



Ein Iterationsverfahren zur Berechnung langer geodätischer Strecken

Karl Hubeny ¹

¹ *Technische Hochschule Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **47** (1), S. 1–8

1959

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_195901,  
Title = {Ein Iterationsverfahren zur Berechnung langer geod{\a}tischer  
Strecken},  
Author = {Hubeny, Karl},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {1--8},  
Number = {1},  
Year = {1959},  
Volume = {47}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. R o h r e r
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. L e g o und o. Prof. Hofrat Dr. phil. K. L e d e r s t e g e r

Nr. 1 Baden bei Wien, Ende Februar 1959 XLVII. Jg.

Ein Iterationsverfahren zur Berechnung langer geodätischer Strecken

Von Karl Hubeny, Graz

Zur Berechnung langer geodätischer Strecken zwischen zwei Punkten des Rotationsellipsoids ist — und dies ist allen möglichen Verfahren gemeinsam — die zahlenmäßige Auswertung mehr oder weniger vielgliedriger Formeln notwendig. Ich möchte nun im Folgenden zeigen, wie diese unter der Bezeichnung „zweite Hauptaufgabe“ eines der Hauptthemen des geometrischen Teiles der höheren Geodäsie darstellende Aufgabe durch ein rasch konvergierendes Iterationsverfahren mit Formeln geringer Reichweite auch über längere Strecken hin berechnet werden kann.

Der Gedanke des mitzuteilenden Verfahrens ist rasch skizziert. Für die auf einem Rotationsellipsoid gegebenen Punkte $P_1 (\varphi_1, I_1)$ und $P_2 (\varphi_2, I_2)$ sei die zweite Hauptaufgabe zu lösen, d. h. es soll die geodätische Strecke P_1P_2 berechnet werden, worunter man i. A. nicht nur die Berechnung der Bodenlänge, sondern auch die Berechnung der Azimute im Anfangs- und Endpunkt der Strecke versteht. Zur Durchrechnung der Aufgabe seien z. B. die Koeffizienten der Gauß'schen Mittelbreitenformeln so vorgegeben, daß mit ihnen die Überstreichung eines gewissen Bereiches $\Delta\varphi_0$ und ΔI_0 möglich ist. Dieser Bereich sei wesentlich kleiner als der, der bei der gegebenen Aufgabe vorliegt; es sei also mit $k_1, k_2 > 1$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{12} = k_1 \Delta\varphi_0, \quad I_2 - I_1 = \Delta I_{12} = k_2 \Delta I_0.$$

Zur Durchführung der vorzunehmenden Iteration benützen wir den größeren Wert des Faktorenpaares k_1k_2 , den wir auf eine ganze Zahl k abrunden. Wir bilden damit zwischen den gegebenen Punkten P_1 und P_2 die Folge von Zwischenpunkten $Q_1 \dots Q_{k-1}$ nach

$$\begin{aligned}
 \varphi_{Q,1} &= \varphi_1 + \frac{1}{k} \Delta \varphi_{12} & l_{Q,1} &= l_1 + \frac{1}{k} \Delta l_{12} \\
 \varphi_{Q,2} &= \varphi_1 + \frac{2}{k} \Delta \varphi_{12} & l_{Q,2} &= l_1 + \frac{2}{k} \Delta l_{12} \\
 \vdots & & \vdots & \\
 \varphi_{Q,k-1} &= \varphi_1 + \frac{k-1}{k} \Delta \varphi_{12} & l_{Q,k-1} &= l_1 + \frac{k-1}{k} \Delta l_{12}
 \end{aligned} \quad (1)$$

und berechnen mit den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln die zweite Hauptaufgabe jeweils zwischen den Punkten

$$P_1 Q_1, Q_1 Q_2 \dots Q_{k-1}, P_2.$$

Dadurch entsteht ein aus geodätischen Strecken gebildetes Polygon $P_1 Q_1 \dots Q_{k-1} P_2$ (Abb. 1), aus welchem wir nach dessen ebener Ausbreitung an Hand der Abbildung 2 die Strecken $Q_1 Q_{10} = a_1$, $Q_2 Q_{20} = a_2$ usw. berechnen können, die in erster Annäherung gleich sind den Bogenlängen $Q_i Q_{i0}$ der Parallelkreise zwischen der geodätischen Strecke $P_1 P_2$ und den Punkten Q_i .

