von den verschiedenen, zu denselben Stokesschen Elementen M, ω, a, α und h_m gehörigen Massenanordnungen, d. h. sie sind Integralinvarianten für alle diese Massenkonfigurationen und werden in diesem Sinne als „Stokessche Konstante" bezeichnet.

Hier interessieren in erster Linie die Trägheitsmomente. Da die Achse a zu den Stokesschen Elementen zählt, ist mit der statischen Abplattung selbstverständlich die Differenz der Hauptträgheitsmomente $(C - A) = MK$ eine Stokessche Konstante. Für die ruhende Kugel z. B., welche die Stokesschen Elemente M, a, $\alpha = h_m = \omega = 0$ besitzt, geben die Helmertschen Gleichungen $\varepsilon = \delta = \beta = \beta_4 = K/a^2 = 0$, d. h. es ist auch $K = D = 0$ und es bleibt allein

$$\gamma_0 = \frac{k^2 M}{a^2} \quad ; \quad W_0 = \frac{k^2 M}{a}. \qquad \ldots (5)$$

Gemäß den Definitionsgleichungen der Trägheitsmomente und wegen der Rotationssymmetrie gilt allgemein

$$\begin{aligned} A = B &= \int (x^2 + z^2)\, dm = \int (y^2 + z^2)\, dm, \\ C &= \int (x^2 + y^2)\, dm \end{aligned} \qquad \ldots (6)$$

und daher für die Kugel

$$(C - A) = MK = \int (x^2 - z^2)\, dm = 0$$

oder $\qquad \ldots (7)$

$$\int x^2\, dm = \int y^2\, dm = \int z^2\, dm.$$

Diese drei Integrale können sich somit bei jeder möglichen Änderung der Massenkonfiguration nur jeweils um eine bestimmte Konstante b ändern. so daß K tatsächlich unverändert bleibt, während sich das Hauptträgheitsmoment C um $2b$ ändert. Wegen der in (6) zum Ausdruck kommenden vollständigen Kugelsymmetrie müssen stets die Flächen gleicher Dichte konzentrische Kugeln sein, d. h. es kommen nur geschichtete Kugeln in Frage, wobei selbstverständlich der Schwerpunkt erhalten bleibt. Die möglichen Massenkonfigurationen beginnen also beim Massenpunkt ($C = 0$) und gehen über den homogenen Fall bis zur Flächenbelegung (C_{max}), d. h. C ist keine Stokessche Konstante, während die Massenfunktion D ebenso wie $(C - A)$ stets verschwindet.

Nun läßt sich leicht zeigen, daß sämtliche homogene Ellipsoide mögliche Gleichgewichtsfiguren der rotierenden Erdmasse sind[1]). Es gibt demnach ∞^2 Maclaurinsche Ellipsoide, deren jedes durch M, a und α mit seinen sämtlichen physikalischen Daten eindeutig bestimmt ist. Das aber besagt, daß durch M und $S = (a, \alpha, h_m = 0)$ die Rotationsgeschwindigkeit ω des Maclaurinschen Ellipsoides bereits mitbestimmt ist, also die Stokesschen Elemente gar nicht willkürlich wählbar sind. Sind aber die Stokesschen Elemente M, S und ω eines homogenen, Maclaurinschen Ellipsoides widerspruchsfrei gegeben, so ist das Helmertsche Gleichungssystem eindeutig lösbar und es sind u. a. $MK = (C - A)$ und $D = \delta a^4$ Integralinvarianten für alle zu den gegebenen Stokesschen Elementen gehörigen Massenkonfigurationen, immer vorausgesetzt, daß überhaupt eine zweite derartige Massenanordnung denkbar ist. Tatsächlich sind neben dem homogenen Falle noch unendlich viele weitere Massenanordnungen möglich. Um dies zu zeigen, braucht man dem Ellipsoid bloß mit der kleinen Achse eine Kugel einzuschreiben und in dieser die eingeschlossene Masse wie oben beliebig zu schichten. Bei diesem Vorgang bleibt das Außenraumpotential erhalten und die freie Oberfläche ist nach wie vor eine Niveaufläche. Auch der Schwerpunkt behält seine Lage bei. K und D ändern sich nicht, weil der von der Masse in der Kugel herrührende Anteil stets Null ist. Hingegen wird sich das Trägheitsmoment C und natürlich auch das äquatoriale Trägheitsmoment $A = B$ beträchtlich ändern; die Trägheitsmomente sind weder echte noch „Quasi"-Stokessche Konstante! Sehr wichtig ist jedoch die Feststellung, daß die konstruierten inhomogenen Figuren nicht im hydrostatischen Gleichgewicht sind; die Flächen gleicher Dichte fallen nämlich nicht mit den Niveauflächen zusammen.

Einzige Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht ist, daß die Flächen gleicher Dichte Niveauflächen sind. Denn dann ist selbstverständlich auch die freie Oberfläche eine Niveaufläche, und zwar die Fläche der geringsten Dichte, wenn wir aus Gründen der Stabilität fordern, daß die Dichte mit dem nach innen zunehmenden Druck niemals abnehmen kann. Die Bedingung, daß die freie Oberfläche gleichzeitig eine Niveaufläche ist, ist für das hydrostatische Gleichgewicht wohl notwendig, aber nicht hinreichend, wie das letzte Beispiel anschaulich lehrt. Hingegen kann im Falle der Homogenität die Gleichgewichtsbedingung dahingehend formuliert werden, daß die freie Oberfläche eine Niveaufläche sein muß. Daß es nur eine einzige Gleichgewichtsbedingung gibt, ist sehr wesentlich für die Feststellung der Mannigfaltigkeit der möglichen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren einer vorgebenden rotierenden Masse M.

---

[1]) *K. Ledersteger:* „Die möglichen Gleichgewichtsfiguren der rotierenden Erdmasse", Zeitschrift f. Vermessungswesen, 84. Jahrgang 1959, Seite 73—90.

