

Paper-ID: VGI\_195817



## Die analytische Lösung der Probleme von Snellius und Hansen mit Hilfe der Transformation durch reziproke Radien

Ludwig Starkl <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Wels*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **46** (5), S. 136–142

1958

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Starkl_VGI_195817,  
  Title = {Die analytische Lösung der Probleme von Snellius und Hansen mit  
    Hilfe der Transformation durch reziproke Radien},  
  Author = {Starkl, Ludwig},  
  Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {136--142},  
  Number = {5},  
  Year = {1958},  
  Volume = {46}  
}
```



behalten wurde. Mit  $\vartheta = 2,67$  verringern sich aber alle  $g''$ -Beträge und alle topographischen Korrekturen fast genau um 1%. Damit geht vor allem der Koeffizient in (17):  $0,0418 = 0,1543 - 0,1125$  über in:  $0,1543 - 0,1114 = 0,0429$  und die Helmer tischen Durchschnittswerte der Schwere in den Lotlinien berechnen sich aus:

$$\bar{g}' = g_{P'} + 0,0429 H_m \text{ mgal.} \quad . . . (18)$$

Sie sind also um  $0,0015 H_m$  mgal größer als die bisher mit dem Koeffizienten  $0,0414$  berechneten Werte und bewirken in den vertikalen dynamischen Korrekturen eine Änderung von nur  $0,0015 H_m$  mm!

*Anmerkung der Redaktion:* Vorstehende Arbeit, die auf der Tagung der Internationalen Kommission für das Europäische Höhennetz, Florenz, Mai 1955, in einer beschränkten Anzahl von Exemplaren zur Verteilung gelangte, wurde hier über wiederholtes Verlangen vollständig wortgetreu zum Abdruck gebracht.

## Die analytische Lösung der Probleme von Snellius und Hansen mit Hilfe der Transformation durch reziproke Radien

Von L. Starkl, Wels

Eine neue Behandlung dieser beiden klassischen geodätischen Aufgaben mag in jüngster Gegenwart geradezu als Anachronismus erscheinen, da über diesen Problembereich bereits eine sehr umfangreiche Literatur vorhanden ist. In diesem Zusammenhang soll besonders auf die interessante Studie „Beiträge zur Berechnung des Rückwärtseinschnittes“ im Sonderheft 14 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen, Festschrift Eduard Doležal, von Herrn Prof. Dr. A. Tarczy-Hornoch hingewiesen werden, welcher dort die verschiedenen bisherigen Lösungen einer kritischen Betrachtung unterzogen und selbst vereinfachte Herleitungen der Delambreschen Gleichung angegeben hat.

Im Sinne eines besonders in der letzten Zeit betonten ökonomischen Prinzipes in den technischen Wissenschaften soll in der vorliegenden Studie den bekannten und teilweise recht umständlichen Ableitungen eine elegante und durchsichtige Lösung der beiden Probleme hinzugefügt werden.

Die Anwendung der Transformation durch reziproke Radien bzw. einer Inversion bei der Lösung dieser Aufgaben ergibt vergleichsweise eine außergewöhnlich einfache Herleitung der zum Teil bekannten Gebrauchsformeln. Stellt

$$r = r(\varphi) \quad . . . (1)$$

eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve dar, so vermittelt die Beziehung

$$\rho = 1/r \quad . . . (2)$$

eine Transformation der Kurve (1) durch reziproke Radien oder eine Inversion bzw. eine Spiegelung am Einheitskreis. Eine solche Abbildung ist kreis- und winkeltreu. Kreise und Gerade (Kreise der Krümmung Null), die nicht durch den Transformationsnullpunkt gehen, werden in Kreise verwandelt.

$$\text{Kreise und Gerade, die durch den Transformationsnullpunkt gehen, verwandeln sich in Gerade.} \quad . . . (3)$$

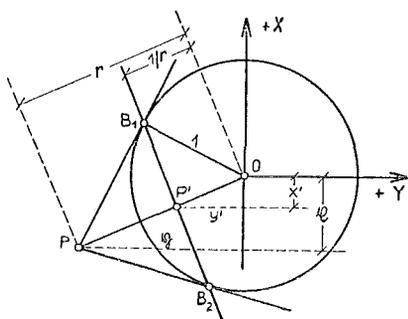


Abb. 1

Die letztere Tatsache bildet den Ausgangspunkt für die mitzuteilenden Entwicklungen. Der Vollständigkeit halber soll die bekannte Konstruktion von  $1/r$  angegeben werden: Wenn vom Punkt  $P(x, y)$  an den Einheitskreis um den Transformationsnullpunkt die Tangenten gezogen werden, dann trifft die Verbindungsgerade der Berührungspunkte  $B_1$  und  $B_2$  den Radiusvektor in dem zu  $P(x, y)$  inversen Punkt  $P'(x', y')$ .