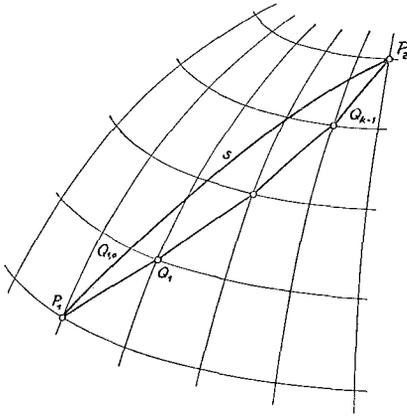


Abb. 1

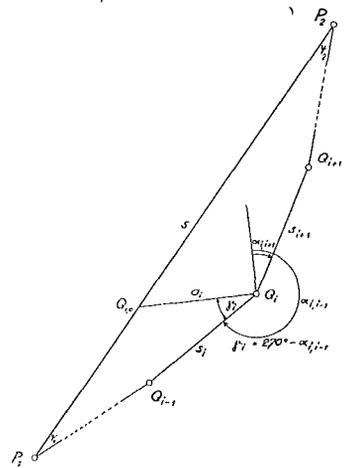


Abb. 2

Aus den Größen

$$dl_1 = \frac{a_1}{p_1}, dl_2 = \frac{a_2}{p_2}, \dots, dl_{k-1} = \frac{a_{k-1}}{p_{k-1}} \quad (2)$$

$$(p_i = \text{Parallelkreishalbmesser im Punkt } Q_i = N_i \cos \varphi_i)$$

können nunmehr Zuschläge $dl_1 \dots dl_{k-1}$ berechnet werden, die, an den geographischen Längen der entsprechenden Punkte vorzeichenrichtig angebracht, eine neue, näher an die geodätische Strecke $P_1 P_2$ herangerückte Punktfolge $Q_1 - Q_{k-1}$ ergeben. Ein nochmaliger Ansatz dieses Vorganges liefert ein Polygon, dessen Seitensumme sich der Länge der geodätischen Strecke $P_1 P_2$ in der Regel weitgehend annähert. Die Azimute α_1 und α_2 in den Punkten P_1 und P_2 können in guter Annäherung nach Abbildung 2 aus der ebenen Ausbreitung des letzten Iterationsschrittes, nämlich durch die Anbringung der leicht zu berechnenden Zuschläge ψ_1 und ψ_2 zu den Azimuten der Strecken $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_{k-1}$ ermittelt werden.

Soweit das Iterationsverfahren. Dazu sei bemerkt, daß für eine beliebige Anzahl von Iterationsschritten die von der geographischen Breite abhängigen Koeffizienten der benützten Formeln nur einmal berechnet werden müssen, da sich bei jedem weiteren Iterationsschritt lediglich der Längenunterschied zwischen dem gerade betrachteten Punktpaar ändert, während alle geographischen Breiten und damit natürlich auch die Breitenunterschiede erhalten bleiben. Dies gilt allerdings mit der Einschränkung, daß das Azimut der geodätischen Kurve im Bereich der Strecke P_1P_2 den Wert $\frac{\pi}{2}$ nicht einschließen und diesem Wert auch nicht allzu nahe kommen soll, da in diesem Falle die Verschiebung der Punktfolge $Q_1 - Q_{k-1}$ in Richtung der Meridiane vorzuziehen ist.

Es soll nun untersucht werden, wie weit die Annäherung ausgeführt werden muß, d. h. welche Abstände $a_{0,1} \dots a_{0,k-1}$, gemessen in den Senkrechten durch die Punkte Q_i auf die Strecke s , noch zulässig sind, wenn — es sei zunächst die Streckenlänge betrachtet — die Differenz

$$[s_i] - s$$

einen durch die erstrebte Rechengenauigkeit vorgegebenen Wert Δs nicht überschreiten soll. Man geht dabei zweckmäßig von den Neigungen der Strecken s_{i+1} gegen die Strecke s aus; in vereinfachter Betrachtungsweise denke man sich dazu den Linienzug $P_1P_2Q_{k-1} \dots Q_1P_1$ wieder in der Ebene ausgebreitet; es gilt dann in hinreichender Näherung