Für die möglichen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren muß jedenfalls die in der Potentialentwicklung $W = U_4 + T_4$ auftretende, allein durch Massenunregelmäßigkeiten verursachte Restfunktion T_4 verschwinden. Wir können uns also von vornherein auf die Niveausphäroide U_4, d. h. auf die Niveauflächen mit dem Potentialausdruck (1) beschränken. Da das Helmertsche Gleichungssystem fünf freie Parameter besitzt, gibt es eine fünffach unendliche Schar derartiger Niveausphäroide U_4. Übrigens sind die freien Parameter weder in ihrer Kombination noch in ihren Zahlenwerten völlig frei; wir werden sie daher als „bedingt frei" bezeichnen. Zu jeder Massenordnung, auch für solche im hydrostatischen Gleichgewicht, gehören unendlich viele äußere Niveauflächen. Daher kann es für eine vorgegeben gedachte Masse M *höchstens* ∞^3 sphäroidische Gleichgewichtsfiguren geben. Andererseits sind sämtliche Ellipsoide homogene Gleichgewichtsfiguren dieser Masse. Es ist also selbstverständlich, daß sich für $h_m \neq 0$ an die Maclaurinsche Ellipsoide ebenso dicht heterogene Gleichgewichtsfiguren anschließen. Mithin muß es für eine gegebene Masse tatsächlich ∞^3 sphäroidische Gleichgewichtsfiguren geben. Man kann auch so überlegen: die möglichen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren können aus der vierfach unendlichen Schar der Niveausphäroide der gegebenen Masse M durch die Gleichgewichtsbedingung herausgehoben werden. Könnte nämlich die Gleichgewichtsbedingung allgemein mathematisch formuliert und als 9. Gleichung dem Helmertschen System angeschlossen werden, so hätte dieses wirklich für eine gegebene Masse ∞^3 Lösungen. Auch auf diese Weise erkennt man, daß es nur eine einzige Gleichgewichtsbedingung geben kann. Speziell ein Ellipsoid ist Gleichgewichtsfigur, wenn die Maclaurinsche Bedingung

$$\frac{\omega^2}{2\,\pi k^2 \rho} = \frac{(3+\eta^2)\,arctg\,\eta - 3\,\eta}{\eta^3} = \frac{8}{15}\,\mathfrak{a} - \frac{4}{35}\,\mathfrak{a}^2 - \frac{16}{105}\,\mathfrak{a}^3 \ldots \qquad (8)$$

erfüllt ist, in welcher η die zweite Exzentrizität $\eta^2 = (a^2 - c^2) : c^2$ bedeutet. Da jetzt neben M noch $h_m = 0$ vorgegeben ist, hat das Helmertsche Gleichungssystem ∞^2 Lösungen, d. h. sämtliche Ellipsoide sind mögliche Maclaurinsche Ellipsoide, wie bereits erwähnt wurde.

Auch für die heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren enthalten mithin die Stokesschen Elemente bereits eine Überbestimmung. Denn durch M und $S = (a, \mathfrak{a}, h_m)$ ist eindeutig eine Gleichgewichtsfigur mit ihren sämtlichen physikalischen Daten bestimmt, d. h. ω darf nicht mehr willkürlich gewählt werden. Dies schließt jedoch nicht aus, daß dieselbe Fläche S eine äußere Niveaufläche anderer Gleichgewichtsfiguren mit verschiedenen Werten von ω ist. Sei ein beliebiges System Stokesscher Elemente gegeben. Dann läßt sich leicht zeigen, daß es unter den unendlich vielen zugehörigen Massenanordnungen im allgemeinen auch eine Massenanordnung im hydrostatischen Gleichgewicht geben muß. Denn für alle zugehörigen Massenanordnungen bleiben K und D als Stokessche Konstante Integralinvarianten, während andererseits durch M, K, D und ω eindeutig eine Gleichgewichtsfigur gegeben ist, soferne in Anbetracht des bedingten Charakters der Parameter überhaupt eine physikalisch denkbare Lösung möglich ist.

Zu jedem System Stokesscher Elemente gibt es also unter den sonstigen unendlich vielen Massenanordnungen wenn überhaupt so nur eine Massenanordnung im hydrostatischen Gleichgewicht derart, daß die Fläche S entweder freie Oberfläche oder äußere Niveaufläche ist. Neben den Stokesschen Konstanten sind für diese Massenanordnung auch die beiden Trägheitsmomente $A = B$ und C eindeutig bestimmt. Die Voraussetzung der Sätze von Stokes und Poincaré, daß es nämlich überhaupt eine zweite Massenanordnung gibt, ist für Gleichgewichtsfiguren eben nicht erfüllt und der Begriff der Stokesschen Konstanten als Integralinvarianten für alle möglichen Massenanordnungen verliert hier seinen Sinn. Die Trägheitsmomente sind abermals weder echte noch Quasi-Stokessche Konstante, sondern im Falle der Gleichgewichtsfiguren eindeutig dank der Eindeutigkeit der Massenkonfiguration. Bei dieser Argumentation muß aber nochmals darauf aufmerksam gemacht werden, daß wir es stets nur mit bedingt freien Parametern zu tun haben. Im vorliegenden Falle der Wahl von M und S kommt dies z. B. darin zum Ausdruck, daß h_m jedenfalls beschränkt ist.

Aus dem soeben bewiesenen Satz läßt sich eine wichtige Folgerung ziehen. Jedes Rotationsellipsoid (a, α, $h_m = 0$) ist mögliche Gleichgewichtsfigur einer homogenen Masse mit ganz bestimmter Winkelgeschwindigkeit ω. Zu diesen Stokesschen Elementen gibt es keine zweite Massenkonfiguration im hydrostatischen Gleichgewicht. Wählt man aber zu dem Ellipsoid eine andere Winkelgeschwindigkeit, so läßt jedes derartige neue System Stokesscher Elemente überhaupt keine physikalisch mögliche Lösung zu. Also kann ein Rotationsellipsoid unmöglich Gleichgewichtsfigur einer heterogenen Massenanordnung sein. Die einzig möglichen Niveauellipsoide sind die homogenen Maclaurinschen Ellipsoide. Die Lösung des Stokesschen Problemes für das Rotationsellipsoid nach Pizzetti und Somigliana ist zwar potentialtheoretisch einwandfrei, beruht aber auf einer physikalischen Fiktion, welche ihre Berechtigung als praktisch brauchbare Näherungslösung verliert, wenn die hypothesenfreie Bestimmung der Normalfigur der Erde gelungen ist, und zwar auch dann, wenn sich dabei h_m noch so gering herausstellen sollte.

Wir sehen also, daß die Trägheitsmomente niemals Stokessche Konstante sind, was in krassem Widerspruch zu dem klassischen Ergebnis steht, demzufolge die Trägheitsmomente Quasi-Stokessche Konstante sind, die weitgehend unabhängig sind vom Dichtegesetz. Damit sind wir vor die Aufgabe gestellt, den wahren Kern der klassischen Überlegungen herauszuschälen. Für diese Untersuchung ist es von Vorteil, sich an dem Studium der homogenen, Maclaurinschen Ellipsoide zu orientieren, weil für diese auch die Trägheitsmomente und damit die dynamische Abplattung d formelmäßig festliegen, welche im Helmertschen Gleichungssystem natürlich fehlen.

