

Paper-ID: VGI_195816



Die Berechnung der vertikalen dynamischen Korrekturen

Karl Ledersteger ¹

¹ *Technische Hochschule Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **46** (5), S. 129–136

1958

BibTeX:

```
@ARTICLE{Ledersteger_VGI_195816,  
  Title = {Die Berechnung der vertikalen dynamischen Korrekturen},  
  Author = {Ledersteger, Karl},  
  Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {129--136},  
  Number = {5},  
  Year = {1958},  
  Volume = {46}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. R o h r e r
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. L e g o und o. Prof. Hofrat Dr. phil. K. L e d e r s t e g e r

Nr. 5

Baden bei Wien, Ende Oktober 1958

XLVI. Jg.

Die Berechnung der vertikalen dynamischen Korrekturen

Von Karl L e d e r s t e g e r, Wien

(Vorgelegt der Commission Internationale des Nivellements Européens, Réunion de Florence,
22. bis 28. Mai 1955)

Zusammenfassung: Ein kritischer Vergleich der beiden bisherigen Verfahren zur Berechnung des Durchschnittswertes der Schwere in den Lotlinien von Niethammer und Mader zeigt, daß die topographische Korrektur besser nach Niethammer ermittelt wird, während der wichtigste Fortschritt bei Mader im Abgehen vom Modell der unendlichen Platte gelegen ist. Es wird ein in seinen Auswirkungen dem Maderschen ähnliches Modell empfohlen, das über einen Umkreis von 30 oder 40 km hinaus die fehlende topographische Korrektur durch einen schematischen Geländeabfall ersetzt. Jedes endliche Modell erfordert aber eine Berücksichtigung der geänderten Wirkung der negativen isostatischen Kompensationsmassen, wodurch wieder eine Annäherung an die unendliche Platte erfolgt. Die Wirkung dieses neuen, isostatisch korrigierten Modelles läßt sich schließlich auf eine Vergrößerung des bekannten Koeffizienten der Helmertschen Gebirgsreduktion um 15 oder besser um $18 \cdot 10^{-4} H_m$ mgal zurückführen.

Summary: A critical comparison of the two methods of Niethammer and Mader for calculation of the average g in the plumb lines shows, that the topographical correction better is gained according to Niethammer, while the most important progress according to Mader may be seen in the abandonment of the fictitious infinite plateau. A new model in its effect similar to Mader's is recommended; the topographical correction is calculated for a circuit of 30 or 40 km and beyond compensated by a schematic descent of terrain. Each finite model demands a consideration of the changed effect of the negative isostatic masses again involving an approach to the unfinite plateau. The effect of this new isostatically corrected model finally can be reduced to an enlargement of the known coefficient of Helmert's reduction by 15 or better by $18 \cdot 10^{-4} H_m$ mgal.

Da die Internationale Assoziation für Geodäsie auf der 10. Generalversammlung der UGGI in Rom im September 1954 beschlossen hat, die Ausgleichung des europäischen Höhennetzes auf Grund des Gravitationspotentials vorzunehmen (Resolution Nr. 5), werden vorerst die ausgeglichenen Werte der dynamischen Höhen H' vorliegen, die mittels der „Vertikalen Dynamischen Korrekturen“ VDK vermöge

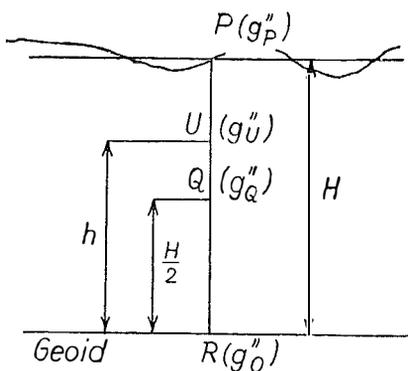
$$H = H' - \int_0^H \frac{g - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} dh \quad . . . (1)$$

in die orthometrischen Höhen H übergeführt werden können. Dieses Integral kann ohne hypothetische Annahmen nicht ausgewertet werden und es ist daher von Interesse, die bisherigen Lösungsversuche kritisch und systematisch zu untersuchen, woraus sich vielleicht Möglichkeiten zu einer bequemeren oder besseren Approximation ergeben. Die folgende Untersuchung bezweckt vor allem einen vertieften Einblick in die Zusammenhänge und Genauigkeiten der vorhandenen Lösungen, besonders aber die Rechtfertigung, aber auch die Verbesserung eines neuen Vorschlages, den ich in einem demnächst erscheinenden Aufsatz¹⁾ gemacht habe.

