Paper-ID: VGI_195905

Näherungskonstruktionen von e = 2,7182818...

Godfried Oliwa [1]

[1] *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **47** (1), S. 19–20

1959

BibTEX:

```
@ARTICLE{Oliwa_VGI_195905,
Title = {N{\"a}herungskonstruktionen von e = 2,7182818...},
Author = {Oliwa, Godfried},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {19--20},
Number = {1},
Year = {1959},
Volume = {47}
}
```

Näherungskonstruktionen von $e = 2{,}7182818\ldots$

Von Godfried Oliwa, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

Bei manchen geometrischen Konstruktionen ergibt sich die Notwendigkeit, die transzendenten Zahlen π und e einzuführen; so etwa e bei der konstruktiven Behandlung der logarithmischen Spiralen. Ist π durch die Näherungskonstruktion von Kochanskij hinreichend genau bestimmbar, so kann dies von e nicht behauptet werden. Dies scheint historisch begründet zu sein. Im folgenden werden einige Konstruktionsvorschläge gemacht, um e näherungsweise zu bestimmen.

1. Bei Konstruktionen, wo nur eine Dezimale genau zu sein braucht, genügt es e durch $1 + \sqrt{3} = 2{,}732..$ zu ersetzen. Der dadurch entstehende Fehler ist von der Größenordnung $1{,}4.10^{-2}$ oder der relative Fehler von $0{,}5.10^{-2}$. Bei der Konstruktion kann etwa die Beziehung chord $120^0 = \sqrt{3}$ verwendet werden; sie bietet aber sicher nicht die einzige Konstruktionsmöglichkeit.

2. Verlangt die Zeichnung größere Genauigkeit, so kann e durch $4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2{,}7155..$ dargestellt werden. Der auftretende Fehler ist dann von der Größenordnung $2{,}7.10^{-3}$ oder relativ 10^{-3}. Die zeichnerische Darstellung ist aus Figur 1 zu ersehen und wegen ihrer Ähnlichkeit mit der π-Konstruktion von Kochanskij leicht merkbar.

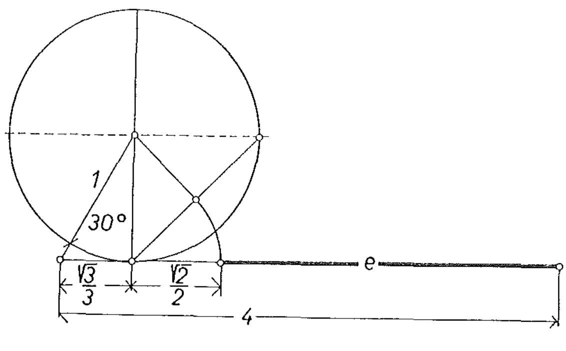

Fig. 1

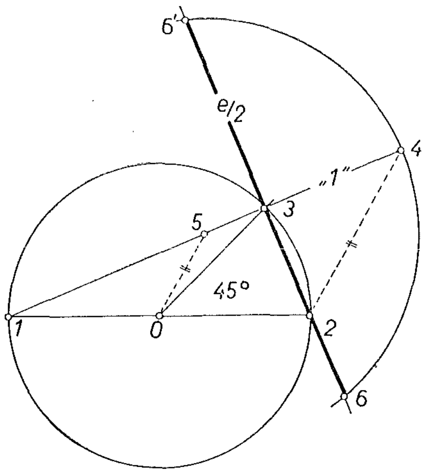

Fig. 2

3. Sollen drei Dezimalen gesichert sein, so kann als Näherung für $e/2$ der Wert $\sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} = 1{,}35932..$ angesehen werden; dann hat der begangene Fehler eine Größenordnung von $1{,}8.10^{-4}$ und der für e somit $3{,}6.10^{-4}$ oder relativ $1{,}3.10^{-4}$. Die konstruktive Lösung ergibt sich aus der Beziehung chord $135^0 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} = (e/2)^2$.