Die Maclaurinschen Ellipsoide der gegeben gedachten Erdmasse M wurden in der oben zitierten Arbeit[1]) eingehend diskutiert. Wegen $0 \leqq a < \infty$ und $0 \leqq \alpha \leqq 1$ können sie durch die Punkte der (a, α)-Ebene repräsentiert werden. Aus ihnen lassen sich lineare Reihen herausgreifen, wenn jeweils irgendein physikalischer Parameter festgehalten wird. So kann z. B. die Reihe (ω) jener Ellipsoide berechnet werden, die ihre Umdrehung in einem Sterntag vollziehen; oder man findet die Reihe (C) der Figuren, welche mit dem tatsächlichen Erdkörper das Hauptträgheitsmoment C gemeinsam haben. Wegen $C = 0{,}4 . Ma^2$ ist in dieser Reihe auch a konstant, d. h. sie bildet sich als eine Parallele zur α-Achse ab. Ebenso kann auch die Reihe (K) mit konstanter Differenz der Trägheitsmomente (C-A) berechnet werden. Für die folgende Überlegung ist dabei die Tatsache wichtig, daß sich in der Reihe (C) die Rotationsgeschwindigkeit von Figur zu Figur mit K und in der Reihe (K) ähnlich mit C ändert, während sich in der Reihe (ω) C *und* K fortwährend gesetzmäßig ändern. Man kann diese Reihen auch paarweise zum Schnitt bringen und erhält in den Schnittpunkten eindeutige Maclaurinsche Ellipsoide, was ja auch selbstverständlich ist, weil jedes derartige Ellipsoid ebenso wie durch a und α auch durch zwei passend gewählte physikalische Parameter bestimmt werden kann.

Ähnlich lassen sich jetzt die heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren durch die Punkte eines dreidimensionalen „geometrischen" Koordinatensystems mit den Achsen a, α und h_m darstellen, wobei sich zeigt, daß sie durchwegs nur auf einer Seite der (a, α)-Ebene liegen, d. h. stets $h_m < 0$ ist. Weil jede heterogene Gleichgewichtsfigur durch M und drei weitere Parameter bestimmt ist, erhält man wiederum lineare Reihen, wenn man zwei Parameter festhält. Jede dieser Reihen beginnt in einer der soeben erwähnten homogenen Schnittfiguren und endet bei stetig fortschreitender Massenkonzentration gegen den Schwerpunkt schließlich in irgendeiner Grenzfigur. Alle Reihen, die durch je zwei physikalische Parameter des tatsächlichen Erdkörpers bestimmt sind, schneiden sich dann in der Normalfigur der Erde, dem sogenannten Normalsphäroid, welches am besten durch M, W_0, C und ω definiert wird.

Wir lenken unsere Aufmerksamkeit auf die lineare Reihe (ω, C). Nebenbei bemerkt, gehört diese Reihe zu jenen mit konstantem Drehimpuls oder Rotationsmoment ωC, welche möglicherweise für die Entwicklungsgeschichte der Erde von Bedeutung sind und in diesem Sinne als „genetische Reihen" bezeichnet werden sollen. Andere derartige Reihen findet man, wenn man den gegebenen Drehimpuls mit einem zweiten physikalischen Parameter verknüpft. Die Reihe (ω, C) ist jedenfalls möglich; die durch die zunehmende Massenkonzentration bedingte Verminderung von C wird durch eine fortschreitende Expansion der Figuren kompensiert. Aus der Konstanz von

$$\int x^2\,dm = \int y^2\,dm$$

folgt wegen

$$(C - A) = MK = \int (x^2 - z^2)\,dm = \frac{C}{2} - \int z^2\,dm$$

sofort

$$\int z^2\,dm = \frac{C}{2} - MK. \qquad \ldots (9)$$

Weil nun eine Änderung von K eine Änderung von $\int z^2 dm$ und damit notwendigerweise eine Änderung von ω nach sich ziehen würde, muß in der Reihe auch K konstant sein. Mithin sind die Reihen (ω, C) und (ω, K) identisch und in der ganzen Reihe beide Trägheitsmomente C und $A = B$ und damit auch die dynamische Abplattung

$$d = (C - A) : C \qquad \ldots (10)$$

konstant. Dies ist für die hypothesenfreie Bestimmung des Normalsphäroides von fundamentaler Bedeutung, weil die dynamische Abplattung mit großer Genauigkeit aus der Präzessionskonstanten abgeleitet werden kann[2]. Trotz der Konstanz der Trägheitsmomente ändert sich in dieser Reihe das Dichtegesetz, d. h. die Abhängigkeit der Dichte vom jeweiligen Äquatorradius a_i der aufeinanderfolgenden inneren Niveauflächen, sehr stark. Es liegt hier also scheinbar eine vollständige Unabhängigkeit der Trägheitsmomente vom Dichtegesetz vor. Dennoch hat dies nichts mit dem Begriff einer Stokesschen Konstanten zu tun. Es handelt sich ja gar nicht um ein System Stokesscher Elemente M, ω und S, sondern eben um die durch M, ω und C definierte Reihe von Gleichgewichtsfiguren S. Hierin liegt die schiefe Auffassung der Trägheitsmomente als Quasi-Stokesscher Konstanten begründet.

Um dies zu beweisen, müssen wir die klassischen Gedankengänge im Lichte der vorstehenden Betrachtungen verfolgen, ohne allerdings die mathematischen Entwicklungen vollständig wiederzugeben.

Wir setzen zunächst eine äußere Niveaufläche S einer beliebigen Konfiguration der Masse M voraus, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Achse rotiert. Geht man von den Definitionsgleichungen (6) der im allgemeinen verschiedenen Hauptträgheitsmomente aus, so ergibt sich durch Multiplikation mit $4\pi k^2$ gemäß der Poissonschen Gleichung

$$4\pi k^2 \rho = 2\omega^2 - \triangle W \qquad \ldots (11)$$

leicht

$$4\pi k^2 C = 4\pi k^2 \int_M \rho\,(x^2+y^2)\,d\tau = 2\omega^2 \int_M (x^2+y^2)\,d\tau - \int \triangle W\,(x^2+y^2\,d\tau.$$

Führt man dann in den zweiten Greenschen Satz die Funktionen W und (x^2+y^2) ein

$$\int\left[\triangle W(x^2+y^2) - W\triangle(x^2+y^2)\right]d\tau = \int_S\left[\frac{\partial W}{\partial n}(x^2+y^2) - W_S\frac{\partial}{\partial n}(x^2+y^2)\right]d\sigma$$

und beachtet

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n}\,;\quad \triangle(x^2+y^2) = 4;$$

$$\int_M \triangle(x^2+y^2)\,d\tau = \int_S \frac{\partial}{\partial n}(x^2+y^2)\,d\sigma = 4\int_M d\tau\,,$$

so folgt

$$4\pi k^2 C = \int_S g\,(x^2+y^2)\,d\sigma + 4\int_M (W_S - W)\,d\tau + 2\omega^2\int_M (x^2+y^2)\,d\tau\,. \qquad . (12)$$

Analoge Gleichungen ergeben sich für die beiden anderen Trägheitsmomente und man kann drei Differenzen bilden, z. B.[3]

$$4\pi k^2 (C-A) = \int_S g\,(x^2-z^2)\,d\sigma + 2\omega^2\int_M (x^2-z^2\,d\tau\,. \qquad \ldots (13)$$

---

[2] *K. Ledersteger*: „Die geometrischen und physikalischen Daten des Normalsphäroides der Erde“, Sitz. Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Klasse, 1959, Seite 23–39.