Auf jeden Fall wird man die oberhalb des Geoides liegenden Massen als homogen voraussetzen und für ihre konstante Dichte am besten den Wert 2,67 wählen. Sodann wird man die Schwerebeschleunigung in zwei Teile zerlegen, indem man für diese Massen ein der mathematischen Behandlung leicht zugängliches Modell wählt und die Abweichungen davon als „topographische Korrektur“ T erfaßt. Bezeichnet nun g_P' den Schwerewert, den man bei einer dem angenommenen Modell entsprechenden Geländeform in einem Oberflächenpunkt P beobachten würde, so stellt die topographische Korrektur die Verbesserung der Wirklichkeit auf den Idealfall dar:

$$g_P' = g_P + T_P, \quad . . . (2)$$

welche Gleichung natürlich auch ebenso für den laufenden Punkt U in der Lotlinie der Station P gelten muß. Da diese Zerlegung an sich willkürlich ist, legte man bisher meistens das einfachste Modell, die unendliche ebene Platte zugrunde. Dieses Modell



(Fig. 1) ist aber streng linear, d. h. die reine Modellschwere $g_U''(H, h)$ ist eine lineare Funktion der Höhe h des laufenden Punktes U :

$$g_U'' = 2 \pi k^2 \vartheta (2h - H)_m \text{ mgal}, \quad . . . (3)$$

worin wegen

$$k^2 = 66,75 \cdot 10^{-9} \text{ CGS}, \quad \vartheta = 2,70^2)$$

gilt:

$$2 \pi k^2 \vartheta = 0,11324 \text{ mgal/m}. \quad . . . (4)$$

¹⁾ K. Ledersteger: Der Schwereverlauf in den Lotlinien und die Berechnung der wahren Geoidschwere, inzwischen erschienen in Festschrift W. A. Heiskanen, Veröff. des Finnischen Geodät. Inst. Nr. 46, Helsinki 1955.

²⁾ Dieser früher allgemein angenommene Wert wird hier des leichteren Vergleiches wegen beibehalten!

Damit läßt sich die vertikale dynamische Korrektur schreiben

$$VDK = \int_0^H \frac{g_U - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} dh = \int_0^H \frac{g_U' - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} dh - \frac{1}{\gamma_{45}} \int_0^H T_U \cdot dh \quad \dots \quad (5)$$

Wegen der Linearität der Freiluftreduktion verläuft auch g' linear

$$g_U' = g_P' + 0,3086 (H - h)_m \text{ mgal} + (g_U'' - g_P'') \quad \dots \quad (6)$$

und der Durchschnittswert \bar{g}' der idealen Schwere in der Lotlinie fällt mit dem Wert in ihrem Mittelpunkt Q ($h = H/2$; $g_Q'' = 0$) zusammen

$$\begin{aligned} \bar{g}' = g_Q' &= g_P' + (0,1543 - 0,1132) H_m \text{ mgal} = \\ &= g_P' + 0,0411 H_m \text{ mgal.} \quad \dots \quad (7) \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort für das Hauptglied von (5)

$$\int_0^H \frac{g_U' - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} dh = \frac{\bar{g}' - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \cdot H \quad \dots \quad (8)$$

Vernachlässigt man die topographische Reduktion T vollständig, setzt also fiktiv $g_P = g_P'$, so haben wir mit (8) bereits die „Helmertsche Gebirgsreduktion“ gefunden.

Wirklich aber wird die topographische Reduktion T im allgemeinen sicher nicht linear verlaufen und man muß daher ganz im Sinne Niethammers³⁾ die topographische Korrektur \bar{T} des Durchschnittswertes der Schwere g'' streng durch die Gleichung

$$\int_0^H T_U dh = \bar{T} H \quad \dots \quad (9)$$

definieren. Gemäß (2) und (7) erhält man also für den Durchschnittswert der wahren Schwere in der Lotlinie

$$\bar{g} = g_P + 0,0411 H_m \text{ mgal} + (T_P - \bar{T}), \quad \dots \quad (10)$$

Nimmt man aber mit Mader⁴⁾ genähert auch für T_U einen linearen Verlauf in der Lotlinie an, so wird

$$\bar{T} \doteq \frac{1}{2} (T^P + T_0), \quad \dots \quad (11)$$

wobei T_0 die topographische Korrektur des Schwerewertes g_0 auf dem Geoid bedeutet, und man findet

$$\bar{g} \doteq g_P + 0,0411 H_m \text{ mgal} + \frac{1}{2} (T_P - T_0) \quad \dots \quad (10a)$$

Um die Vernachlässigung dieser Näherung an einem konkreten Beispiel verfolgen zu können, entnehmen wir der Arbeit Maders die nötigen Daten für den

³⁾ Th. Niethammer: Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen, Veröff. d. Schweizer. Geodät. Komm., Basel, 1932.