Die wechselseitigen Beziehungen zwischen den Koordinaten der Punkte  $P(x, y)$  und  $P'(x', y')$  werden durch die Formelgruppe

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{x^2 + y^2} & y' &= \frac{y}{x^2 + y^2} \\ x &= \frac{x'}{x'^2 + y'^2} & y &= \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \end{aligned} \quad \dots \quad (4)$$

hergestellt.

Das Snellius'sche und das Hansen'sche Problem sind eng verwandt, da es sich hierbei um die Lösung von Vierecksaufgaben handelt, wobei jeweils 5 unabhängige Bestimmungsstücke bekannt sind. Aus diesem Grunde wird die Abb. 2 der Behandlung beider Probleme zugrunde gelegt. Beim Snellius'schen Problem sind die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  im Neupunkt 4 gemessen, während beim Hansen'schen Problem z. B. die Winkel  $\gamma$  und  $\delta$  im Neupunkt 1 sowie die Winkel  $\epsilon$  und  $\varphi$  im Neupunkt 3 gemessen sind. Die geometrische Lösung der Aufgabe des Rückwärtseinschnittes hat davon auszugehen, daß der Neupunkt 4 im Schnitt zweier Kreise  $K_1$  und  $K_2$  liegt, welche über den Sehnen  $\overline{12}$  bzw.  $\overline{23}$  die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  als Peripheriewinkel enthalten. Diese beiden Kreise, welche auch als Kreise mit den Peripheriewinkeln  $(\gamma + \delta)$  bzw.  $(\epsilon + \varphi)$  über der Sehne  $\overline{24}$  aufgefaßt werden können, stellen gleichzeitig beim Hansen'schen Problem zwei erste geometrische Örter für die Lage der Neupunkte 1 und 3 dar. Durch Antragen der Winkel  $\varphi$  und  $\delta$  bei 2 und der Winkel  $\epsilon$  und  $\gamma$  bei 4 gegen die Strecke  $\overline{24}$  ergeben sich die beiden Collins'schen Hilfspunkte  $C_1$  und  $C_2$ . Wie in der Folge gezeigt wird, ist es für die analytische Darstellung am günstigsten, wenn als weitere geometrischen Örter für die Lage der Neupunkte 1 und 3 die beiden Kreise  $K_3$  und  $K_4$  gewählt werden, welche über den Sehnen  $\overline{2C_1}$  und  $\overline{2C_2}$  die Peripheriewinkel  $\gamma$  bzw.  $\epsilon$  enthalten. Man erhält auf diese Weise ein Kreisbündel durch den in beiden Fällen als Festpunkt anzusehenden Punkt 2.

Wird der Festpunkt 2 als Inversionszentrum gewählt, dann wird dieses Kreisbündel gemäß der Beziehung (3) in einzelne Gerade transformiert, wobei sich je 2 Gerade in den inversen Hilfspunkten  $4'$  bzw.  $1'$  und  $3'$  schneiden. Durch reziproke Spiegelung dieser Hilfspunkte am Einheitskreis werden unmittelbar die gesuchten Neupunkte 4 bzw. 1 und 3 erhalten. Die Kreise  $K_1$  bis  $K_4$  schneiden den Einheitskreis um den Festpunkt 2 in je zwei transformationsinvarianten Schnittpunkten, deren Verbindungslinien die durch die Inversion erzeugten Geraden darstellen.