[3] *R. Wavre:* „Figures planétaires et géodésie“, Paris 1932, Seite 43.

Da mit der Niveaufläche S und dem Außenraumpotential auch die Schwereverteilung g auf S festliegt, lehrt (13) tatsächlich, daß die Differenzen der Trägheitsmomente echte Stokessche Konstante sind. Sind die Stokesschen Elemente so gewählt, daß S die freie Oberfläche der einzig möglichen Gleichgewichtsfigur ist, wobei natürlich überdies Rotationssymmetrie ($A = B$) vorausgesetzt werden muß, so kann man wohl sagen, daß auch in diesem Spezialfall die Differenz $(C - A)$ vom Dichtegesetz $\rho_i = f(a_i)$ unabhängig ist. Doch bedeutet dies nicht mehr die Möglichkeit verschiedener Massenanordnungen, also verschiedener zugehöriger Dichtegesetze, sondern bloß, daß $(C - A)$ eine Funktion der Stokesschen Elemente ist. Wirklich ist mit der freien Wahl von M und $S = (a, \alpha, h_m)$ eine Gleichgewichtsfigur mit ihren sämtlichen physikalischen Daten eindeutig festgelegt. Das Dichtegesetz der Figur ist, auch wenn seine mathematische Formulierung auf Schwierigkeiten stoßen sollte, ebenso wie z. B. ihre Rotationsgeschwindigkeit und ihre Trägheitsmomente völlig bestimmt. Bei Beschränkung auf Gleichgewichtsfiguren sind die Stokesschen Konstanten nicht mehr Integralvarianten für verschiedene mögliche Massenanordnungen, sondern ganz im Sinne der ursprünglichen Wavreschen Definition bloße Funktionen der Stokesschen Elemente, mithin explizit unabhängig von dem, die Gleichgewichtsfigur aufbauenden eindeutigen Dichtegesetz.

Für jede der ∞^3 sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren der vorgegebenen Masse M ist die Dichte eindeutig in Funktion der Äquatorradien a_i der inneren Niveauflächen, welche sich schalenartig umschließen, bestimmt. Die Funktion $\rho_i = f(a_i)$ braucht keineswegs stetig zu sein; sicher darf aber ρ_i mit wachsendem a_i niemals zunehmen, Für die ∞^2 homogenen, Maclaurinschen Ellipsoide nimmt das Dichtegesetz seine einfachste Form an: $\rho = \rho_m$; jede Schar volumgleicher Ellipsoide ist durch dasselbe ρ_m charakterisiert. Nicht so einfach liegen die Verhältnisse bei den heterogenen Figuren. Denn da die sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren durch drei geometrische Parameter gekennzeichnet sind, muß es unter ihnen stets ∞^2 volumgleiche Figuren geben. Es gibt also bereits ∞^2 Dichteverteilungen, die auf den gleichen Mittelwert ρ_m führen. Bemerkenswert ist dabei, daß die linearen Reihen (ω, W_0) durch eine weitgehende, jedoch nicht völlig strenge Volumgleichheit ausgezeichnet sind[4]). Jede sphäroidische Gleichgewichtsfigur hat also ihr individuelles Dichtegesetz, entsprechend ihrer streng eindeutigen Massenanordnung. Ausgehend vom Falle der Homogenität entstehen die heterogenen Gleichgewichtsfiguren durch irgendwelche fortschreitende Massenkonzentration gegen den Schwerpunkt, welche selbst wieder auf die verschiedenartigste Weise mit einer Expansion oder Kontraktion der Figur verbunden sein kann. Die weite Spanne von der Homogenität bis zur völligen Massenkonzentration im Schwerpunkt ist natürlich keine lineare Reihe.

Wo in jeder, durch zwei physikalische Parameter bestimmten linearen Reihe die zweite Grenze der reellen Gleichgewichtsfiguren liegt, bedarf noch einer schwierigen mathematischen Analyse. In der Reihe (ω, W_0) können wir ohne Ansatz der Gleichgewichtsbedingung bis zum Massenpunkt fortschreiten[4]). Der tiefere Grund

---

[4]) *K. Ledersteger:* „Die gravimetrische Methode zur Bestimmung der Erdfigur", Sitzungsber. d. Bayer. Adka. d. Wiss., Math.-nat.-KL., München 1958, Seite 117–136.

hierfür liegt darin, daß jede Lösung des Helmertschen Gleichungssystems im allgemeinen gerade eine Massenkonfiguration im Gleichgewicht entspricht, für welche die gegebene oder berechnete Niveaufläche $S = (a, \alpha, h_m)$ freie Oberfläche oder äußere Niveaufläche ist, und daß das zugehörige „Sphäroid der größten Massenkonzentration" wegen der dem Massenpunkt zukommenden Größen $K = D = 0$ aus dem Helmertschen System eindeutig berechnet werden kann. Somit kann die heterogene Reihe (ω, W_0) über ihre gar nicht bekannte wirkliche Grenzfigur hinaus bis zum Sphäroid der größten Massenkonzentration fortgesetzt werden. Dies müßte selbstverständlich auch bei anderen linearen Reihen möglich sein, soferne nicht ein von Null verschiedener Wert von K oder D festgehalten werden soll. Doch empfiehlt es sich nicht, wie üblich das Volumen des Sphäroides des rotierenden Massenpunktes, der selbst eine Fiktion ist, noch fiktiv mit Flüssigkeitsmasse der Dichte Null ausgefüllt zu denken. Denn dies müßte dann auch für alle übrigen Figuren jenseits der reellen Grenzfigur gelten; alle ∞^4 Lösungen des Helmertschen Gleichungssystems für die gegebene Masse M wären gleichberechtigt, d. h. alle Systeme Stokesscher Elemente im Widerspruch zur Gleichgewichtsbedingung frei wählbar. Man kann das Ergebnis auch so formulieren: das Fehlen der Gleichgewichtsbedingung im Helmertschen System hat zur Folge, daß sich als Lösungen nicht nur die ∞^3 sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren, sondern auch jeweils die ganze Schar der äußeren Niveauflächen ergibt. Jede Figur S mit einem von Null verschiedenem h_m ist im allgemeinen äußere Niveaufläche von unendlich vielen Massenkonfigurationen im hydrostatischen Gleichgewicht mit verschiedenen Rotationsgeschwindigkeiten und speziell für einen ganz bestimmten Grenzwert von ω die freie Oberfläche einer Gleichgewichtsfigur.