$$s \doteq [s_{i+1} \cos \nu_i].$$

Soll nun, wie verlangt wird,

$$[s_i] - s \leq \Delta s$$

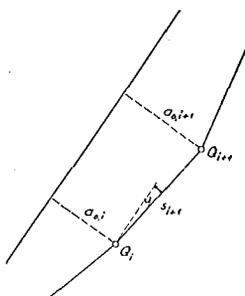


Abb. 3

sein, so muß bei der Unterteilung in k Teilstrecken mit ungefähr gleichen Seitenlängen offenbar

$$s_{i+1} - s_{i+1} \cos \nu_i \leq \frac{1}{k} \Delta s \tag{3}$$

sein. Da die Neigung ν_i von S_{i+1} gegen s als klein vorausgesetzt werden kann, darf

$$\cos \nu_i = 1 - \frac{\nu_i^2}{2} + \dots$$

gesetzt werden, worin für ν_i genähert

$$\nu_i \doteq \frac{a_{0,i+1} - a_{0,i}}{s_{i+1}} \doteq \frac{\Delta a_{0,i}}{s_{i+1}} \text{ eingetragen werden kann.} \tag{4}$$

Man erhält mit dem Vorangegangenen bei Annahme ungefähr gleicher Seitenlängen, d. h. unter der Annahme $s_{i+1} \doteq \frac{s}{k}$,

$$\frac{k^2 \cdot \Delta a_{0,i}^2}{2 s} \leq \Delta s \tag{5}$$

und

$$\Delta a \leq \frac{1}{k} \sqrt{2 s \Delta s} . \tag{6}$$

Eine überschlägige Durchrechnung von (6) zeigt, daß man bei

$$s = 1000 \text{ km, } k = 8 \text{ und } \Delta s \leq 0,001 \text{ m}$$

für jede Teilstrecke ein Δa_0 von etwa $\pm 5,6 \text{ m}$ gestatten darf; der Linienzug $P_1Q_1 \dots Q_{k-1}P_2$ könnte demnach bei der Annahme einer Konfiguration nach Abb. 5 in der Mitte eine Abweichung von etwas mehr als 20 m gegen die geodätische Strecke s aufweisen.

Will man die Winkel ψ_1 und ψ_2 aus der ebenen Ausbreitung des Linienzuges $P_1Q_1 \dots Q_{k-1}P_2P_1$ berechnen, so müßte offensichtlich der sphäroidische Exzeß der Figur — zumindest teilweise — vernachlässigbar sein. In der nebenstehenden Abbildung 4 ist der Linienzug in der einfachen ebenen Ausbreitung voll gezeichnet

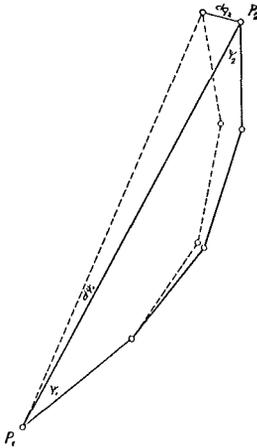


Abb. 4

dargestellt; strichliert ist hingegen angedeutet, wie sich die Figur nach Anbringung des Exzesses an den Brechungswinkeln des Linienzuges ergeben würde. Da der Winkel ψ_1 mit dem Azimut der Strecke P_1Q_1 in P_1 zur Berechnung des Azimuts P_1P_2 dient, erscheint letzteres um den Betrag

$$d\psi_1 \doteq \frac{dq_2}{s} \quad (7)$$

verfälscht. Es wäre denkbar, den Exzeß der durch das Polygon gebildeten Figur zu berechnen und eine entsprechende Verteilung desselben auf die Brechungswinkel vorzunehmen, womit die in Abb. 4 skizzierte Figur berechenbar wäre und mit (7) etwa das Azimut P_1P_2 aus

$$\alpha_{12} = \alpha_{Q_1P_1} - \psi_1 - d\psi_1$$

angegeben werden könnte. Dieser Lösungsweg sei jedoch — begründet, denn die Berechnung und Aufteilung des Exzesses bedingt eine nicht unbeträchtliche Rechenarbeit — aus den Betrachtungen ausgeschieden; es soll vielmehr auf die Frage, unter welchen Voraussetzungen, d. h. bei welchem Grad der Annäherung die aus dem Polygon $P_1Q_1 \dots Q_{k-1}P_2P_1$ gebildete Figur auch im Hinblick auf die Azimute noch eben berechnet werden kann, näher eingegangen werden. Zur Vereinfachung der Untersuchung denke man sich das Polygon so gestaltet,