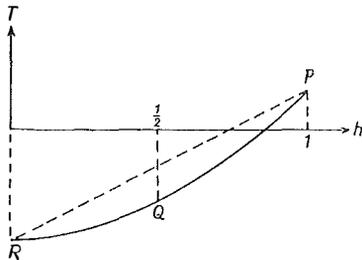
⁴⁾ K. Mader: Die orthometrische Schwerekorrektur des Präzisionsnivellements in den Hohen Tauern, Sonderheft 15 der Öst. ZfV, Wien, 1954.

Punkt Hochtörl ($H = 2504$ m), den höchsten Punkt der Glocknerstraße in den Hohen Tauern, wozu allerdings zu bemerken ist, daß Niethammer die topographischen Korrekturen für einen Umkreis von 42 km berechnet, während sich Mader mit 30 km begnügt. Wir werden daher, um den Vergleich korrekter durchführen zu können, Niethammers Zone XIII (33,0–42,0 km) und den halben Betrag der Zone XII (26,0–33,0) weglassen und erhalten so:

Niethammer:	Mader:
$T_P = + 7,07$ mgal;	$T_P = + 8,48$ mgal
$\bar{T} = - 14,82$	– 21,46
	$T_Q = - 12,98$
	– 9,71
	$T_0 = - 22,69$

Wie zu erwarten war, verläuft die topographische Korrektur tatsächlich nicht linear und die Korrekturglieder von (10) und (10a) unterscheiden sich daher auffallend:

Niethammer:	$T_P - \bar{T} = + 21,89$ mgal	
Mader:	$\frac{1}{2} (T_P - T_0) = + 15,59$	– 6,30



Natürlich läßt sich leicht zeigen, daß der Unterschied wirklich auf die von Mader vorausgesetzte Linearität von T zurückzuführen ist. Man braucht bloß durch die drei Punkte P , Q , R (Fig. 2) die Parabel

$$T = + 23,50 h^2 + 7,67 h - 22,69$$

zu legen und findet, da die Meereshöhe H von P als Einheit in der Abszissenachse gewählt wurde, durch Integration

$$\bar{T} = \int_0^H T \cdot dh = - 11,02. \quad \dots (12)$$

Damit aber tritt an Stelle von $+ 15,59$ die mit dem Niethammerschen Wert wesentlich besser übereinstimmende Korrektur

$$T_P - \bar{T} = + 8,48 + 11,02 = + 19,50. \quad \dots (13)$$

Die Madersche Berechnungsweise der topographischen Korrektur weist entschieden drei praktische Vorzüge gegenüber der strengeren Rechnung nach Niethammer auf. Sie liefert gleichzeitig den geophysikalisch wichtigen Schwerwert auf dem Geoid und sie vermeidet den bei der Berechnung von T auftretenden lästigen Vorzeichenwechsel, der in der üblichen Zerlegung des Geländes in Kreiszyylindersegmente von teils positiver, teils negativer Höhe begründet ist. Denn bei der Berechnung von T_0 können diese Segmente durchwegs negativ vom Meeresniveau abgezählt werden, was auf eine Vereinigung der topographischen Korrektur T_0 mit der nach oben gerichteten Anziehung der endlichen Platte von 30 km Ausdehnung hinausläuft. Dadurch genügt aber für die Berechnung beider Reduktionen T_P und T_0 eine einzige numerische Tabelle, worin der dritte Vorteil gegenüber der graphi-

schen Methode Niethammers gelegen ist. Strebt man aber höchste Präzision an, so wird man um die Berechnung des Durchschnittswertes \bar{T} nicht herumkommen.