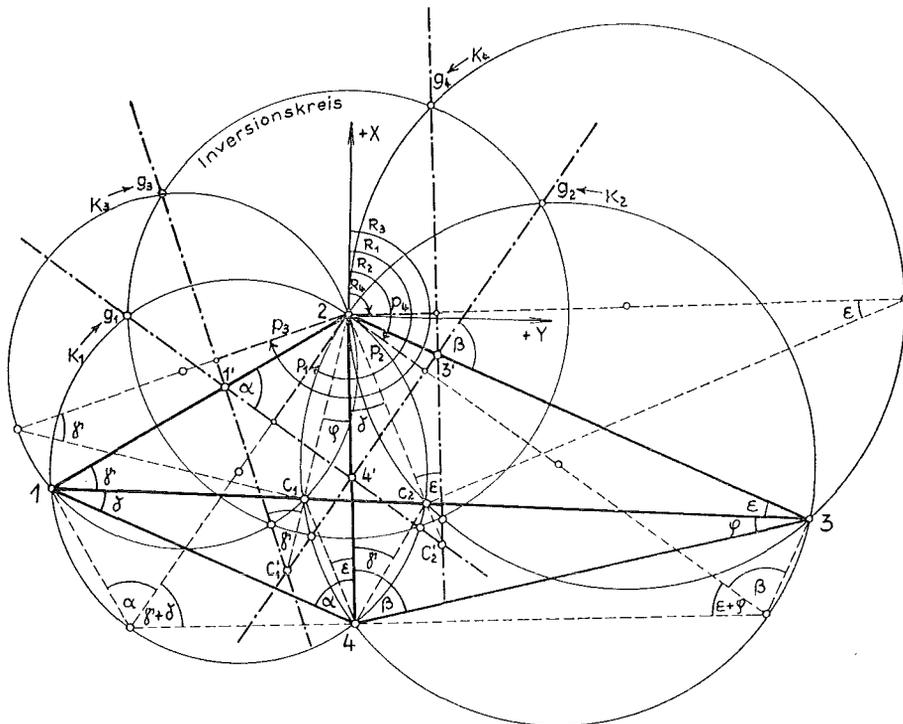


Abb. 2

Die Gleichungen dieser Geraden  $g_n$  sind in bezug auf ein geodätisches Koordinatensystem im Inversionszentrum 2 allgemein durch

$$x' \cdot \cos R_n + y' \cdot \sin R_n - p_n = 0 \quad \dots (5)$$

gegeben, wenn  $R_n$  die Richtungswinkel der vom Festpunkt 2 auf die Geraden  $g_n$  gefällten Perpendikel  $p_n$  darstellt.

Die Richtungswinkel  $R_n$  sind aus der Abb. 2 unmittelbar zu entnehmen mit

$$\begin{aligned} R_1 &= \nu_{21} - (90 - \alpha) = \nu_{24} + [90 - (\gamma + \delta)] \\ R_2 &= \nu_{23} + (90 - \beta) = \nu_{24} - [90 - (\epsilon + \varphi)] \\ R_3 &= \nu_{24} + [90 - (\gamma - \varphi)] \\ R_4 &= \nu_{24} - [90 - (\epsilon - \delta)] \end{aligned} \quad \dots (6)$$

Unter Beachtung der Reziprozitätsbeziehungen in Abb. 2 erhält man für die Strecken

$$\overline{21'} = 1/s_{12}, \quad \overline{23'} = 1/s_{23}, \quad \overline{24'} = 1/s_{24}, \quad \overline{2 C_1'} = 1/2 C_1, \quad \overline{2 C_2'} = 1/2 C_2 \quad \dots (7)$$

Für die Strecken  $\overline{2 C_1}$  und  $\overline{2 C_2}$  werden mit dem Sinussatz aus den Dreiecken  $\triangle 2 C_1 4$  und  $\triangle 2 C_2 4$  die Werte

$$\overline{2 C_1} = \frac{\sin \epsilon \cdot s_{24}}{\sin (\epsilon + \varphi)} \quad \overline{2 C_2} = \frac{\sin \gamma \cdot s_{24}}{\sin (\gamma + \delta)} \quad \dots (8)$$

erhalten. Die Winkelbeziehungen in Abb. 2 ergeben mit den Strecken unter (7)

$$\begin{aligned} p_1 &= \overline{21'} \cdot \sin \alpha = \overline{24'} \cdot \sin (\gamma + \delta), & p_2 &= \overline{23'} \cdot \sin \beta = \overline{24'} \cdot \sin (\epsilon + \varphi) \\ p_3 &= \overline{2 C_1'} \cdot \sin \gamma & p_4 &= \overline{2 C_2'} \cdot \sin \epsilon \end{aligned} \quad \dots (9)$$

Mit (7) und (8) resultiert aus (9) die endgültige formelmäßige Darstellung der Perpendikel  $p_n$ :

$$p_1 = \frac{\sin \alpha}{s_{12}} = \frac{\sin (\gamma + \delta)}{s_{24}} \quad p_2 = \frac{\sin \beta}{s_{23}} = \frac{\sin (\varepsilon + \varphi)}{s_{24}} \quad \dots \quad (10)$$

$$p_3 = \frac{\sin \gamma \cdot \sin (\varepsilon + \varphi)}{\sin \varepsilon \cdot s_{24}} \quad p_4 = \frac{\sin \varepsilon \cdot \sin (\gamma + \delta)}{\sin \gamma \cdot s_{24}}$$

Mit (6) und (10) ergeben sich nach (5) die Gleichungen der Geraden  $g_n$ , wobei für  $g_1$  und  $g_2$  je zwei Gleichungen erhalten werden, deren erste Gruppe dem Snelliusschen Problem zugeordnet ist, während die zweite Gruppe bei der analytischen Lösung der Hansen'schen Aufgabe verwendet wird.