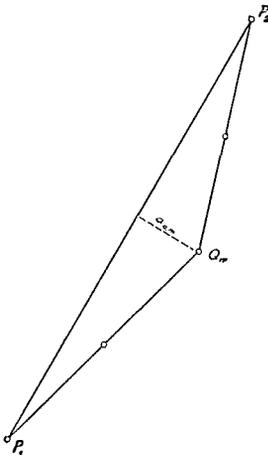


Abb. 5

daß nur im Punkt Q_m ($m = \frac{k}{2}$, k wird als gerade Zahl vorausgesetzt) der Berechnungswinkel von π abweicht; für alle anderen Brechungswinkel möge $\beta = \pi$ gelten. Das in der Abb. 4 gezeichnete Polygon erhält damit die in Abb. 5 angedeutete Form; als einziger Brechungswinkel erhält nunmehr nur der Brechungswinkel im Punkt Q_m einen Anteil am Exzeß ϵ der gesamten Figur. Dieser Anteil wird

bekanntlich durch den Wert $\frac{\epsilon}{3}$ weitgehend angenähert, womit sich, wenn man

wieder annähernd gleiche Seitenlängen s_i annimmt und $[s_i] \doteq s$ voraussetzt,

$$dq_2 \doteq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{s}{2} = \frac{\varepsilon}{6} s \quad (8)$$

ergibt. Aus (7) folgt dann

$$d\psi_1 \doteq \frac{\varepsilon}{6}, \quad (9)$$

welches Ergebnis natürlich auch für $d\psi_2$ gilt. Aus dieser, dem allgemeinen Fall recht nahe kommenden Überlegung läßt sich entnehmen, daß in den Azimuten etwa ein Sechstel des Exzesses vernachlässigt wird, wenn man ohne die Korrekturen $d\psi$ auskommen, d. h. die Figur eben berechnen will.

Der sphäroidische Exzeß ist aus $\varepsilon \doteq J \cdot K$ zu berechnen, worin J die Fläche des Polygons und K einen Mittelwert der Krümmung $\left(K = \frac{1}{MN} = \frac{1}{R^2}\right)$ bedeutet. Wünscht man eine bestimmte Genauigkeit in den Azimuten zu erreichen, z. B. unter dem Grenzwert $\Delta\alpha$, so muß offenbar

$$\frac{1}{6} JK \leq \Delta\alpha$$

sein. Hierin ist noch nach Abb. 5

$$J \doteq \frac{1}{2} a_{0,m} s$$

einzutragen, woraus der Ausdruck

$$a_{0,m} \leq \frac{12 R^2}{s} \Delta\alpha \quad (10)$$

für den noch zulässigen Wert von $a_{0,m}$ entsteht. Mit der im Anschluß an die Formel (6) getroffenen Annahme von Zahlenwerten erhält man mit $\Delta\alpha \leq 0'',001$ für $a_{0,m}$ den überschlägig berechneten Zahlenwert $\pm 2,4$ m, d. h. das Polygon $P_1Q_1 \dots O_{k-1}$, P_2 darf in der Mitte um diesen Betrag neben der geodätischen Strecke s verlaufen, damit die Winkel ψ_1 und ψ_2 nach dem letzten Iterationsschritt aus der ebenen Ausbreitung der Figur mit einer in der Größenordnung von $0'',001$ liegenden Annäherung erhalten werden.

Der Umfang der Rechenarbeit kann etwas reduziert werden, wenn man die Rechnung nicht mit der aus (1) gegebenen Punktfolge $Q_1 \dots Q_{k-1}$ beginnt, sondern die geographischen Längen dieser Punkte so korrigiert, daß diese Punktfolge sich von vorneherein besser an die geodätische Strecke anschmiegt.

Nach Abb. 6 wäre dazu der Längenunterschied zu bestimmen, der zwischen den auf dem gleichen Parallelkreis liegenden Punkten Q und Q_0 besteht, also jeweils der Längenunterschied zwischen dem Punkt

$$\varphi_Q = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2), \quad l_Q = \frac{1}{2} (l_1 + l_2)$$

und dem Schnittpunkt Q_0 der geodätischen Strecke P_1P_2 mit dem Parallelkreis

$$\varphi_Q = \varphi_{Q_0} = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2).$$