Nach Niethammer, d. h. nach Formel (10) erhalten wir demnach für den Punkt Hochtor:

$$\begin{array}{r} g_P = 980.160,49 \text{ cm sec}^{-2} \\ 0,0411 H_m = + 102,91 \\ T_P - \bar{T} = + 21,89 \\ \hline g = 980.285,29 \text{ cm sec}^{-2}, \end{array} \quad \dots \quad (I)$$

während sich nach Mader unter der Annahme desselben Modelles der unendlichen Platte der um 6,30 mgal kleinere Wert 980.278,99 ergeben würde. Wird aber die topographische Reduktion nur bis zu einer Entfernung von 30 bzw. 42 km berücksichtigt, so wird, falls man von der Isostasie abstrahiert, gerade bei Hochgebirgspunkten mit der unendlichen Bouguerschen Platte entschieden zuviel abgezogen und (I) stellt ein Minimum dar. Niethammer⁵⁾ hat übrigens bereits selbst gezeigt, wie diesem Mangel abgeholfen werden kann, indem man unter Berücksichtigung der Erdkrümmung drei weitere Zonen bis zum Grenzkreis 188 km in die topographische Reduktion einbezieht.

Weitaus bequemer ist es aber, für die außerhalb des Grenzkreises der topographischen Reduktion liegenden Kontinentalmassen ein anderes lineares Modell zu wählen, das in einheitlicher Weise dem natürlichen Geländeabfall Rechnung trägt. Wird im vorhergehenden Falle ein Minimum erzielt, so gewinnt man ein Maximum, wenn man statt der unendlichen Platte nur die Wirkung einer endlichen Platte abzieht, deren Radius durch den Grenzkreis der topographischen Korrektur bestimmt ist. Dies heißt aber, daß die außerhalb liegenden Massen in ihrer Wirkung auf den laufenden Punkt unverändert bleiben sollen, d. h. gleichsam mit in die Tiefe genommen werden. Man erhält dann mit Mader eine sehr gute Approximation des Durchschnittswertes, wenn man das arithmetische Mittel aus diesen beiden Extremfällen bildet, also statt der unendlichen Platte die halbe Summe aus dieser und der endlichen Platte von 30 km Radius abzieht:

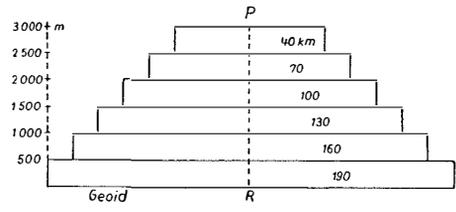
$$\begin{array}{r} g_P = 980.160,49 \text{ cm sec}^{-2} \\ 0,1543 H_m = + 386,37 \\ \frac{1}{2} \text{ unendl. Platte} = - 141,78 \\ \frac{1}{2} \text{ endl. Platte} = - 135,96 \\ \hline \text{Top. Korr.} = + 15,59 \\ \hline g = 980.284,71 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 21,89 \\ \hline 980.291,01. \end{array} \quad \dots \quad (II)$$

Der links stehende Wert ist genau nach Mader berechnet; die Änderung des Modelles kompensiert sich zufällig fast ganz mit dem Fehler der topographischen Korrektur.

5) Th. Niethammer: Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard, Astr.-geod. Arbeiten in der Schweiz, Band 20, Bern, 1939.

Der rechtsstehende Endwert ist mit der topographischen Korrektur nach Niethammer gewonnen; im Vergleich dieses Wertes mit (I) kommt der Einfluß des geänderten Modelles voll zur Geltung.

