Paper-ID: VGI_195912

Ein Beitrag zur Fehlertheorie der beiderseits angeschlossenen Polygonzüge

Karl Hubeny [1]

[1] *Technische Hochschule Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **47** (3), S. 65–73

1959

BibTEX:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_195912,
Title = {Ein Beitrag zur Fehlertheorie der beiderseits angeschlossenen
   Polygonz{\"u}ge},
Author = {Hubeny, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {65--73},
Number = {3},
Year = {1959},
Volume = {47}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

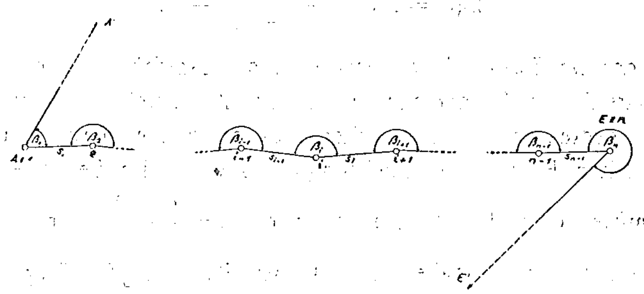
emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. Lego und o. Prof. Hofrat Dr. phil. K. Ledersteger

Nr. 3 Baden bei Wien, Ende Juni 1959 XLVII. Jg.

Ein Beitrag zur Fehlertheorie der beiderseits angeschlossenen Polygonzüge

Von Karl Hubeny, Graz

In Ergänzung der reichhaltigen Literatur über die Fehlertheorie der Polygonzüge soll im Folgenden eine einheitliche Darstellung der Fehlertheorie des gestreckten, gleichseitigen und beiderseits angeschlossenen Polygonzuges für alle dabei möglichen Voraussetzungen hinsichtlich des Anschlusses in allgemeiner Form gegeben werden; im Anschluß daran wird die Entwicklung von Näherungsformeln mitgeteilt. Allen nachstehenden Betrachtungen liegt die in der untenstehenden Abbildung angedeutete Bezeichnung der Bestimmungsstücke des Polygonzuges zugrunde.



a) *Der Längsfehler*

Der im Punkt P_i in der Zugrichtung bestehende Lagefehler (Längsfehler in P_i) setzt sich aus zwei Teilen zusammen, nämlich aus einem Teil, der durch die Summierung der Streckenfehler in den Strecken s_1 bis s_{i-1} entsteht, und aus der Lageänderung, die dieser Punkt durch die nach der Zugberechnung erfolgende Aufteilung des gesamten Längsfehlers erfährt.

Wir nehmen in den einzelnen Strecken $s_1 - s_{n-1}$ die bestimmten Fehler $ds_1 - ds_{n-1}$ an; vor der Ausgleichung besteht dann im Punkt P_i der wahre Längsfehler

$$dl_i = [ds]_1^{i-1} ; \qquad \ldots (1)$$

im Endpunkt des Zuges dagegen der wahre Längsfehler

$$dl_n = [ds]_1^{n-1} . \qquad \ldots (2)$$

Durch die übliche Ausgleichung bei der Annahme gleich langer Seiten erfährt der Punkt P_i eine Lageänderung in der Zugsrichtung im Betrage von

$$v_{li} = - dl_n \frac{i-1}{n-1} = - [ds]_1^{n-1} \frac{i-1}{n-1} ;$$

der wahre Längsfehler in P_i ist demnach mit

$$dL_i = dl_i - dl_n \frac{i-1}{n-1} = \frac{1}{n-1} \Big[(n-1)\, dl_i - (i-1)\, dl_n \Big] . \quad \ldots (3)$$

gegeben.