Snellius: (11)

$$g_1 : x' (\cos v_{21} \sin \alpha + \sin v_{21} \cos \alpha) + y' (\sin v_{21} \sin \alpha - \cos v_{21} \cos \alpha) - \frac{\sin \alpha}{s_{12}} = 0$$

$$g_2 : x' (\cos v_{23} \sin \beta - \sin v_{23} \cos \beta) + y' (\sin v_{23} \sin \beta + \cos v_{23} \cos \beta) - \frac{\sin \beta}{s_{23}} = 0$$

Hansen: (12)

$$g_1 : x' [\cos v_{24} \sin (\gamma + \delta) - \sin v_{24} \cos (\gamma + \delta)] +$$

$$+ y' [\sin v_{24} \sin (\gamma + \delta) + \cos v_{24} \cos (\gamma + \delta)] - \frac{\sin (\gamma + \delta)}{s_{24}} = 0$$

$$g_2 : x' [\cos v_{24} \sin (\varepsilon + \varphi) + \sin v_{24} \cos (\varepsilon + \varphi)] +$$

$$+ y' [\sin v_{24} \sin (\varepsilon + \varphi) - \cos v_{24} \cos (\varepsilon + \varphi)] - \frac{\sin (\varepsilon + \varphi)}{s_{24}} = 0$$

$$g_3 : x' [\cos v_{24} \sin (\gamma - \varphi) - \sin v_{24} \cos (\gamma - \varphi)] +$$

$$+ y' [\sin v_{24} \sin (\gamma - \varphi) + \cos v_{24} \cos (\gamma - \varphi)] - \frac{\sin \gamma \sin (\varepsilon + \varphi)}{s_{24} \cdot \sin \varepsilon} = 0$$

$$g_4 : x' [\cos v_{24} \sin (\varepsilon - \delta) + \sin v_{24} \cos (\varepsilon - \delta)] +$$

$$+ y' [\sin v_{24} \sin (\varepsilon - \delta) - \cos v_{24} \cos (\varepsilon - \delta)] - \frac{\sin \varepsilon \sin (\gamma + \delta)}{s_{24} \cdot \sin \gamma} = 0$$

Die Gleichungen (11) werden der Reihe nach mit

$$s_{12}/\sin \alpha, \quad s_{23}/\sin \beta$$

und die Gleichungen (12) ebenso mit

$$s_{24}/\sin (\gamma + \delta), \quad s_{24}/\sin (\varepsilon + \varphi), \quad s_{24}/\sin (\gamma - \varphi), \quad s_{24}/\sin (\varepsilon - \delta)$$

multipliziert. Die derart erhaltenen linearen Glieder der Geradengleichungen  $g_3$  und  $g_4$  sind außerdem im Zähler und Nenner durch

$$\sin \gamma \sin \varepsilon \sin \varphi \quad \text{bzw.} \quad \sin \gamma \sin \varepsilon \sin \delta$$

zu dividieren. Die Gleichungen (11) und (12) gewinnen durch diese einfache Umformung folgende Gestalt:

$$g_1 : x' (\mathfrak{x}_{21} + \mathfrak{y}_{21} \cot \alpha) + y' (\mathfrak{y}_{21} - \mathfrak{x}_{21} \cot \alpha) - 1 = 0 \quad \dots \quad (13)$$

$$g_2 : x' (\mathfrak{x}_{23} - \mathfrak{y}_{23} \cot \beta) + y' (\mathfrak{y}_{23} + \mathfrak{x}_{23} \cot \beta) - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 g_1 : x' [\varepsilon_{24} - y_{24} \cot(\gamma + \delta)] + y' [y_{24} + \varepsilon_{24} \cot(\gamma + \delta)] - 1 &= 0 \dots (14) \\