Bei Vernachlässigung des Quadrates der Abplattung ist es verhältnismäßig leicht, die klassischen Näherungsausdrücke für die Masse und die Trägheitsmomente einer Gleichgewichtsfigur abzuleiten, wobei wir im wesentlichen der ausgezeichneten Darstellung bei Lense[5]) folgen. Wir setzen für die inneren Niveauflächen die Polargleichung

$$l = a\,(1 - \alpha \cos^2 \psi)$$

an, welche mit dem Legendreschen Polynom $P_2\,(\cos\psi) = \frac{1}{2}\,(3\cos^2\psi - 1)$ in

$$l = a\left[1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{2}{3}\,\alpha\,P_2\,(\cos\psi)\right] = r\left[1 - \frac{2}{3}\,\alpha P_2\,(\cos\psi)\right] \quad . \; . \; . \; (14)$$

übergeht, wobei jetzt $r = a\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)$ der Radius der mit dem Sphäroid volumgleichen Kugel ist. Die Gleichgewichtsbedingung besagt nun, daß die Flächen gleicher Dichte mit den Niveauflächen zusammenfallen oder daß die Dichte ρ eine reine Funktion von a oder von r ist.

Die Massenpunkte haben die Koordinaten

$$x = l \sin\psi \cos\lambda; \quad y = l \sin\psi \sin\lambda; \quad z = l \cos\psi \quad . \; . \; . \; (15)$$

---

[5]) *J. Lense:* „Kugelfunktionen", Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Bd. 23, Leipzig 1950, Seite 214—226.

und das Volumelement ist daher $l^2 \sin\psi\, d\psi\, d\lambda\, dl$. Schreibt man abkürzend das über die Einheitskugel erstreckte Integral

$$\int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} \sin\psi d\psi = \int d\sigma$$

so findet man für die Masse des Sphäroides

$$M = \int \rho d\tau = \int d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^2 dl = \int d\sigma \int_0^{r_0} \rho l^2 \frac{\partial l}{\partial r} dr = \frac{1}{3} \int d\sigma \int_0^{r_0} \rho \frac{\partial l^3}{\partial r} dr =$$

$$= \frac{1}{3} \int d\sigma \int_0^{r_0} \rho \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 \left(1 - 2\,\alpha\, P_2\right)\right] dr = 4\pi \int_0^{r_0} \rho r^2 dr, \qquad \ldots \quad (16)$$

weil wegen der bekannten Integraleigenschaften der Kugelfunktionen das über die Einheitskugel erstreckte Integral von P_2 verschwindet. Die oberen Integralgrenzen in (16) sind mit dem Index 0 versehen, um anzudeuten, daß sie für die Oberfläche gelten.

Wir wenden uns den Trägheitsmomenten zu und finden unmittelbar

$$A + B + C = 2 \int \rho\,(x^2 + y^2 + z^2)\, d\tau = 2 \int d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^4 dl$$

$$A + B - C = 2 \int d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^2 z^2 dl,$$

woraus

$$A = \frac{1}{2} \int d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^2 (l^2 + z^2)\, dl$$

$$C = \int d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^2 (l^2 - z^2)\, dl.$$

folgt. Mit

$$z^2 = l^2 \cos^2 \psi = \frac{l^2}{3} \left[1 + 2\, P_2 (\cos\psi)\right]$$

wird

$$\int_0^{l_0} \rho l^2 z^2 dl = \frac{1}{3} (1 + 2\, P_2) \int_0^{l_0} \rho l^4 dl$$

und weiter mit (14)

$$\int_0^{l_0} \rho l^4 dl = \int_0^{r_0} \rho l^4 \frac{\partial l}{\partial r} dr = \frac{1}{5} \int_0^{r_0} \rho \frac{\partial l^5}{\partial r} dr = \frac{1}{5} \int_0^{r_0} \rho \frac{\partial}{\partial r} \left[r^5 \left(1 - \frac{10}{3}\,\alpha\, P_2\right)\right] dr.$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich, abermals wegen $\int P_2\, d\sigma = 0$,

$$\int d\sigma \int\limits_0^{l_0} \rho l^4 dl = 4\pi \int\limits_0^{r_0} \rho r^4\, dr$$

und

$$\int P_2\, d\sigma \int\limits_0^{l_0} \rho l^4\, dl = -\frac{2}{3} \int P_2^2\, d\sigma \int\limits_0^{r_0} \rho \frac{\partial}{\partial r} (\alpha\, r^5)\, dr.$$

Beachtet man noch die ebenfalls aus den Integraleigenschaften der Kugelfunktionen folgende Relation

$$\int P_2^2\, d\sigma = \frac{4\pi}{5},$$

so wird schließlich:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{3} \int (2 + P_2)\, d\sigma \int\limits_0^{l_0} \rho l^4\, dl = \frac{8\pi}{3} \int\limits_0^{r_0} \rho r^4\, dr - \frac{8\pi}{45} \int\limits_0^{r_0} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha\, r^5)\, dr, \\ C &= \frac{2}{3} \int (1 - P_2)\, d\sigma \int\limits_0^{l_0} \rho l^4\, dl = \frac{8\pi}{3} \int\limits_0^{r_0} \rho r^4\, dr + \frac{16\pi}{45} \int\limits_0^{r_0} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha\, r^5)\, dr. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (17)$$

Wie in (13) ganz allgemein bewiesen wurde, ist die Differenz der Trägheitsmomente eine echte Stokessche Konstante. Es muß daher auch der aus (17) im Falle des hydrostatischen Gleichgewichtes folgende Ausdruck

$$C - A = \frac{8\pi}{15} \int\limits_0^{r_0} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha\, r^5)\, dr \quad \ldots (18)$$

eine reine Funktion der Stokesschen Elemente M, $S = (a, \alpha, h_m)$ und ω sein. Wäre $\omega = 0$, dann hätten wir die ruhende, homogene oder beliebig geschichtete Kugel vor uns. Die Fläche S wäre ebenso wie alle inneren Niveauflächen eine Kugelfläche, d. h. es wäre stets $\alpha = 0$ und

$$A = B = C = \frac{8\pi}{3} \int\limits_0^{r_0} \rho r^4 dr. \quad \ldots (19)$$

Der Wert dieses Integrales hängt aber sehr wesentlich vom angenommenen Dichtegesetz $\rho = \rho\,(r)$ ab, d. h. das Integral ist weit entfernt von einer Stokesschen Konstanten. (19) gilt völlig streng. Hingegen muß nochmals betont werden, daß bei den Zusatzgliedern in (17) und damit auch in (18) das Quadrat der Abplattung vernachlässigt ist.

Mit demselben Grade der Annäherung läßt sich für die Gleichgewichtsfiguren eine Beziehung herleiten, welche die Abplattung der inneren Niveauflächen in Funktion des mittleren Radius r liefert, wenn die Dichte als Funktion von r gegeben ist. Es ist dies die berühmte Differentialgleichung von Clairaut

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2} + 2\,\frac{\rho r^2}{\mu}\,\frac{d\alpha}{dr} + 2\alpha\left(\frac{\rho r}{\mu} - \frac{3}{r^2}\right) = 0\,. \quad \ldots (20)$$

Hierin bedeutet

$$\mu = \int_0^r \rho r^2 dr\,, \qquad \ldots (21)$$

d. h. gemäß (16) die durch 4π dividierte, von der laufenden Niveaufläche r eingeschlossene Teilmasse. Hat diese Teilmasse die mittlere Dichte D, so ist auch

$$\mu = \frac{r^3}{3} D, \qquad \ldots (21\,a)$$

also

$$\frac{d\mu}{dr} = \rho r^2 = D\, r^2 + \frac{r^3}{3}\frac{dD}{dr}\,,$$

d. h. es besteht folgende Beziehung zwischen der Dichte ρ beim Radius r und der mittleren Dichte D innerhalb dieses Radius:

$$\rho = D + \frac{r}{3}\frac{dD}{dr}\,. \qquad \ldots (22)$$

Wegen der nach außen niemals zunehmenden Dichte ist die Ableitung dD/dr wesentlich negativ.

In der neuen Variablen D lautet die Clarirautsche Differentialgleichung

$$\left[r^2\frac{d^2\alpha}{dr^2} + 6r\frac{d\alpha}{dr}\right] D + 2\left[r^2\frac{d\alpha}{dr} + \alpha r\right]\frac{dD}{dr} = 0\,. \qquad \ldots (20\,a)$$

Zur weiteren Transformation führen wir mit Radau[6]) die Größe

$$\lambda = \frac{r}{\alpha}\frac{d\alpha}{dr} \qquad \ldots (24)$$

ein und erhalten:

$$\left[r\frac{d\lambda}{dr} + \lambda^2 + 5\lambda\right] D + 2r(1+\lambda)\frac{dD}{dr} = 0 \qquad \ldots (20b)$$

oder

$$\frac{d}{dr}\left(D\sqrt{1+\lambda}\right) + \frac{5\lambda + \lambda^2}{2r\sqrt{1+\lambda}} D = 0. \qquad \ldots (20c)$$

Differenziert man jetzt den Ausdruck $r^5 D\sqrt{1+\lambda}$ nach r:

$$5r^4 D\sqrt{1+\lambda} + r^5\frac{d}{dr}\left(D\sqrt{1+\lambda}\right),$$

so findet man unter Benützung von (20c) leicht:

$$\frac{d}{dr}\left(r^5 D\sqrt{1+\lambda}\right) = 5r^4 D\left(\frac{1+\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{10}\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda}}\right). \qquad \ldots (25)$$

[6]) *R. R. Radau:* „Sur le loi des densités à l'intérieur de la terre", Academie Sciences, Paris, Comptes rendus, Bd. C, 1885, Seite 972.

Bezeichnet man den Bruch rechterhand kurz mit $F(\lambda)$, so erkennt man sofort, daß

$$F(\lambda) = 1 + \frac{1}{40}\lambda^2 - \frac{3}{40}\lambda^3 \ldots . \qquad \ldots (26)$$

noch für verhältnismäßig große Werte von λ nahe bei 1 liegt.

Wir müssen daher zunächst die Funktion λ diskutieren. Für den Wert λ_0 an der Oberfläche einer sphäroidischen Gleichgewichtsfigur finden wir aus den Helmertschen Gleichungen

$$\frac{3K}{a^2} \sim (2\,\alpha - \varepsilon) \text{ oder } \alpha \sim \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3\,K}{2a^2}\,; \quad \varepsilon = \frac{\omega^2 a}{\gamma_0} \sim \frac{\omega^2 a^3}{k^2 M}$$

durch Differentiation

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{da} - \frac{3K}{a^3}\,; \quad \frac{d\varepsilon}{da} = \frac{3\,\varepsilon}{a}\,,$$

also

$$a\frac{d\alpha}{da} = \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{3K}{a^2} = \frac{5}{2}\varepsilon - 2\,\alpha$$

und im Hinblick auf (24)

$$\lambda_0 = \frac{5}{2}\frac{\varepsilon_0}{\alpha_0} - 2. \qquad \ldots (27)$$

Für jedes homogene Maclaurinsche Ellipsoid gilt nun $\varepsilon = \frac{4}{5}\alpha + \ldots$, d. h. mit dem gewünschten Genauigkeitsgrad $\lambda_0 = 0$. Übrigens sind die inneren Niveauflächen des homogenen Ellipsoides homothetische und konzentrische Ellipsoide ($\lambda = 0$), während andererseits für jede sphäroidische Gleichgewichtsfigur die Abplattung der äußeren Niveauflächen mit zunehmender Erhebung über die freie Oberfläche allmählich anwächst, was natürlich durch die Zunahme der Fliehkraft im Äquator bedingt ist. Wie schon erwähnt, können wir nur in der Reihe (ω, W_0) der sogenannten „benachbarten Geoide" das zugehörige Sphäroid der größten Massenkonzentration angeben, für welches das in der Reihe fast gänzlich konstante $\varepsilon = 2\,\alpha + \ldots$ ist, so daß sich $\lambda_0 = 3$ ergibt. Demnach stellt λ_0 ein Charakteristikum der Massenverdichtung gegen den Schwerpunkt dar. Für das aus der mechanischen Abplattung abgeleitete Normalsphäroid der Erde [7]) ist $\varepsilon = 34\,6782 \,.\, 10^{-8}$ und $\alpha = 1:297{,}346 = 33\,6309 . 10^{-8}$, also $\lambda_0 = 0{,}57785$, woraus $F(\lambda_0) = 0{,}99388$ folgt.

Auch im Innern jeder sphäroidischen Gleichgewichtsfigur wird λ mit zunehmendem Radius r von 0 bis zum Oberflächenwert λ_0 anwachsen, d. h. es ist stets $(d\alpha/dr) \geqq 0$. Die Funktion $F(\lambda)$ wächst dabei zuerst von 1 bis zum Maximalwert 1,00074 bei $\lambda = 1/3$ an, um sodann bis auf 0,8 für $\lambda = 3$ abzunehmen. Speziell für das Normalsphäroid der Erde ist der Minimalwert von $F(\lambda)$ an der Oberfläche 0,99388, so daß wir mit guter Näherung für die Integration von (25) $F(\lambda) = 1$ setzen dürfen. Hierin ist der große Vorteil der Radauschen Transformation gelegen.

---

[7]) *K. Ledersteger:* „Die geometrischen und physikalischen Daten des Normalsphäroides der Erde", Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Marh.-nat. Klasse, 1959, Seite 23—39.