Diesen letzten Ausdruck schreiben wir ausführlich an; es ist

$$dL_i = \frac{1}{n-1} \Big[(n-1)\, ds_1 + \ldots\ldots + (n-1)\, ds_{i-1}$$

$$- (i-1)\, ds_1 - \ldots\ldots - (i-1)\, ds_{i-1} - (i-1)\, ds_i - \ldots\ldots - (i-1)\, ds_{n-1} \Big] ;$$

zusammengezogen ergibt dies

$$dL_i = \frac{1}{n-1} \Big\{ (n-i)\, [ds]_1^{i-1} (i-1)\, [ds]_1^{n} \Big\} . \qquad \ldots (4)$$

Wir führen anstelle der wahren Abweichungen den mittleren Streckenfehler $\pm m_s$ ein, d. h. wir haben das Fehlerfortpflanzungsgesetz auf den vorstehenden Ausdruck anzuwenden. Damit folgt aus (4)

$$m_{li}^2 = m_s^2 \frac{(n-i)(i-1)}{n-1} . \qquad \ldots (5)$$

Dies ist der im Punkt P_i zu befürchtende Lagefehler in der Zugsrichtung, also der Längsfehler in P_i; der eben mitgeteilte Ausdruck gilt immer dann, wenn beidseitiger Koordinatenanschluß vorliegt, da er, wie ersichtlich, unabhängig ist von den möglichen Formen des Richtungsanschlusses. Im Besonderen erhält man für die Zugsmitte, d. h. für die Punktnummer $i = \frac{n+1}{2}$ (n muß als ungerade Zahl vorausgesetzt werden, da es sonst keinen Punkt in der Zugsmitte gibt) den Ausdruck

$$m_{lm} = \pm \frac{m_s}{2} \sqrt{n-1} . \qquad \ldots (5a)$$

b) *Der Querfehler*

Im Interesse der abgerundeten Darstellung schicken wir der Behandlung des eigentlichen Themas, des Querfehlers im beiderseits lagemäßig angeschlossenen

Polygonzug, die Berechnung der im Punkt P_i eines freien Polygonzuges zu erwartenden Lageunsicherheit senkrecht zur Zugsrichtung (Querfehler in P_i) voraus. Beim freien Polygonzug besteht, wie bekannt, nur einseitiger Koordinaten- und Richtungsanschluß; es sind also neben der Anschlußrichtung und den Koordinaten des Punktes $A = P_1$ die Bestimmungsstücke s_1 bis s_{n-1} und β_1 bis β_{n-1} gegeben.

Wir denken uns in den Brechungswinkeln β_1 bis β_{n-1} die wahren Fehler $d\beta_1$ bis $d\beta_{n-1}$; da diese voneinander unabhängig sind, können ihre Auswirkungen im Punkt P_i — gleiche Seitenlängen und die gestreckte Zugsform vorausgesetzt — sofort angegeben werden. Der Punkt P_i erhält nämlich zufolge $d\beta_1$, $d\beta_2$ .... $d\beta_{i-1}$ die Querverschiebungen

$$s\,(i-1)\,d\beta_1,\; s\,(i-2)\,d\beta_2,\; \ldots\ldots,\; s\,d\beta_{i-1};$$

summiert man diese, so ergibt sich

$$dq_i = s\left\{(i-1)\,d\beta_1 + (i-2)\,d\beta_2 + \ldots\ldots + d\beta_{i-1}\right\} = s\left[\,(i-k)\,d\beta_k\,\right]_{k=1}^{k=i-1} . \quad \ldots (6)$$

Indem man wieder anstelle der wahren Abweichungen den mittleren Winkelfehler $\pm\, m_\beta$ einführt, erhält man nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$m_{qi}^2 = s^2\, m_\beta^2 \left[\,(i-k)^2\,\right]_{k=1}^{k=i-1} .$$

Die hierin angezeigte Summe ist die Summe der Quadrate der Zahlen von 1 bis $i-1$, die mit $\frac{i}{6}\,(i-1)\,(2\,i-1)$ berechnet wird und mit der sich der im Punkte P_i zu erwartende Querfehler aus

$$m_{qi}^2 = s^2\, m_\beta^2 \cdot \frac{i}{6}\,(i-1)\,(2\,i-1) \quad \ldots (7)$$

ergibt. Für diesen Ausdruck wird vielfach die Näherungsform

$$m_{qi}^2 = s^2\, m_\beta^2\, \frac{i^3}{3} \quad \ldots (7a)$$

verwendet.