 g_2 : x' [\varepsilon_{24} + y_{24} \cot(\varepsilon + \varphi)] + y' [y_{24} - \varepsilon_{24} \cot(\varepsilon + \varphi)] - 1 &= 0 \\
 g_3 : x' [\varepsilon_{24} - y_{24} \cot(\gamma - \varphi)] + y' [y_{24} + \varepsilon_{24} \cot(\gamma - \varphi)] - \frac{\cot \varphi + \cot \varepsilon}{\cot \varphi - \cot \gamma} &= 0 \\
 g_4 : x' [\varepsilon_{24} + y_{24} \cot(\varepsilon - \delta)] + y' [y_{24} - \varepsilon_{24} \cot(\varepsilon - \delta)] - \frac{\cot \delta + \cot \gamma}{\cot \delta - \cot \varepsilon} &= 0
 \end{aligned}$$

Die Diskussion der Gleichungsgruppen (13) und (14) wird anschließend getrennt nach Rückwärtseinschneiden und Punktpaarbestimmung weitergeführt.

a) Rückwärtseinschneiden

Mit Einführung der allgemein gebräuchlichen Bezeichnungen  $M_1, N_1, M_2, N_2$  für die Koeffizienten der Unbekannten in den Gleichungen (13) erhält man

$$\begin{aligned}
 x' \cdot M_1 + y' \cdot N_1 - 1 &= 0 \\
 x' \cdot M_2 + y' \cdot N_2 - 1 &= 0 \dots (15)
 \end{aligned}$$

Die Auflösung nach Determinanten ergibt für die Koordinaten des inversen Hilfspunktes 4' die Werte

$$x_{4'} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & N_1 \\ 1 & N_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \qquad y_{4'} = \frac{\begin{vmatrix} M_1 & 1 \\ M_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D} \dots (16)$$

Mit der zweiten Gleichungsgruppe aus (4) resultieren sofort die Koordinaten des Neupunktes 4 zu

$$\varepsilon_{24} = \frac{D_x \cdot D}{D_x^2 + D_y^2} = Q \cdot D_x \qquad y_{24} = \frac{D_y \cdot D}{D_x^2 + D_y^2} = Q \cdot D_y \qquad (17)$$

Diese neue Auffassung führt das Rückwärtseinschneiden unmittelbar auf einen einzigen Vorwärtsschnitt zurück, während das Problem nach der Collins'schen Lösung auf zwei Vorwärtsschnitte bzw. einen Vorwärts- und einen Seitwärtsschnitt und nach der Cassini'schen Lösung auf zwei Vorwärtsschnitte und das Fällen eines Lotes zurückgeführt erscheint.

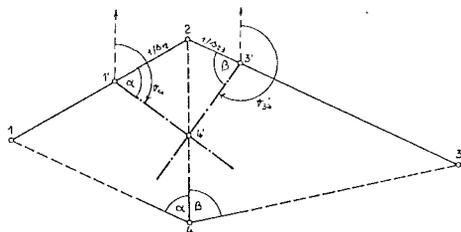


Abb. 3

Der inverse Hilfspunkt 4' wird von den mittels (4) gerechneten, inversen Hilfspunkten 1' und 3' aus, mit den Richtungswinkeln

$$\begin{aligned}
 \gamma_{14'} &= \gamma_{12} + \alpha \\
 \gamma_{34'} &= \gamma_{32} - \beta
 \end{aligned}$$

vorwärtseingeschnitten und dann reziprok transformiert.