Nunmehr schreiten wir an die Berechnung des Hauptintegrales von (17). Wir führen mittels (22) an Stelle von ρ die neue Variable D ein und wenden dann im zweiten Summanden partielle Integration an:

$$\int_0^{r_0} \rho r^4\, dr = \int_0^{r_0} D r^4\, dr + \frac{1}{3}\int_0^{r_0} r^5\, dD = \int_0^{r_0} D r^4\, dr +$$

$$+ \frac{1}{3}\left[r^5 D \Big/_0^{r_0} - 5\int_0^{r_0} D r^4\, dr \right] = \frac{1}{3} D_0\, r_0^5 - \frac{2}{3}\int_0^{r_0} D r^4\, dr.$$

Andererseits folgt aus (25), wenn man $F(\lambda) = 1$ setzt, das Integral

$$r^5 D \sqrt{1+\lambda}\, \Big/_0^{r_0} = r_0^5\, D_0 \sqrt{1+\lambda_0} = 5\int_0^{r_0} D r^4\, dr$$

und damit

$$\int_0^{r_0} \rho r^4\, dr = \frac{1}{3} D_0\, r_0^5 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} D_0\, r_0^5 \sqrt{1+\lambda_0} = \frac{1}{3}\rho_m r_0^5 \left[1 - \frac{2}{5}\sqrt{1+\lambda_0} \right],$$

wenn man bedenkt, daß D_0 die mittlere Dichte ρ_m des Gesamtkörpers darstellt. Führt man noch den Wert (27) für λ_0 ein, so ergibt sich endgültig

$$\int_0^{r_0} \rho r^4\, dr = \frac{1}{3}\rho_m r_0^5 \left[1 - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5\,\varepsilon_0}{2\,\alpha_0} - 1} \right]. \qquad \ldots (28)$$

Zusammen mit

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho_m a^2 c = \frac{4}{3}\pi\rho_m r_0^3$$

und der Helmertschen Gleichung

$$\frac{K}{a^2} \sim \frac{2}{3}\left(\alpha_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \sim \frac{C-A}{M\, r_0^2}$$

folgt schließlich aus (17) und (18) für das Hauptträgheitsmoment C:

$$C = \frac{2}{3} M r_0^2 \left[1 - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5\,\varepsilon_0}{2\,\alpha_0} - 1} + \frac{2}{3}\left(\alpha_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \right] \qquad \ldots (29)$$

und für den Reziprokwert der dynamischen Abplattung

$$\frac{C}{C-A} = \frac{1 - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5\,\varepsilon_0}{2\,\alpha_0} - 1}}{\alpha_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}}. \qquad \ldots (30)$$

Da ε eine Stokessche Konstante ist, ist damit gezeigt, daß die Trägheitsmomente selbst reine Funktionen der Stokesschen Elemente sind. Man hat sie deshalb und im Hinblick auf die Vernachlässigung der Größen von der Ordnung des Quadrates der Abplattung sowie wegen der Näherung $F(\lambda) = 1$ als „Quasi-Stokessche Konstante" bezeichnet. In Wahrheit aber sind die Trägheitsmomente durch die Gesamtmasse M und die Gestalt S der freien Oberfläche eindeutig und streng bestimmt und man darf nicht den irrigen Schluß ziehen, daß es sich dabei um Integralinvarianten für verschiedene mögliche Massenanordnungen handelt.

Diese schiefe Auffassung wurde dadurch begünstigt, daß man mit Hilfe von (30) oder unter bestimmten Annahmen für das Dichtegesetz die geometrische Abplattung α aus der genaueren dynamischen Abplattung herleiten wollte. Hat man nämlich bloß das Normalsphäroid der Erde im Sinne, so liefert (30) mit festgehaltenem $\varepsilon_0 = 34\,6782 . 10^{-8}$ zu versuchsweise angenommenen, verschiedenen geometrischen Abplattungen die zugehörige dynamische Abplattung:

$1 : \alpha$	$C : (C - A)$
299,00	307,51
298,00	306,23
297,49	305,59
297,00	304,96
296,00	303,69
295,00	302,43

In diese kleine Tabelle wurde auch die Abplattung 1:297,49 aufgenommen, welche auf den derzeit besten Wert[8]) für die dynamische Abplattung führt.

Die erwähnte, scheinbar sehr weitgehende Unabhängigkeit der zusammengehörigen Wertepaare α und $(C - A)$: C vom Dichtegesetz ist in Wirklichkeit darauf zurückzuführen, daß wir es bei Variation von α mit verschiedenen Figuren der Reihe $(\omega, K) = (\omega, C)$ zu tun haben, in welcher mit den Trägheitsmomenten auch die dynamische Abplattung völlig konstant ist und in der die zunehmenden Massenkonzentration gegen den Schwerpunkt mit einer sehr beträchtlichen Expansion der Figuren, hingegen mit einer auffallend geringen Zunahme der geometrischen Abplattung verbunden ist. Es sei dies durch die Berechnung der Figuren mit den gleichen Abplattungswerten wie in der vorhergegangenen Tabelle erwiesen.

Mit den aus der dynamischen Abplattung 1:305,59 abgeleiteten Ausgangswerten[7])

$$M = 5976{,}267 . 10^{24}\,\mathrm{g}\ ;\ K = 44\,327{,}7 . 10^{10}\,\mathrm{cm}^2;$$
$$\omega = 7\,292\,116 . 10^{-11}\,\mathrm{sec}^{-1},\ \text{also}$$
$$\omega^2 = 5\,317\,496 . 10^{-15}\,\mathrm{sec}^{-2},$$

zu denen speziell für das Normalsphäroid der Erde noch

$$a = 6\,378\,290\,\mathrm{m}\ ;\ \beta_4 = +\,2752 . 10^{-8}$$

tritt, lassen sich vorerst das homogene Ausgangsellipsoid der Reihe $(\omega\ K)$ und das Normalsphäroid gegenüberstellen:

---

[8]) *E. C. Bullard:* „The Figure of the Earth", Monthly Notices Royal Astron. Society, Geophys. Suppl., vol. 5, no. 6, 1948.

	homogenes Ellipsoid	Normalsphäroid
α	$= 1:305{,}088$	$1:297{,}346$
	$= 32\,7774 . 10^{-8}$	$33\,6309 . 10^{-8}$
a	$= 5\,819\,390$ m	$6\,378\,290$ m
h^m	$= 0$	$- 2{,}09$ m
ε	$= 26\,3069 . 10^{-8}$	$34\,6782 . 10^{-8}$
W_0	$= 6\,849\,902 . 10^{-5}$	$6\,263\,818 . 10^{5}$
ρm	$= 7{,}263$	$5{,}517$
K/a^2	$= 13\,0894 . 10^{-8}$	$10\,8960 . 10^{-8}$
δ	$= + 1612 . 10^{-8}$	$+ 1177 . 10^{-8}$
γ_0	$= 1076{,}357$ gal	$978{,}037$ gal
β	$= 32\,8852 . 10^{-8}$	$52\,9268 . 10^{-8}$
β_4	$= + 1612 . 10^{-8}$	$+ 2752 . 10^{-8}$
$C:(C - A)$	$= 305{,}09$	$305{,}40$
q	$= 0{,}40000$	$0{,}33\,297$