Bei der Entwicklung des im Punkt P_i eines beiderseits lagemäßig angeschlossenen Polygonzuges zu erwartenden Lagefehlers senkrecht zur Zugsrichtung, also des Querfehlers in P_i, muß man zwischen den drei dabei möglichen Formen des Richtungsanschlusses unterscheiden, nämlich

1. Richtungsanschluß weder im Anfangs- noch im Endpunkt,
2. Richtungsanschluß im Anfangs- oder im Endpunkt und
3. Richtungsanschluß im Anfangs- und Endpunkt.

Wir betrachten nacheinander diese möglichen Fälle und beginnen mit dem Fall 1., d. h. wir setzen weder im Anfangs- noch im Endpunkt einen Richtungsanschluß voraus. Indem wir wie immer die gestreckte Zugsform und gleichlange Seiten voraussetzen, können wir die Querverschiebung im Endpunkt als Folge der wahren Winkelfehler leicht angeben, es ist nämlich

$$dq_n = s\left\{(n-2)\;d\beta_2 + (n-3)\;d\beta_3 + \ldots\ldots + d\beta_{n-1}\right\} \quad \ldots (8a)$$

oder
$$dq_n = s\left[(n-k)\ d\beta_k\right]_{k=2}^{k=n-1} \quad \ldots\ (8\text{b})$$

Die Summierung muß mit der Ordnungszahl zwei beginnen, da es im vorliegenden Fall einen Brechungswinkel β_1, d. h. die Ordnungszahl eins, nicht gibt.

Ebenso erhält man für den Punkt p_i den wahren Querfehler dq_i mit
$$dq_i = s\left[(i-k)\ d\beta_k\right]_{k=2}^{k=i-1} \quad \ldots\ (8\text{c})$$

Denkt man sich den Polygonzug um seinen Anfangspunkt nun solange verdreht, bis die erste Zugseite ihre wahre Richtung erhält, so geben die Ausdrücke (8) die wahren Querabweichungen in den Punkten $P_n = E$ und P_i an. In weiterer Folge wird die Querabweichung dq_n im Endpunkt dadurch zum Verschwinden gebracht, daß jedem Punkt P_i eine Lageänderung senkrecht zur Zugsrichtung im Betrage von
$$v_{qi} = -\,dq_n \frac{i-1}{n-1}$$
erteilt wird (Aufteilung des Querfehlers); im Punkt P_i setzt sich demnach der senkrecht zur Zugsrichtung bestehende wahre Lagefehler dQ_i nach erfolgter Ausgleichung, ähnlich wie der Längsfehler, aus zwei Teilbeträgen, nämlich aus der Differenz
$$dQ_i = dq_i - dq_n \frac{i-1}{n-1}, \quad \ldots\ (9)$$
zusammen. Indem wir (9) in der Form
$$dQ_i = \frac{1}{n-1}\left\{(n-1)\ dq_i - (i-1)\ dq_n\right\}$$
schreiben und hierin die Ausdrücke (8) eintragen, erhalten wir
$$dQ_i = \frac{s}{n-1}\left\{\begin{array}{l}(n-1)\ (i-2)\ d\beta_2 + \ldots + (n-1)\ d\beta_{i-1} - \\ -\ (i-1)\ (n-2)\ d\beta_2 - \ldots - (i-1)\ (n-i+1)\,. \\ \qquad .\ d\beta_{i-1} - \ldots - (i-1)\ d\beta_{n-1}\end{array}\right\} \quad \ldots\ (10)$$
und, nach entsprechender Zusammenziehung,
$$dQ_i = \frac{s}{n-1}\Big\{-(n-i)\ d\beta_2 - 2\,(n-i)\ d\beta_3 - \ldots - (i-2)\ (n-i)\ d\beta_{i-1} -$$
$$-\ (i-1)\ (n-i)\ d\beta_i - \ldots - (i-1)\ d\beta_{n-1}\Big\}.$$

Etwas vereinfacht angeschrieben lautet dieser Ausdruck
$$dQ_i = \frac{s}{n-1}\left\{-\left[(k-1)\ (n-i)\ d\beta_k\right]_{k=2}^{k=i-1} - \left[(i-1)\ (n-k)\ d\beta_k\right]_{k=i}^{k=n-1}\right\}. \quad \ldots\ (11)$$