b) Punktpaarbestimmung

Die Gleichungsgruppe (14) wird mit Benützung der Additionstheoreme für die Cotangenten der Summe bzw. der Differenz von zwei Winkeln umgeformt. Man erhält auf diese Weise bei gleichzeitigem Verzicht auf die Indexschreibung bei den Koordinatendifferenzen  $\varepsilon_{24}$  und  $y_{24}$  die Gleichungen (18)

$$\begin{aligned}
 & x' [\mathfrak{x} (\cot \delta + \cot \gamma) - \mathfrak{y} (\cot \gamma \cot \delta - 1)] + \\
 & \quad + y' [\mathfrak{y} (\cot \delta + \cot \gamma) + \mathfrak{x} (\cot \gamma \cot \delta - 1)] - (\cot \delta + \cot \gamma) = 0 \\
 & x' [\mathfrak{x} (\cot \varphi + \cot \varepsilon) + \mathfrak{y} (\cot \varepsilon \cot \varphi - 1)] + \\
 & \quad + y' [\mathfrak{y} (\cot \varphi + \cot \varepsilon) - \mathfrak{x} (\cot \varepsilon \cot \varphi - 1)] - (\cot \varphi + \cot \varepsilon) = 0 \\
 & x' [\mathfrak{x} (\cot \varphi - \cot \gamma) - \mathfrak{y} (\cot \gamma \cot \varphi + 1)] + \\
 & \quad + y' [\mathfrak{y} (\cot \varphi - \cot \gamma) + \mathfrak{x} (\cot \gamma \cot \varphi + 1)] - (\cot \varphi + \cot \varepsilon) = 0 \\
 & x' [\mathfrak{x} (\cot \delta - \cot \varepsilon) + \mathfrak{y} (\cot \varepsilon \cot \delta + 1)] + \\
 & \quad + y' [\mathfrak{y} (\cot \delta - \cot \varepsilon) - \mathfrak{x} (\cot \varepsilon \cot \delta + 1)] - (\cot \delta + \cot \gamma) = 0
 \end{aligned}$$

Durch zweckmäßige Zusammenfassung der Glieder in den Koeffizienten der Unbekannten findet man

$$\begin{aligned}
 & x' [(\mathfrak{y} + \mathfrak{x} \cot \delta) + (\mathfrak{x} - \mathfrak{y} \cot \delta) \cot \gamma] + \\
 & \quad + y' [-(\mathfrak{x} - \mathfrak{y} \cot \delta) + (\mathfrak{y} + \mathfrak{x} \cot \delta) \cot \gamma] - (\cot \delta + \cot \gamma) = 0 \\
 & x' [-(\mathfrak{y} - \mathfrak{x} \cot \varphi) + (\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \cot \varphi) \cot \varepsilon] + \\
 & \quad + y' [(\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \cot \varphi) + (\mathfrak{y} - \mathfrak{x} \cot \varphi) \cot \varepsilon] - (\cot \varphi + \cot \varepsilon) = 0 \\
 & x' [-(\mathfrak{y} - \mathfrak{x} \cot \varphi) - (\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \cot \varphi) \cot \gamma] + \\
 & \quad + y' [(\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \cot \varphi) - (\mathfrak{y} - \mathfrak{x} \cot \varphi) \cot \gamma] - (\cot \varphi + \cot \varepsilon) = 0 \\
 & x' [(\mathfrak{y} + \mathfrak{x} \cot \delta) - (\mathfrak{x} - \mathfrak{y} \cot \delta) \cot \varepsilon] + \\
 & \quad + y' [-(\mathfrak{x} - \mathfrak{y} \cot \delta) - (\mathfrak{y} + \mathfrak{x} \cot \delta) \cot \varepsilon] - (\cot \delta + \cot \gamma) = 0 \\
 & \quad \quad \quad \dots (19)
 \end{aligned}$$

Setzt man in (19)

$$\begin{aligned}
 & (\mathfrak{y} + \mathfrak{x} \cot \delta) = a_1 & - (\mathfrak{y} - \mathfrak{x} \cot \varphi) = a_2 \\
 & - (\mathfrak{x} - \mathfrak{y} \cot \delta) = b_1 & (\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \cot \varphi) = b_2 & \dots (20) \\
 & (\cot \delta + \cot \gamma) = c_1 & (\cot \varphi + \cot \varepsilon) = c_2
 \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_1}{c_1} = \mathfrak{A}_1 & \frac{a_2}{c_2} = \mathfrak{A}_2 \\
 & \frac{b_1}{c_1} = \mathfrak{B}_1 & \frac{b_2}{c_2} = \mathfrak{B}_2 & \dots (21)
 \end{aligned}$$

dann können die Geradengleichungen in der Form

$$\begin{aligned}
 & x' (\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1 \cot \gamma) + y' (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_1 \cot \gamma) - 1 = 0 \\
 & x' (\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 \cot \varepsilon) + y' (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2 \cot \varepsilon) - 1 = 0 \\
 & x' (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2 \cot \gamma) + y' (\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_2 \cot \gamma) - 1 = 0 & \dots (22) \\
 & x' (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 \cot \varepsilon) + y' (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1 \cot \varepsilon) - 1 = 0
 \end{aligned}$$

geschrieben werden. Für die Koeffizienten der Unbekannten werden die abkürzenden Bezeichnungen  $A_n$  und  $B_n$  gewählt, wodurch die Gleichungen der Geraden  $g_1$  bis  $g_4$  in der allgemeinen Form erscheinen.

$$\begin{aligned}
 g_1: & A_1 \cdot x' + B_1 \cdot y' - 1 = 0 \\
 g_2: & A_2 \cdot x' + B_2 \cdot y' - 1 = 0 \\
 g_3: & A_3 \cdot x' + B_3 \cdot y' - 1 = 0 & \dots (23) \\
 g_4: & A_4 \cdot x' + B_4 \cdot y' - 1 = 0
 \end{aligned}$$

Die inversen Hilfspunkte 1' bzw. 3' werden als Schnitte der Geraden  $g_1$  und  $g_3$  bzw.  $g_2$  und  $g_4$  erhalten. Für die Koordinaten dieser Hilfspunkte resultieren somit aus (23) die Werte

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & B_1 \\ 1 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{C_3} & y_1' &= \frac{\begin{vmatrix} A_1 & 1 \\ A_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{C_3} \\ x_3' &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & B_2 \\ 1 & B_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix}} = \frac{D_3}{C_4} & y_3' &= \frac{\begin{vmatrix} A_2 & 1 \\ A_4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix}} = \frac{D_4}{C_4} \end{aligned} \quad \dots (24)$$

Vermöge der zweiten Gleichungsgruppe (4) liefert die Inversion von (24) die Koordinaten der beiden Neupunkte mit

$$\begin{aligned} \varkappa_{21} &= \frac{D_1 \cdot C_3}{D_1^2 + D_2^2} = Q_1 \cdot D_1 & \varkappa_{21} &= \frac{D_2 \cdot C_3}{D_1^2 + D_2^2} = Q_1 \cdot D_2 \\ \varkappa_{23} &= \frac{D_3 \cdot C_4}{D_3^2 + D_4^2} = Q_2 \cdot D_3 & \varkappa_{23} &= \frac{D_4 \cdot C_4}{D_3^2 + D_4^2} = Q_2 \cdot D_4 \end{aligned} \quad \dots (25)$$

Mit den Formeln (20) bis (25) findet auch das Hansen'sche Problem seine geschlossene analytische Lösung, welche besonders für die Maschinenrechnung geeignet erscheint. Die Koordinaten der beiden Neupunkte sind in Funktion der Koordinatendifferenzen beider Festpunkte und der Cotangenten der vier gemessenen Winkel ausgedrückt.

## Ein optisches Gerät zur Messung von Höhenunterschieden

Von Dr. K. Killian

In vorliegender Veröffentlichung ist ein meines Wissens nach neues optisches Gerät zur Messung von Höhenunterschieden behandelt. Es gestattet, Höhenunterschiede zwischen dem Standpunkt und den Neupunkten zu messen. Horizontale Visuren werden dabei nicht vorausgesetzt, dennoch können die Entfernungen zu den Neupunkten unbekannt sein und werden nicht gebraucht. Nur zur Berücksichtigung der Refraktion und der Erdkrümmung ist eine genäherte Kenntnis der Entfernungen notwendig. Sieht man zunächst von Refraktion und Erdkrümmung ab, so besteht nämlich nach der unten beschriebenen Art der Messung kein funktioneller Zusammenhang zwischen Höhenunterschied und Entfernung. Beim trigonometrischen Höhenmessen hingegen ergibt sich der Höhenunterschied bekanntlich direkt proportional der Entfernung. Das genannte Gerät wird zweckmäßig Verwendung finden zur terrestrischen Höhenbestimmung von Punkten, wenn die Horizontal-Koordinaten aus Luftbildern bestimmt werden, sowie zur höhenmäßigen Ergänzung von Katasterplänen und anderen speziellen geodätischen Aufgaben.

### Grundgedanke

Zur Beschreibung der Idee, die dem Aufbau des Gerätes zugrundeliegt, gehen wir zunächst von zwei im Gelände gegebenen Beobachtungsstandpunkten  $A$  und  $B$