Wie in der unter (I) zitierten Arbeit näher ausgeführt wurde, läßt sich die Formel Maders auf ein fiktives Modell zurückführen, das demnach gewisse gedankliche Schwierigkeiten bietet. Um diese zu umgehen, andererseits aber doch der natürlichen



Basisverbreiterung möglichst gerecht zu werden, wurde dort ein anderes lineares Modell in Vorschlag gebracht, bei dem sich das Gelände aus 500 m dicken sphärischen Scheiben zusammensetzt, deren

Radien, an der Oberfläche mit 40 km beginnend, stufenweise um je 30 km zunehmen (Fig. 3). Wird die zugehörige Modellschwere wieder mit g'' bezeichnet, so erhält man zunächst für das idealisierte Gelände die Formel:

$$\bar{g}' = g_{P'} + 0,1543 H_m \text{ mgal} - \frac{1}{2} (g_{P''} - g_{0''}) \quad \dots (14)$$

Sobald man aber nicht mit der unendlichen Platte operiert, muß man im Durchschnittswert der Schwere auch die geänderte Wirkung der innerhalb des Geoides liegenden negativen Kompensationsmassen berücksichtigen. Hierzu wurde im 4. Abschnitt der erwähnten Arbeit die Pratt-Hayfordsche Isostasie in ihrer einfachsten Form nach Baeschlin⁶⁾ zugrunde gelegt; es wird angenommen, daß die Kompensation bei einer einheitlichen Tiefe von 100 km im Geoid beginnt. Für die Kompensationsmasse wurde ein Kreiszyylinder von 100 km Höhe mit dem Radius

$$R = \left[40 + 30 (H_{km} - 0,5) \right] \text{ km} \quad \dots (15)$$

angesetzt, wobei die Dichte $-0,027 H_{km}$ ist. In Tabelle 7 ist die verstärkte negative Wirkung der Kompensation auf den Geoidpunkt berechnet. Ihr halber Betrag tritt als isostatische Kompensation Δg zu (14) hinzu und man kann aus den Tabellen 4 und 7 die gesamte Korrektur des Durchschnittswertes g' aufaddieren:

$$C = 0,1543 H_m - \frac{1}{2} (g_{P''} - g_{0''}) + \Delta g \quad \dots (16)$$

So findet man:

H	$+ 0,1543 H$	$- \frac{1}{2} (g_{P''} - g_{0''})$	$+ \Delta g$	$=$	C	ΔC
500 m	$+ 77,150$	$- 56,266$	$- 0,131$	$+ 20,753$		$+ 20,928$
1000	$+ 154,300$	$- 112,128$	$- 0,491$	$+ 41,681$		$+ 20,969$
1500	$+ 231,450$	$- 167,767$	$- 1,023$	$+ 62,650$		$+ 20,990$
2000	$+ 308,600$	$- 223,254$	$- 1,706$	$+ 83,640$		$+ 21,012$
2500	$+ 385,750$	$- 278,625$	$- 2,473$	$+ 104,652$		$+ 21,040$
3000	$+ 462,900$	$- 333,903$	$- 3,305$	$+ 125,692$		

⁶⁾ C. F. Baeschlin: Lehrbuch der Geodäsie, Zürich 1948, Seite 328.

Da die Korrekturen C nur geringfügig von einem linearen Verlauf abweichen, kann man einen mittleren Gradienten bilden, indem man die Summe der C durch 10 500 dividiert: $+ 0,041816 H_m$ mgal.

Durch die isostatische Reduktion wird mithin das neue Modell wieder dem alten Modell der unendlichen Platte angenähert; denn für letztere entfällt bekanntlich eine isostatische Korrektur, weil die Wirkung einer unendlichen Platte von der Höhe des Aufpunktes über ihrer Oberfläche unabhängig ist. Mithin besteht der ganze Unterschied gegenüber der klassischen Methode von Helmert und Niethammer darin, daß sich der Koeffizient der Helmert-Reduktion um 0,0007 erhöht, was für 1000 m Meereshöhe erst 0,7 mgal ausmacht; an Stelle von (7) tritt:

$$\bar{g}' = g_P' + 0,0418 H_m \text{ mgal} . \quad . . . (17)$$

Dennoch dürfte das Ergebnis nicht wertlos sein: die an sich unbefriedigende Fiktion der unendlichen Platte ist durch ein plausibles Modell ersetzt worden, ohne daß sich die Rechnung im geringsten komplizierter gestaltet. Auch ist zu bedenken, daß sich die Differenz in der wahren Schwere auf dem Geoid doppelt auswirkt.

Da wir der obersten Platte in Fig. 3 den Radius 40 km erteilt haben, muß auch die topographische Reduktion des Durchschnittswertes für diesen Radius berechnet werden. Wir verwenden daher in unserem Beispiel die volle Reduktion nach Niethammer, die bis 42 km geht. Es ist $T_P = + 7,33$ mgal, $\bar{T} = - 15,45$ mgal und somit:

Unendliche Platte:	Modell Fig. 3:
$g_P = 980.160,49 \text{ cm sec}^{-2}$	$g_P = 980.160,49$
$0,0411 H_m = + 102,91$	$0,0418 H_m = + 104,67$
$T_P - \bar{T} = + 22,78$	$T_P - \bar{T} = + 22,78$ (III)
<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
$\bar{g} = 980.286,18$	$\bar{g} = 980.287,94,$

während die Helmert-Reduktion auf $\bar{g} = 980.263,40$ bzw. $980.265,16$ führt.