Wird nun (wie in Figur 2) im Einheitskreis der Durchmesser 1,2 gezogen und durch den Mittelpunkt 0 eine zu 1,2 unter 45^0 geneigte Gerade gezogen, so schneidet diese den Einheitskreis in 3. Verbindet man 1 und 3, so ist die Strecke 1,3 = = chord 135^0. Die Näherung von $e/2$ wird durch graphisches Wurzelziehen erhalten. Deshalb wird auf der Geraden 1,3 von 3 aus die Einheitsstrecke abgetragen; ihr Endpunkt ist 4. Die Mitte der Strecke 1,4 wird mittels Ähnlichkeitsgesetzen gefunden; daher schneidet die Parallele zu 2,4 durch 0 die Gerade 1,4 in 5. Der Kreis mit dem Radius 4,5 um 5 schneidet 2,3 in 6 und 6'. Die Strecke 6,6' ist die Näherung für e.

4. Bisher wurden zur Näherung von e Wurzelausdrücke herangezogen. Im folgenden soll eine Konstruktion besprochen werden, der der rationale Näherungsbruch $\frac{1843}{678} = 2{,}71828\,909\ldots$ für e zugrunde liegt. Dieser Wert ist um 0,00000 727.. zu groß. Es besteht eine gewisse Ähnlichkeit mit der Metius'schen π-Näherung $\left(\frac{355}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2}\right)$ da $\frac{1843}{678} = 2{,}5 + \frac{2}{3} \cdot \frac{(6/8)^2 + (1/8)^2}{1 + (7/8)^2}$ ist.

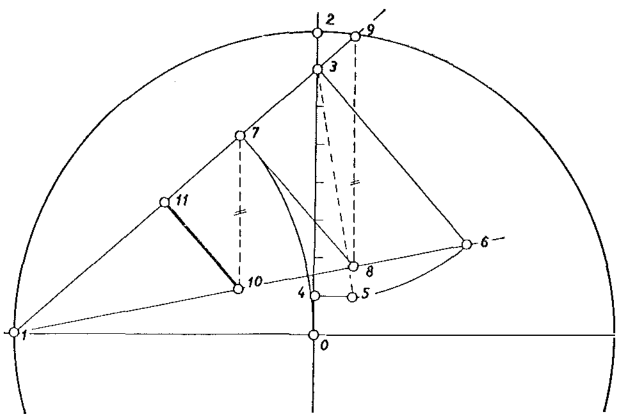

Fig. 3

Es möge eine kurze Konstruktionsbeschreibung genügen.

Der Radius des Kreises um 0 sei die Zeicheneinheit; 1,0 und 2,0 seien aufeinander normale Radien. 2,0 wird in acht gleiche Teile geteilt. Dann ist 3,0 = 7/8. Da 4,0 = = 4,5 = 1/8 und 4,0 auf 4,5 normal steht, ist 3,5 = $(6/8)^2 + (1/8)^2$ und 1,3 = = $1 + (7/8)^2$. Wird in 3 eine Normale zu 1,3 errichtet, 3,5 = 3,6 gemacht und 1,6 verbunden, so ist 1,7 = 1,0 = Zeicheneinheit und 7,8 (parallel zu 3,6) = $= \frac{(6/8)^2 + (1/8)^2}{1 + (7/8)^2}$. Wird 7,9 = 1/2 gesetzt und 9 mit 8 verbunden, dazu in 7 eine Parallele gezogen, so schneidet diese 1,6 in 10. Fällt man von 10 das Lot auf 1,3, so schneidet dies 1,3 in 11. 10,11 ist jener Wert, der um 2,5 vermehrt, die Näherung 2,71828 909.. für e ergibt.

Dieser Näherungskonstruktion kommt ebenso wie der für π durch 355/113 nur theoretische Bedeutung zu; der üblichen Zeichengenauigkeit entspricht am besten die in Figur 2 abgebildete.