Führt man den mittleren Winkelfehler $\pm\, m_\beta$ ein, so bekommt man nach entsprechender Summierung der Koeffizientenquadrate in (11) für den im Punkt P_i zu erwartenden Querfehler m_{qi} den Ausdruck

$$m_{qi}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)(i-1)}{6(n-1)} \cdot \left\{ 2(n-i)(i-1) + 1 \right\} \qquad \ldots (12)$$

Dieser Ausdruck verschwindet — wie es nach erfolgter Ausgleichung natürlich sein muß — für die Annahme $i = n$; für die Annahme $i = \frac{n+1}{2}$, d. h. für den Punkt in der Zugsmitte, erhält man

$$m_{qm}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{n-1}{48} \left\{ (n-1)^2 + 2 \right\}, \qquad \ldots (13)$$

welcher Ausdruck durch die Näherung

$$m_{qm}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{n^3}{48} \qquad \ldots (13a)$$

ersetzt werden kann.

Dieses letztere Ergebnis stimmt mit dem Ergebnis der von V. von Loesch in der Zeitschrift für Vermessungswesen, 1951, Seite 55 ff. für einen Punkt in der Zugsmitte mitgeteilten Entwicklung überein.

Wir können nun einen Schritt weitergehen und den 2. Fall, den des einseitigen Richtungsanschlusses, annehmen. Zu dessen Betrachtung können wir die Formeln (8) unmittelbar heranziehen; in diesen sind dazu lediglich die Grenzen für die Summenbildungen mit $k = 1$ bis $k = n - 1$ (in (8 b)) und $k = 1$ bis $k = i - 1$ (in (8 c)) festzulegen. Wendet man weiterhin die auch hier natürlich geltende Überlegung (9) an und trägt man in diese die ausführlich angeschriebenen Ausdrücke (8 b) und (8 c) mit den eben mitgeteilten Grenzen ein, so erhält man

$$dQ_i = \frac{s}{n-1} \left\{ \begin{array}{l} (n-1)\ (i-1)\ d\beta_1 + (n-1)\ (i-2)\ d\beta_2 + \ldots \\ -(i-1)\ (n-1)\ d\beta_1 - (i-1)\ n-2)\ d\beta_2 - \ldots \end{array} \right\} \text{siehe } (10).$$

Man sieht, daß das erste Glied — jenes mit $d\beta_1$ — wegfällt; es entsteht also das gleiche Ergebnis wie im vorigen Fall. *Die Hinzunahme des Brechungswinkels β_1, der einseitige Richtungsanschluß, hat demnach keine Genauigkeitssteigerung in der Punktlage zur Folge.*

Als letzter Fall sei nun jener betrachtet, bei dem am Anfang und am Ende des Zuges sowohl Lageanschluß als auch — durch Messung von β_1 und β_n — beidseitiger Richtungsanschluß besteht.

Durch den beidseitigen Richtungsanschluß ist eine Ausgleichung der Brechungswinkel möglich; denkt man sich in jedem Brechungswinkel den wahren Winkelfehler $d\beta$, so wird durch die Ausgleichung jeder Brechungswinkel bekanntlich um den Betrag $-\frac{1}{n}\left[d\beta\right]_1^n$ verbessert.

Um nun den Querfehler im Punkt P_i zu ermitteln, hat man ebenso vorzugehen wie beim Ansatz (6), nur ist anstelle des wahren Winkelfehlers $d\beta$ der verbesserte Wert $d\beta - \frac{[d\beta]_1^n}{n}$ einzuführen. Man erhält damit

$$dq_i = s \left\{ (i-1) \left(d\beta_1 - \frac{[d\beta]}{n} \right) + (i-2) \left(d\beta_2 - \frac{[d\beta]}{n} \right) + \ldots + \left(d\beta_{i-1} - \frac{[d\beta]}{n} \right) \right\}. \qquad \ldots (14)$$