Mit $\gamma_{45} = 980.635$ finden wir nach (8) folgende vertikale dynamische Korrekturen:

Unendliche Platte:

Helmert:	$- 0,000 3789 H_m = - 0,9488 \text{ m}$	58,1 mm
Niethammer:	$- 0,000 3557 H_m = - 0,8907 \text{ m}$	

Modell Fig. 3:

Helmert:	$- 0,000 3771 H_m = - 0,9443 \text{ m}$	58,1 mm
Niethammer:	$- 0,000 3539 H_m = - 0,8862 \text{ m}$	

Wegen der Gleichheit der topographischen Reduktion ist der Fehler der Helmert-Reduktion beidemal gleich, und zwar 58,1 mm. Zu beachten ist noch, daß die Berechnung der vertikalen dynamischen Korrekturen mit den Meereshöhen erfolgen sollte, während aus dem künftigen Netzausgleich die in unserem Beispiel um rund 9 dm größere dynamische Höhe hervorgeht. Der Fehler, der hier nur etwa 0,35 mm beträgt, kann allgemein durch eine zweite Approximation getilgt werden.

Es wurde eingangs betont, daß derzeit 2,67 als bester Wert für die Krustendichte gilt und der frühere Wert 2,70 hier nur zwecks besserer Vergleichsmöglichkeit bei-

behalten wurde. Mit $\vartheta = 2,67$ verringern sich aber alle g'' -Beträge und alle topographischen Korrekturen fast genau um 1%. Damit geht vor allem der Koeffizient in (17): $0,0418 = 0,1543 - 0,1125$ über in: $0,1543 - 0,1114 = 0,0429$ und die Helmer tischen Durchschnittswerte der Schwere in den Lotlinien berechnen sich aus:

$$\bar{g}' = g_P' + 0,0429 H_m \text{ mgal.} \quad . . . (18)$$

Sie sind also um $0,0015 H_m$ mgal größer als die bisher mit dem Koeffizienten $0,0414$ berechneten Werte und bewirken in den vertikalen dynamischen Korrekturen eine Änderung von nur $0,0015 H_m$ mm!

Anmerkung der Redaktion: Vorstehende Arbeit, die auf der Tagung der Internationalen Kommission für das Europäische Höhennetz, Florenz, Mai 1955, in einer beschränkten Anzahl von Exemplaren zur Verteilung gelangte, wurde hier über wiederholtes Verlangen vollständig wortgetreu zum Abdruck gebracht.

Die analytische Lösung der Probleme von Snellius und Hansen mit Hilfe der Transformation durch reziproke Radien

Von L. Starkl, Wels

Eine neue Behandlung dieser beiden klassischen geodätischen Aufgaben mag in jüngster Gegenwart geradezu als Anachronismus erscheinen, da über diesen Problembereich bereits eine sehr umfangreiche Literatur vorhanden ist. In diesem Zusammenhang soll besonders auf die interessante Studie „Beiträge zur Berechnung des Rückwärtseinschnittes“ im Sonderheft 14 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen, Festschrift Eduard Doležal, von Herrn Prof. Dr. A. Tarczy-Hornoch hingewiesen werden, welcher dort die verschiedenen bisherigen Lösungen einer kritischen Betrachtung unterzogen und selbst vereinfachte Herleitungen der Delambreschen Gleichung angegeben hat.

Im Sinne eines besonders in der letzten Zeit betonten ökonomischen Prinzipes in den technischen Wissenschaften soll in der vorliegenden Studie den bekannten und teilweise recht umständlichen Ableitungen eine elegante und durchsichtige Lösung der beiden Probleme hinzugefügt werden.

Die Anwendung der Transformation durch reziproke Radien bzw. einer Inversion bei der Lösung dieser Aufgaben ergibt vergleichsweise eine außergewöhnlich einfache Herleitung der zum Teil bekannten Gebrauchsformeln. Stellt

$$r = r(\varphi) \quad . . . (1)$$

eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve dar, so vermittelt die Beziehung

$$\rho = 1/r \quad . . . (2)$$

eine Transformation der Kurve (1) durch reziproke Radien oder eine Inversion bzw. eine Spiegelung am Einheitskreis. Eine solche Abbildung ist kreis- und winkeltreu. Kreise und Gerade (Kreise der Krümmung Null), die nicht durch den Transformationsnullpunkt gehen, werden in Kreise verwandelt.

$$\text{Kreise und Gerade, die durch den Transformationsnullpunkt gehen, verwandeln sich in Gerade.} \quad . . . (3)$$