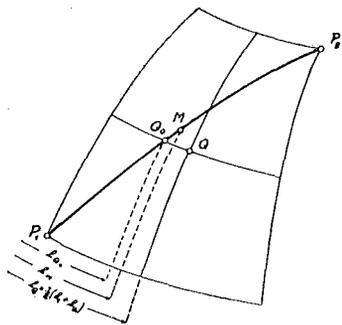


Abb. 6

Entsprechend dem Ansatz der Mittelbreitenformeln gehen wir dazu vom Halbierungspunkt M der geodätischen Strecke P_1P_2 aus; es gilt zunächst die Reihenentwicklung

$$l_{Q0} = l_M + \left(\frac{dl}{d\varphi} \right) \cdot (\varphi_Q - \varphi_M) + \dots,$$

in die wir

$$\varphi_Q - \varphi_M = \frac{1}{8} \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right) s^2 + \dots$$

eintragen. Daraus und mit

$$l_M = l_Q - \frac{1}{8} \left(\frac{d^2l}{ds^2} \right) s^2 + \dots$$

ergibt sich

$$l_{Q0} = l_Q + \frac{1}{8} \left(\frac{dl}{d\varphi} \cdot \frac{d^2\varphi}{ds^2} - \frac{d^2l}{ds^2} \right) s^2 + \dots$$

Die drei vorstehenden Ansätze sind der Entwicklung der Mittelbreitenformeln entnommen; trägt man hierin die angezeigten, streng genommen im Punkt M zu nehmenden Ableitungen ein, so ergibt sich bei Weglassung der ellipsoidischen Glieder

$$l_{Q0} = l_Q - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{8 N^2 \cos \varphi} \left(2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} \right) s^2 + \dots \quad (11)$$

Hierin beziehen sich alle von der geographischen Breite abhängigen Größen auf die Breite $\varphi_Q = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$; das Azimut α ist das mittlere Azimut. Führt man weiter die Näherungen

$$\cos \alpha \doteq \frac{M}{s} (\varphi_2 - \varphi_1) \quad \text{und} \quad \sin \alpha \doteq \frac{N \cos \varphi}{s} (l_2 - l_1)$$

ein, so ergibt sich — immer unter Weglassung der ellipsoidischen Glieder —

$$l_{Q0} \doteq l_Q - \frac{l_2 - l_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{8} \cdot \left[2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \cos^2 \varphi (l_2 - l_1)^2 \right]. \quad (12)$$

Die Anwendung dieser Näherungsformel erfolgt so, daß man sie bei einer durch den Faktor k erfolgten Unterteilung zunächst für den Punkt Q mit dem Index $i = \frac{k}{2}$ zwischen den Punkten P_1 und P_2 und in weiterer Folge für die Punkte $Q_{\frac{k}{4}}$ (zwischen P_1 und $Q_{\frac{k}{2}}$) und $Q_{\frac{3k}{2}}$ (zwischen $Q_{\frac{k}{2}}$ und P_2) usw. anwendet. Wie ersichtlich, muß die Zahl k dabei als Potenzzahl von 2 ($k = 2^i$) gewählt werden.

Die Anwendung der Formel (12) in der eben erwähnten Art erspart einen Iterationsschritt.

Abschließend sei noch ein Anwendungsbeispiel gegeben, in dem das im Jordan'schen Handbuch der Vermessungskunde mitgeteilte „Große sphäroidische Normalbeispiel“ berechnet wird. Diesem Beispiel liegt auf dem Besselschen Ellipsoid die Annahme

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = 45^0 & \varphi_2 = 55^0 \\ l_1 = 6^0 & l_2 = 10^0 \end{array}$$

zugrunde; das Ergebnis ist

$$s = 1\,320\,284,366 \text{ m}$$

$$\alpha_{12} = 29^{\circ} 03' 15,4598''$$

$$\alpha_{21} = 36^{\circ} 45' 07,4006''$$

Dieses Beispiel wurde mit $k = 4$ unter Benützung der Gauß'schen Mittelbreitenformeln bis einschließlich der Glieder von der Ordnungszahl drei nach dem mitgeteilten Verfahren berechnet. Nachstehend die Ergebnisse:

	geogr. Breite	geogr. Länge	Geod. Strecke
P ₁	45° 00' 00''	0° 00' 00''	338 133,588
Q ₁	47° 30' 00''	2° 30' 00''	333 217,792
Q ₂	50° 00' 00''	5° 00' 00''	328 283,094
Q ₃	52° 30' 00''	7° 30' 00''	323 367,169
P ₂	55° 00' 00''	10° 00' 00''	
			<hr/>
			[s] = 1 323 001,643
			s _{1,2} = 1 320 295,544

1. Näherung (die geogr. Breiten bleiben erhalten)

P ₁	0° 00' 00''	320 194,552
Q ₁	2° 03' 51,9682''	325 665,064
Q ₂	4° 22' 22,1806''	332 660,356
Q ₃	6° 59' 20,3507''	341 764,427
P ₂	10° 00' 00''	
		<hr/>
		[s] = 1 320 284,399
		s _{1,2} = 1 320 284,388

2. Näherung

P ₁	0° 00' 00''	320 156,897
Q ₁	2° 03' 48,42827''	325 665,459
Q ₂	4° 22' 18,67782''	332 664,727
Q ₃	6° 59' 17,25904''	341 797,304
P ₂	10° 00' 00''	
		<hr/>
		[s] = 1 320 284,387
		s _{1,2} = 1 320 284,387

Nach der 2. Näherung wurden noch die Azimute berechnet; als Ergebnis erhält man die nachstehenden Zahlenwerte, denen in Klammer die Sollwerte bei-

gefügt sind. Es ist

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= 1\ 320\ 284,387 & (1\ 320\ 284,866, \triangle &= -0,019\ \text{m}) \\ \alpha_{1,2} &= 29^\circ\ 03'\ 15,4604 & (29^\circ\ 03'\ 15,4598, \triangle &= -0,0006) \\ \alpha_{2,1} &= 36^\circ\ 45'\ 07,3996 & (36^\circ\ 45'\ 07,4006, \triangle &= +0,0010). \end{aligned}$$

Die ausgewiesenen Differenzen werden, wie sich leicht zeigen läßt, in der Hauptsache durch die Beschränkung auf die Glieder von der Ordnungszahl drei der verwendeten Mittelbreitenformeln erklärt.

Die Benützung der Formel (12) ergibt anstelle des Ergebnisses des ersten Iterationsschrittes die Folge von Zwischenpunkten

$$\begin{aligned} Q_1 & 2^\circ\ 03'\ 50'' \\ Q_2 & 4^\circ\ 22'\ 20'' \\ Q_3 & 6^\circ\ 59'\ 20''; \end{aligned}$$

geht man davon aus, so ist für das behandelte Beispiel nur eine einmalige Berechnung des eben ausgebreiteten Polygons $P_1Q_1 \dots Q_{k-1}P_2$ und eine zweimalige Anwendung der Mittelbreitenformeln nötig.

Punktlagefehler — Felddiagramm für das Rückwärtseinschneiden

(mit 1 Beilage)

Von W. Smetana

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

I. Einleitung

Wie bereits H. Biach in der Österr. Zeitschrift f. Vermessungswesen, 41. Jg., Heft Nr. 5, gleich eingangs seines Aufsatzes: „Die graphische Ermittlung des mittleren zu erwartenden Fehlers beim Rückwärtseinschneiden“ dargelegt hatte, scheint die relativ geringe Anwendung des Rückwärtseinschneidens bei der geodätischen Punktbestimmung in der Praxis ihre Ursache darin zu haben, daß die Genauigkeit des zu bestimmenden Neupunktes nicht auf einfache Weise abgeschätzt werden kann.

H. Biach hat auch in seiner Abhandlung ein sehr zweckmäßiges Diagramm entworfen, das auf einfache Weise den mittleren zu erwartenden Fehler beim Rückwärtseinschneiden zu ermitteln gestattet. Die Benützung dieses Diagrammes setzt allerdings das Zeichnen entsprechender Strahlen auf Pauspapier und die Entnahme gewisser Größen voraus.

Unabhängig davon will ich nun im folgenden ein Diagramm für den Feldgebrauch zur Darstellung bringen, dessen Anwendung bloß das Vorhandensein einer Karte etwa 1:50.000 mit lagerichtig eingezeichneten trigonometrischen Punkten voraussetzt. Das Zeichnen irgendwelcher Linien bzw. die Entnahme gewisser Größen erübrigt sich hiebei vollends, was sich bereits bei der Genauigkeitsabschätzung anlässlich der Bestimmung einer größeren Anzahl von rückwärtseinzuschneidenden Einschaltpunkten in der Praxis als sehr wirtschaftlich erwiesen hatte.