Nun ist aber $[d\beta]_1^n = d\beta_1 + d\beta_2 + \ldots\ldots\ldots + d\beta_n$; es kommen im vorstehenden Ausdruck daher sämtliche wahren Winkelfehler vor. Durch eine einfache Umformung läßt sich dieses Ergebnis in die Form

$$dq_i = s \cdot \left\{ \left[(i-k)\, d\beta_k \right]_{k=1}^{k=i-1} - \left[\frac{i}{2n} (i-1)\, d\beta_k \right]_{k=1}^{k=n} \right\} \quad \ldots (14\text{a})$$

umschreiben; wendet man bei Einführung des mittleren Winkelmeßfehlers m_β das Fehlerfortpflanzungsgesetz an, so erhält man

$$m_{qi}^2 = s^2 m_\beta^2 \left\{ \left[(i-k)^2 \right]_{k=1}^{k=i-1} - \frac{i^2}{4n} (i-1)^2 \right\}.$$

Die Bildung der hierin angezeigten Summe liefert nach entsprechender Zusammenziehung das Ergebnis

$$m_{qi}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{i(i-1)}{12n} \left\{ 2n(2i-1) - 3i(i-1) \right\}. \quad \ldots (15)$$

Dies ist der im Punkt P_i *nach* der Winkelausgleichung, jedoch *vor* der Aufteilung des Querfehlers (Koordinatenausgleichung) zu erwartende Querfehler. Setzt man in (15) $i = n$, d. h. nimmt man den Querfehler im Endpunkt $P_n = E$ des Zuges, so ergibt sich der bekannte Ausdruck

$$m_{qn}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{n}{12} (n^2 - 1), \quad \ldots (16)$$

der häufig durch die Näherung

$$mq_n^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{n^3}{12} \quad \ldots (16\text{a})$$

ersetzt wird.

Um nun zu dem im Punkt P_i nach der Koordinatenausgleichung zu erwartenden Querfehler zu kommen, haben wir lediglich die durch die Formel (9) ausgedrückte Überlegung zu wiederholen und dazu noch die Formel (14) für die Punktnummer n anzuschreiben. Für dq_n, d. h. für $i = n$, erhalten wir daraus

$$dq_n = s \left[\frac{1}{2} (n - 2k + 1)\, d\beta_k \right]_{k=1}^{k=n} \quad ; \quad \ldots (17)$$

bildet man nun

$$dQ_i = dq_i - dq_n \frac{i-1}{n-1},$$

so folgt mit (14a) daraus weiter der wahre Querfehler in P mit

$$dQ_i = s \left\{ \left[(i-k)\, d\beta_k \right]_{k=1}^{k=i-1} - \left[\left(\frac{1}{2} (n - 2k + 1) \frac{i-1}{n-1} + \frac{i}{2n} (i-1) \right) d\beta_k \right]_{k=1}^{k=n} \right\}. \quad \ldots (18)$$

Wendet man auf diesen Ausdruck bei Einführung des mittleren Winkelfehlers $\pm m_\beta$ wieder das Fehlerfortpflanzungsgesetz an, so ergibt sich der im Punkt P_i zu erwartende Querfehler *nach* der Aufteilung des Querfehlers im Endpunkt mit

$$m_{qi}^2 = s^2 m_\beta^2 \cdot \frac{i-1}{12n(n-1)} \cdot \left\{ \begin{aligned} & n^2 (n+1)(i-1) + in(6n - 4i + 2) - \\ & - 3i^2 (n-1)(i-1) + 2in(n-1)(2i-1) \end{aligned} \right\}. \quad \ldots (19)$$

Für den Endpunkt des Zuges, d. h. für $i = n$, verschwindet naturgemäß dieser Ausdruck, für den Punkt $i = \frac{n+1}{2}$, d. h. für die Zugsmitte, entsteht daraus die bekannte Formel

$$m_{qm}^2 = s^2 m_\beta^2 \cdot \frac{(n^2-1)(n^2+3)}{192 \cdot n}; \qquad \ldots (20)$$

die vielfach in der Näherungsform

$$m_{qm}^2 = s^2 m_\beta^2 \cdot \frac{n^3}{192} \qquad \ldots (20a)$$

angewendet wird.