Man sieht hieraus, daß die Achse a vom homogenen Ellipsoid bis zum Normalsphäroid um 558 900 m zunimmt, während die Abplattung bloß um $8535 . 10^{-8}$ anwächst. Die geringste Veränderlichkeit zeigt die Größe δ, welche auf diesem weiten Wege nur um $435 . 10^{-8}$ abnimmt. Lineare Interpolation von δ vermag daher die im Helmertschen Gleichungssystem fehlende Gleichgewichtsbedingung zu ersetzen und wir erhalten für die obigen runden Reziprokwerte der Abplattung folgende Gleichgewichtsfiguren:

Gleichgewichtsfiguren der Reihe $(\omega, K) = (\omega, C)$ in der weiteren Umgebung des Normalsphäroides der Erde

$1:\alpha$	299	298	297	296	295
α	$33\,4448 . 10^{-8}$	$33\,5570 . 10^{-8}$	$33\,6700 . 10^{-8}$	$33\,7838 . 10^{-8}$	$33\,8983 . 10^{-8}$
a	$6\,312\,121$ m	$6\,352\,863$ m	$6\,391\,165$ m	$6\,427\,444$ m	$6\,462\,085$ m
h_m	$- 1{,}90$ m	$- 2{,}02$ m	$- 2{,}13$ m	$- 2{,}24$ m	$- 2{,}34$ m
ε	$33\,6058 . 10^{-8}$	$34\,2638 . 10^{-8}$	$34\,8902 . 10^{-8}$	$35\,4905 . 10^{-8}$	$36\,0701 . 10^{-8}$
W_0	$6\,329\,217 . 10^{-5}$	$6\,288\,787 . 10^{5}$	$6\,251\,252 . 10^{5}$	$6\,216\,114 . 10^{5}$	$6\,182\,933 . 10^{5}$
ρm	$5{,}692$	$5{,}583$	$5{,}483$	$5{,}391$	$5{,}305$
K/a^2	$11\,1256 . 10^{-8}$	$10\,9834 . 10^{-8}$	$10\,8521 . 10^{-8}$	$10\,7300 . 10^{-8}$	$10\,6152 . 10^{-8}$
δ	$+ 1228 . 10^{-8}$	$+ 1197 . 10^{-8}$	$+ 1167 . 10^{-8}$	$+ 1139 . 10^{-8}$	$+ 1112 . 10^{-8}$
γ_0	$998{,}791$ gal	$985{,}935$ gal	$974{,}073$ gal	$963{,}033$ gal	$952{,}664$ gal
β	$50\,4368 . 10^{-8}$	$51\,9666 . 10^{-8}$	$53\,4168 . 10^{-8}$	$54\,8010 . 10^{-8}$	$56\,1328 . 10^{-8}$
β_4	$+ 2620 . 10^{-8}$	$+ 2701 . 10^{-8}$	$+ 2778 . 10^{-8}$	$+ 2852 . 10^{-8}$	$+ 2922 . 10^{-8}$
$C:(C - A)$	$305{,}34$	$305{,}37$	$305{,}41$	$305{,}45$	$305{,}49$
q	$0{,}33\,999$	$0{,}33\,564$	$0{,}33\,163$	$0{,}32\,790$	$0{,}32\,439$

Zur Berechnung der kleinen Tabelle sei noch kurz bemerkt: die Figuren ergeben sich wesentlich bequemer, wenn an Stelle der Abplattung die Achse gegeben ist. Es wurden daher äquidistante Figuren mit einem Achsenabstand von 50 km berechnet; dementsprechend mußte die Interpolation von δ mit den Achsenwerten erfolgen. Durch Verdichtung der erhaltenen Reihe mittels zweimaliger Interpolation in die Mitte konnten die zweiten Differenzen so klein gemacht werden, daß die gewünschten Figuren mit den runden Reziprokwerten der Abplattung sicher linear interpoliert werden konnten. Es zeigte sich, daß die Änderungen von Achse und Abplattung in der Reihe keineswegs proportional verlaufen. Während für die Spanne vom homogenen Ausgangsellipsoid bis zum Normalsphäroid einer Änderung des Reziprokwertes der Abplattung um eine Einheit eine durchschnittliche Änderung der Achse um 70 km entspricht, sinkt dieser Durchschnittswert für den Bereich der Tabelle bereits auf 37,5 km ab. Somit hätte die Interpolation von δ mit den Abplattungswerten etwas andere Ergebnisse geliefert; doch kann der Unterschied einige Einheiten der 7. Dezimale nicht übersteigen.

Die verhältnismäßig kleine Zunahme der Abplattung von 1:299 bis 1:295 ist mit einer Achsenvergrößerung von 150 km verbunden. Man erkennt, welch gewaltiger Fortschritt in der Massenkonzentration erforderlich ist, um trotz dieser beträchtlichen Expansion der Figuren das Trägheitsmoment C ungeändert zu lassen. So und nur so ist die behauptete weitgehende Unabhängigkeit der Trägheitsmomente vom Dichtegesetz zu verstehen. Die berechnete Figurenreihe eröffnet ferner auch die Möglichkeit, die Güte der Formel (30) einwandfrei zu prüfen. In ihr ist ja die dynamische Abplattung in Funktion von α und ε gegeben. Mit den zusammengehörigen Wertepaaren dieser Größen müßte sie stets 305,59 liefern. Wegen der Vernachlässigungen ergeben sich aber etwas kleinere Beträge, die außerdem mit wachsender Abplattung langsam zunehmen. Für das Normalsphäroid ist der Fehler 0,19, also nur 0,62$^0/_{00}$. Da schließlich für das homogene Ellipsoid das Trägheitsmoment C durch die Formel $C = 0{,}4 . Ma^2$ bestimmt ist, sind in der letzten Zeile der Tabelle die Faktoren q gemäß dem allgemeinen Ansatz $C = q\, Ma^2$ ausgewiesen.

Mit der Figurenreihe (ω, C) dürfte das so paradox anmutende klassische Resultat von den Trägheitsmomenten als Quasi-Stokesschen Konstanten auf seine wahre Ursache zurückgeführt sein. Wohl sind die Trägheitsmomente im Falle des hydrostatischen Gleichgewichtes eindeutige Funktionen der Stokesschen Elemente dank der Eindeutigkeit der zugehörigen Massenkonfiguration. Niemals aber sind sie Stokessche Konstante im Sinne von Integralinvarianten für alle zu einem System Stokesscher Elemente gehörigen unendlich vielen Massengruppierungen. Hingegen ändert sich in der genannten Reihe die Abplattung auffallend gering und auch ε in dem uns interessierenden Bereich der Tabelle nur um knapp 25.10^{-5}. Man versteht somit, daß auch die unberechtigte Anwendung der Formel (30) die weitgehende Unabhängigkeit vom Dichtegesetz klar zum Ausdruck bringen mußte. Doch dies hat, wie wohl zur Genüge gezeigt wurde, überhaupt nichts mit dem Wavreschen Begriff der Stokesschen Konstanten zu tun.