Die Formeln (12) und (19) können übrigens ebenfalls durch Näherungsformeln, indem man darin z. B. $2i - 1 = 2i$ usw. setzt, ersetzt werden, wodurch man die einfachen Ausdrücke

$$m_{qi}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)^2 (i-1)^2}{3(n-1)} \qquad \ldots (12a)$$

und

$$m_{qi}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)^2 (i-1)^2}{12(n-1)} \qquad \ldots (19a)$$

erhält; diese Näherungen gewinnen mit steigender Punktzahl n an Berechtigung.

c) *Ableitung von Näherungsformeln*

Abschließend wollen wir noch zeigen, wie man auf Grund anderer Überlegungen in einfacher Weise zu den der Abschätzung der Genauigkeit der Punktlage in Polygonzügen dienenden Näherungsformeln (12a) und (19a) gelangen kann.

Den gestreckten gleichseitigen Polygonzug, die übliche Annahme, denken wir uns dazu in einem Koordinatensystem l, q, von dessen Achsen die eine parallel zur Zugsrichtung, die andere senkrecht dazu ist. Die übliche Zugsberechnung und die Aufteilung der Koordinatenwidersprüche kann man sich so durchgeführt denken, daß der Zug einmal vom Anfangspunkt $A \equiv P_1$ bis zum betrachteten Punkt P_i, dann vom Endpunkt $E \equiv P_n$ ebenfalls bis P_i berechnet wird; in P_i treten nun die Widersprüche in den Richtungen l und q auf. Die beiden für die Punktlage in P_i erhaltenen Koordinatenpaare l_{iA}, q_{iA} und l_{iE}, q_{iE} werden nun mit den Gewichten $(n - i)$ für das erstere, $(i - 1)$ für das letztere Koordinatenpaar gemittelt; dieser Vorgang entspricht, wie leicht ersichtlich, genau dem üblichen Vorgang bei der Aufteilung der Widersprüche.

Die endgültigen Koordinaten l_i und q_i des Punktes P_i ergeben sich demnach aus

$$l_i = \frac{(n-i)\, l_{iA} + (i-1)\, l_{iE}}{n-1} \quad \text{und} \quad q_i = \frac{(n-i)\, q_{iA} + (i-1)\, q_{iE}}{n-1} \qquad \ldots (21)$$

Wendet man auf diese Ausdrücke das Fehlerfortpflanzungsgesetz an, so ergibt sich der Längs- und Querfehler in P_i mit

$$m_{li}^2 = \left(\frac{n-i}{n-1}\right)^2 m_{liA}^2 + \left(\frac{i-1}{n-1}\right)^2 m_{liE}^2$$

und

$$m_{qi}^2 = \left(\frac{n-i}{n-1}\right)^2 m_{qiA}^2 + \left(\frac{i-1}{n-1}\right)^2 m_{qiE}^2 .$$

In diese Ausdrücke sind, um zum endgültigen Ergebnis zu kommen, die für die Zugteile AP_i und EP_i in P_i zu erwartenden Unsicherheiten in der Zugsrichtung und senkrecht dazu einzuführen.

Für den Längsfehler gilt nun bekanntlich

$$m_{liA}^2 = (i - 1)\, m_s^2 \text{ und } m_{liE}^2 = (n - i)\, m_s^2 ;$$

die Eintragung dieser Werte in (22a) ergibt mit

$$m_{li}^2 = m_s^2 \frac{(n-i)(i-1)}{n-1}$$

jenen Ausdruck für den Längsfehler in P_i, den wir in (5) schon mitgeteilt haben. Eine Näherung wurde dabei nicht eingeführt.

Bei der Berechnung des Querfehlers haben wir zwischen den möglichen Fällen zu unterscheiden, nämlich 1. kein oder nur einseitiger Richtungsanschluß und 2. beidseitiger Richtungsanschluß, Für den ersten Fall benützen wir die Näherungsformel (7a) mit einer weiteren Näherung in der Annahme der Punktzahl und haben damit

$$m_{qiA}^2 \doteq s^2 m_\beta^2 \frac{(i-1)^3}{3} \quad \text{und} \quad m_{qiE}^2 \doteq s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)^3}{3} ;$$

für den zweiten Fall hingegen nach (16a) die Ausdrücke

$$m_{qiA} \doteq s^2 m_\beta^2 \frac{(i-1)^3}{12} \quad \text{und} \quad m_{qiE}^2 \doteq s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)^3}{12}$$

in die Formel (22b) einzuführen.

Es ergeben sich in Übereinstimmung mit (12a) und (19a) daraus die Formeln

$$m_{qi}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)^2 (i-1)^2}{3(n-1)} \quad \text{und} \quad m_{qi}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)^2 (\mathrm{I}-1)^2}{12(n-1)} .$$

Für $i = \frac{n+1}{2}$, für die Zugmitte also, führen diese Ausdrücke zunächst auf die Formeln

$$m_{qm}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{(n-1)^3}{48} \quad \text{und} \quad m_{qm}^2 = s^2 \,.\, m_\beta^2 \frac{(n-1)^3}{192} ,$$

die mit der weiteren Näherung $(n - 1) \doteq n$ in die Formeln (13a) und (20a) übergehen.

Zuletzt seien noch, um den Grad der Annäherung der Formeln (12) und (19) durch die Näherungsformeln (12a) und (19a) zu zeigen, einige Zahlenwerte der Ausdrücke

$$\sqrt{\frac{(n-i)(i-1)}{6(n-1)} \left\{ 2(n-i)(i-1) + 1 \right\}}$$

und

$$\sqrt{\frac{i-1}{12n(n-1)} \left\{ n^2 (n+1)(i-1) + i\,n\,(6n - 4i + 2) - 3i^2 (n-1) \,.\, (i-1) + 2\,i\,n\,(n-1)(2i-1) \right\}}$$

den Zahlenwert der Ausdrücke

$$\frac{(n-i)(i-1)}{\sqrt{3(n-1)}} \quad \text{und} \quad \frac{(n-i)(i-1)}{\sqrt{12(n-1)}}$$

gegenübergestellt.

Für $n = 10$ erhält man — die Näherungswerte sind unter den strengen Werten angeschrieben — für die Werte von i zwischen 1 und 10 dafür die Zahlenwerte:

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Formel (12)	0,00	1,59	2,74	3,51	3,90	3,90	3,51	2,74	1,59	0,00
Formel (12a)	0,00	1,54	2,69	3,46	3,85	3,85	3,46	2,69	1,54	0,00
Formel (19)	0,00	0,96	1,62	2,06	2,28	2,28	2,06	1,62	0,96	0,00
Formel (19a)	0,00	0,77	1,35	1,73	1,93	1,93	1,73	1,35	0,77	0,00

Die Näherung (12a) liefert, wie man aus den nur kleinen Abweichungen gegen die Sollwerte erkennt, sehr gute Ergebnisse, während die Näherung (19a) bei $n = 10$ im Durchschnitt um etwa 15% zu kleine Werte ergibt.

Die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen im Rahmen der mathematischen Statistik

Von *W. Eberl*

§ 1. Einleitung. Trotz der stürmischen Entwicklung der Stochastik[1]) während der letzten Jahrzehnte hat sich die lehrbuchmäßige Darstellung der Ausgleichsrechnung seit den Tagen von C. F. *Gauß* (1777—1855) und F. R. *Helmert* (1843 bis 1917) kaum geändert. Das ist im Hinblick auf beide Disziplinen bedauerlich. Denn einerseits tragen die Methoden der mathematischen Statistik viel weiter als die der traditionellen Ausgleichsrechnung, und andererseits müßte die Beachtung der Tatsache, daß die Ausgleichsrechnung nur ein kleines wenn auch wichtiges Teilgebiet der Regressionstheorie darstellt, zu einer realistischeren Beurteilung der Rolle, die die Stochastik für den Techniker spielt, beitragen.

Der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen kommt eine besondere Bedeutung zu, da einerseits die direkten Beobachtungen als Sonderfälle von vermittelnden angesehen werden können und sich andererseits die Ausgleichung bedingter Beobachtungen meist sehr einfach auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zurückführen läßt.

Die Paragraphen 2 bis 4 enthalten ohne Beweis einige für das Folgende grundlegende Definitionen und Sätze der Stochastik. Ziffer 5 bringt dann einige Sätze der Regressionstheorie samt den zugehörigen meist bekannten Beweisen. Die ausgiebige Verwendung des Summationsübereinkommens auf diesem Gebiet dürfte neu sein und bietet gewisse Vorteile.

---

[1]) Die Stochastik ist die Lehre vom Zufall und umfaßt Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik.