Paper-ID: VGI_195812

Über die Lösung der geodätischen Hauptaufgaben durch konforme Abbildung des Ellipsoids auf eine Kugel

Karl Hubeny [1]

[1] *Technische Hochschule Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **46** (4), S. 97–107

1958

BibTeX:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_195812,
Title = {{\"U}ber die L{\"o}sung der geod{\"a}tischen Hauptaufgaben durch
   konforme Abbildung des Ellipsoids auf eine Kugel},
Author = {Hubeny, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {97--107},
Number = {4},
Year = {1958},
Volume = {46}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN
Offizielles Organ
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie
REDAKTION:
emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. Lego und o. Prof. Hofrat Dr. phil. K. Ledersteger

Nr. 4 Baden bei Wien, Ende August 1958 XLVI. Jg.

Über die Lösung der geodätischen Hauptaufgaben durch konforme Abbildung des Ellipsoids auf eine Kugel

Von Karl Hubeny, Graz

I.

Wie Gauss gezeigt hat, ist die Lösung der geodätischen Hauptaufgaben in einer konformen Abbildung des Ellipsoids auf eine Kugel möglich. Dazu ist — neben der zweckmäßigen Wahl der konformen Abbildung — der Übergang von den Bestimmungsstücken der Hauptaufgaben am Ellipsoid zu jenen auf der Kugelfläche zu vollziehen; näher ausgeführt bedeutet dies, daß von einer am Ellipsoid vorliegenden geodätischen Strecke $P_1 P_2 = s$ und ihrem Anfangs- und Endazimut auf die geodätische Strecke $\bar{s}$ der Bildfläche (d. h. der Kugel) zwischen den Bildpunkten $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$ sowie auf die in $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$ bestehenden Azimute übergegangen werden muß (Strecken- und Richtungsreduktion). Durch die Bildpunkte wird auf der Kugel ein sphärisches Polardreieck definiert, welches die Bestimmungsstücke der Hauptaufgaben enthält; die Auflösung dieses Dreiecks ergibt in Verbindung mit der Rückabbildung die gesuchte Lösung der Hauptaufgaben.

Der u. a. auch im Jordan'schen Handbuch der Vermessungskunde mitgeteilten Gauss'schen Lösung [1] liegt eine durch die analytische Funktion

$$\bar{q} + i\,\bar{l} = \alpha\,(q + il) - q_0 \qquad \ldots \quad (1)$$

bewirkte konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel zugrunde; im vorstehenden Ausdruck bedeutet q, l ein aus den geographischen Koordinaten durch Änderung der Zählung der geographischen Breite hervorgehendes thermisches Parameterpaar des Ellipsoids; α und q_0 sind zwei passend gewählte reelle Größen. Die quergestrichenen Bezeichnungen beziehen sich in gleicher Bedeutung auf die Bildkugel.

Mit den folgenden Ausführungen soll nun der Versuch unternommen werden, durch eine schlichte konforme Abbildung des Ellipsoids ($\alpha = 1$) den Rechengang der Gauss'schen Lösung zu vereinfachen und durch eine entsprechende Erweiterung des Formelsystems die Anwendbarkeit bis zum Bereich jener Bogenlängen zu erstrecken, die unter den Begriff „mittlere Bogenlängen“ fallen.

II.

Die ersten Überlegungen mögen der Richtungs- und Streckenreduktion gelten. Die Erfaßbarkeit dieser Größen — nicht zuletzt deren leichte Erfaßbarkeit — bestimmt im wesentlichen den Anwendungsbereich der Lösung der Hauptaufgaben auf dem Umweg über eine konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel. Zur Entwicklung der genannten Größen setzen wir eine Abbildung des Ellipsoids nach

$$\bar{q} + i\bar{l} = q + i\,l - q_0, \qquad \ldots \quad (2)$$

also eine die Kugel einfach überdeckende konforme Abbildung — dies entsprechend der vorhin erwähnten Zielsetzung — voraus.

Es seien nun am Ellipsoid zwei Punkte P_1 und P_2 durch ihre isothermen Koordinaten q_1, l_1 und q_2, l_2 gegeben, wobei die gegenseitige Lage dieser Punkte im Sinne der vorliegenden Problemstellung so gedacht ist, daß durch sie nur eine geodätische Kurve des Ellipsoids verlaufen kann. Damit bestimmen die Punkte P_1 und P_2 eine und nur eine geodätische Strecke von der Länge s, die in den beiden Punkten die Azimute α_1 und α_2 aufweist. Nach der Abbildung von P_1 und P_2 auf die Kugel nach (2) denken wir uns den analogen Vorgang für die Bildpunkte $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$, wodurch die geodätische Strecke $\bar{s}$ (Großkreisbogen der Kugel) mit den Azimuten $\bar{\alpha}_1$ und $\bar{\alpha}_2$ in den Bildpunkten erhalten wird. Als bekannt sei die Tatsache vorausgesetzt, daß der Großkreisbogen $\bar{P}_1\,\bar{P}_2 = \bar{s}$ i. A. nicht das konforme Bild der geodätischen Strecke $P_1\,P_2 = s$ sein kann. Es gilt daher

$$\bar{\alpha}_1 \neq \alpha_1\ , \quad \bar{\alpha}_2 \neq \alpha_2\ , \quad \bar{s} \neq s.$$

Als „Richtungsreduktionen“ bezeichnen wir nun die Größen δ in den Ausdrücken

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 + \delta_1\ , \quad \bar{\alpha}_2 = \alpha_2 + \delta_2$$

oder

$$\delta_1 = \bar{\alpha}_1 - \alpha_1\ , \quad \delta_2 = \bar{\alpha}_2 - \alpha_2, \qquad \ldots \quad (3)$$

während als „Entfernungsreduktion“ die Differenz $\bar{s} - s$
oder der Quotient

$$\frac{\bar{s}}{s} \qquad \ldots \quad (4)$$

anzusprechen ist. Die Reduktionsgrößen ermöglichen demnach den Übergang von der Richtung und der Länge der geodätischen Strecke $P_1\,P_2 = s$ auf die Richtung und die Länge der geodätischen Strecke $\bar{s}$ zwischen den Bildpunkten $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$.

Zur Kenntnis dieser Reduktionen gelangt man auf verschiedenen Wegen — der durchsichtigste davon sei angeführt: Wir denken uns in den Abbildungsvorgang nach (2) eine konforme Abbildung in die cartesische Koordinatenebene eingeschaltet, dergestalt, daß die thermischen Parameter q und l des Ellipsoids und $\bar{q}$, $\bar{l}$ der Bildkugel mit den ebenen cartesischen Koordinaten, d. h. mit einem gleichfalls thermischen Parameterpaar der Bildebene, identifiziert werden. Es ist dann

$$\bar{q} + i\,\bar{l} = x_E + i\,y_E = q + i\,l - q_0 \qquad \ldots \quad (5)$$

Die Punkte $P_1\,P_2$ und $\overline{P}_1\,\overline{P}_2$ bilden sich dadurch in das Punktpaar $P_{1E}\,P_{2E}$ ab, durch welches die Strecke s_E mit der Richtung α_E definiert wird. Zwischen den Azimuten α_1, α_2 und $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\alpha}_2$ und dem Richtungswinkel α_E bestehen Zusammenhänge, die wir als die Richtungsreduktionen ψ bei konformen Abbildungen in die Ebene erkennen. Demnach gilt

$$\alpha_E = \alpha_1 + \psi_1 = \overline{\alpha}_1 + \overline{\psi}_1$$

$$\alpha_E \pm \pi = \alpha_2 \pm \pi + \psi_2 = \overline{\alpha}_2 \pm \pi + \overline{\psi}_2. \qquad \ldots (6)$$

Wir entnehmen daraus

$$\overline{\alpha}_1 - \alpha_1 = \psi_1 - \overline{\psi}_1$$

$$\overline{\alpha}_2 - \alpha_2 = \psi_2 - \overline{\psi}_2; \qquad \ldots (7)$$

die linker Hand stehenden Ausdrücke haben wir aber nach (3) als die Richtungsreduktionen für die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel erklärt, die sich daher aus (siehe dazu auch [2])

$$\delta_1 = \psi_1 - \overline{\psi}_1 \quad , \quad \delta_2 = \psi_2 - \overline{\psi}_2 \qquad \ldots (8)$$

ergeben.

Ähnlich einfach gestaltet sich die Berechnung der Streckenreduktion, wenn für die Abbildung in die Ebene die Quotienten

$$\mu = \frac{s_E}{s} \text{ und } \overline{\mu} = \frac{s_E}{\overline{s}} \qquad \ldots (9)$$

als bekannt vorausgesetzt werden. Aus (9) ergibt sich damit der benötigte Quotient $\dfrac{\overline{s}}{s}$ mit

$$Q = \frac{\mu}{\overline{\mu}}. \qquad \ldots (10)$$

Es handelt sich nun darum, die Richtungs- und Streckenreduktionen ψ, $\overline{\psi}$ und μ, $\overline{\mu}$ mit der notwendigen Genauigkeit zu berechnen, d. h. mit jener Genauigkeit, die für die Berechnung der Hauptaufgaben bis zu mittleren Bogenlängen nötig ist. Wir gehen dazu vom Formelsystem für die direkte Lösung der Hauptaufgaben aus. Für die Koordinaten des Endpunktes P_2 einer von einem Punkt P_1 unter dem geodätischen Richtungswinkel Θ_1 ausgehenden geodätischen Strecke s gilt im isothermen Koordinatensystem x, y — wobei für das Bogenelement einer Flächenkurve die Fundamentalform $ds^2 = \dfrac{1}{m^2}(dx^2 + dy^2)$ gelten möge —

$$x_2 - x_1 = \triangle x_{1,2} = \frac{1}{1!}\frac{dx}{ds}s + \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{ds^2}s^2 + \ldots\ldots,$$

$$y_2 - y_1 = \triangle y_{1,2} = \frac{1}{1!}\frac{dy}{ds}s + \frac{1}{2!}\frac{d^2y}{ds^2}s^2 + \ldots,$$

$$\Theta_2 - \Theta_1 = \triangle\Theta_{12} = \frac{1}{1!}\frac{d\Theta}{ds}s + \frac{1}{2!}\frac{d^2\Theta}{ds^2}s^2 + \ldots.$$

mit $\dfrac{dx}{ds} = m \cos\Theta_1$, $\dfrac{dy}{ds} = m \sin\Theta_1$, $\dfrac{d\Theta}{ds} = -\,m_y \cos\Theta_1 + m_x \sin\Theta_1$.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß die Richtungsreduktion für eine durch die Identifizierung der thermischen Parameter x, y mit ebenen cartesischen Koordinaten bewirkte konforme Abbildung aus

$$\psi_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\triangle y_{1,2} \cos \Theta_1 - \triangle x_{1,2} \sin \Theta_1}{\triangle x_{1,2} \cos \Theta_1 + \triangle y_{1,2} \sin \Theta_1} \quad \ldots (11)$$

berechenbar ist, während die Streckenreduktion, d. h. der Quotient $\frac{s_e}{s}$ aus

$$s_E = \frac{1}{\cos \psi_1} (\triangle x_{1,2} \cos \Theta_1 + \triangle y_{1,2} \sin \Theta_1) \quad \ldots (12)$$

entnommen werden kann. Nach einigen einfachen Rechnungen erhält man aus (11) unter der für das isotherme Koordinatensystem q, l gültigen Voraussetzung $m = m(q)$ für die Richtungsreduktion*)

$$\begin{aligned}\psi_1 = \frac{1}{2} m_q\, s \sin \alpha_1 &+ \frac{1}{12} \left[3\, m_q{}^2 + 2\, m m_{qq}\right] s^2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ &+ \frac{1}{24} \left[2\, m_q{}^3 + 6\, m m_q\, m_{qq} + m^2\, m_{qqq}\right] s^3 \cos^2 \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ &+ \frac{1}{24} \left[-\, 2\, m_q{}^3 - m m_q\, m_{qq}\right] s^3 \sin^3 \alpha_1 + \ldots . \quad \ldots (13)\end{aligned}$$

Trägt man hierin die Umkehrung der Potenzreihen der 1. Hauptaufgabe im isothermen System q, l für die geodätische Strecke s mit den Anfangs- und End-azimuten α_1 und α_2 ein, so erhält man den der Formel (13) entsprechenden Ausdruck mit den Veränderlichen $\triangle q_{1,2} = \triangle q$, $\triangle l_{1,2} = \triangle l$; es ist

$$\begin{aligned}\psi_1 = \frac{m_q}{2\, m} \triangle q + \frac{1}{12\, m^2} \left[-\, 3\, m_q{}^2 + 2\, m m_{qq}\right] \triangle q \triangle l + \frac{1}{24\, m^3} \left[3\, m_q{}^3 - \right. \\ \left. -\, 4\, m m_q\, m_{qq} + m^2\, m_{qqq}\right] \triangle q^2 \triangle l + \frac{1}{24\, m^3} \left[-\, m_q{}^3 + m m_q\, m_{qq}\right] \triangle l^3 + \ldots . \quad (14)\end{aligned}$$

In den beiden letzten Formeln ist — im Hinblick auf die im isothermen Koordinatensystem q, l gültige I. Fundamentalform $ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi\; (dq^2 + dl^2)$ —

$$m = \frac{1}{N \cos \varphi} = m(q); \quad \ldots (15)$$

mit m_q, m_{qq} usw. sind im Folgenden stets die aufeinander folgenden Ableitungen von m nach der isometrischen Breite q bezeichnet, die in (13) und (14) ebenso wie m im Punkt P_1 zu nehmen sind.

---

*) Die Ableitungen $\frac{dm}{dq}$, $\frac{d^2 m}{dq^2}$ usw. sind mit m_q, m_{qq} usw. bezeichnet, $m_q{}^2$ bedeutet $\left(\frac{dm}{dq}\right)^2$ usw.

Aus (12) folgt nach einigen Umformungen

$$\frac{s_E}{s} = m\left[1 + \frac{m_q}{2} s \cos\alpha_1 + \frac{1}{24}(4\,m_q{}^2 + 4\,m m_{qq})\, s^2 \cos^2\alpha_1 + \right.$$

$$+ \frac{1}{24}(-5\,m_q{}^2)\, s^2 \sin^2\alpha_1 + \frac{1}{48}(2\,m_q{}^3 + 8\,m m_q\, m_{qq} + 2\,m^2\, m_{qqq})\, s^3 \cos^3\alpha_1 +$$

$$\left. + \frac{1}{48}(-13\,m_q{}^3 - 10\,m m_q\, m_{qq})\, s^3 \cos\alpha_1 \sin^2\alpha_1 + \ldots\ldots\right] \quad \ldots (16)$$

und, nach dem Übergang auf die Koordinatenunterschiede,

$$\frac{s_E}{s} = m\left[1 + \frac{m_q}{2\,m}\,\triangle q + \frac{1}{24\,m^2}(-2\,m_q{}^2 + 4\,m m_{qq})\,\triangle q^2 + \frac{1}{24\,m^2}(m_q{}^2)\,\triangle l^2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{48\,m^3}(2\,m_q{}^3 - 4\,m m_q\, m_{qq} + 2\,m^2\, m_{qqq})\,\triangle q^3 +$$

$$\left. + \frac{1}{48\,m^3}(-m_q{}^3 + 2\,m m_q\, m_{qq})\,\triangle q\,\triangle l^2 + \ldots\ldots\right]. \quad \ldots (17)$$

Mit den Formeln (13), (14), (16) und (17) können nun die Reduktionen dargestellt werden, und zwar so, daß die erwähnten Formeln einmal für das Ellipsoid und einmal — mit quergestrichener Bezeichnung — für die Kugel, d. h. für die konforme Abbildung dieser Flächen in die xy-Ebene, angeschrieben und in (7) und (10) eingetragen werden. Es ergibt sich*)

$$\delta_1 = \left[\frac{m_q}{2\,m} - \frac{\bar{m}_q}{2\,\bar{m}}\right]\triangle q$$

$$+ \left[\frac{1}{12\,m^2}(-3\,m_q{}^2 + 2\,m m_{qq}) + \frac{1}{12\,\bar{m}^2}(3\,\bar{m}_q{}^2 - 2\,\bar{m}\,\bar{m}_{qq})\right]\triangle q\,\triangle l + \ldots\ldots \quad (18)$$

und

$$\frac{\bar{s}}{s} = \frac{m}{\bar{m}}\left\{1 + \left[\frac{m^q}{2\,m} - \frac{\bar{m}_q}{2\,\bar{m}}\right]\triangle q\right.$$

$$+ \frac{1}{24}\left[\frac{1}{m^2}(-2\,m_q{}^2 + 4\,m m_{qq}) + \frac{1}{m\,\bar{m}}(-6\,m_q\,\bar{m}_q) + \frac{1}{\bar{m}^2}(8\,\bar{m}_q{}^2 - 4\,\bar{m}\,\bar{m}_{qq})\right]\triangle q^2$$

$$\left. + \frac{1}{24}\left[\frac{m_q{}^2}{m^2} - \frac{\bar{m}_q{}^2}{\bar{m}^2}\right]\triangle l^2 + \ldots\ldots\right\}. \quad \ldots (19)$$

Aus dem Aufbau der Formeln (18) und (19) erkennt man unschwer, daß eine bedeutende Vereinfachung dann eintritt, wenn

$$\bar{m} = m \quad \text{und} \quad \bar{m}_q = m_q$$

gesetzt werden kann. Da für das Ellipsoid

$$m = \frac{1}{N\cos\varphi}$$

*) Die Ausdrücke (18, 19) sind wegen ihres großen Umfanges nur bis zu den Gliedern von der Ordnungszahl 2 (einschließlich) angegeben.

(N = Normalkrümmungshalbmesser, φ = ellipsoidische geographische Breite) und für die Bildkugel

$$\overline{m} = \frac{1}{a \cos \overline{\varphi}}$$

(a = Kugelhalbmesser, $\overline{\varphi}$ = geographische Kugelbreite) gilt und die Ableitungen von m bzw. $\overline{m}$ nach der isometrischen Breite mit

$$m_q = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{N} \quad , \quad \overline{m}_q = \frac{\operatorname{tg} \overline{\varphi}}{a} \qquad \ldots (20)$$

gegeben sind, verschwinden mit der Festsetzung

$$\overline{\varphi}_1 = \varphi_1 \quad , \quad a = N_1 \qquad \ldots (21)$$

— dies gilt für den Punkt P_1 und dessen Bildpunkt $\overline{P}_1$ — die Hauptglieder der Formeln (18) und (19). Die Festsetzung nach (21) ergibt eine entlang des Parallelkreises φ_1 = const. berührende Bildkugel vom Radius $a = N_1$, die Soldner'sche Bildkugel.

Die mitgeteilten Reduktionsformeln gehen damit über in

$$\delta_1 = \frac{1}{6\,m}\left[m_{qq} - \overline{m}_{qq}\right] \triangle q \triangle l + \frac{1}{24\,m^2}\left[4\,m_q\,(-\,m_{qq} + \overline{m}_{qq}) + \right.$$
$$\left. + \,m\,(m_{qqq} - \overline{m}_{qqq})\right] \triangle q^2 \triangle l + \frac{1}{24\,m^2}\left[m_q\,(m_{qq} - \overline{m}_{qq})\right] \triangle l^3 + \ldots\ldots \qquad (22)$$

und

$$\frac{\overline{s}}{s} = 1 + \frac{1}{6\,m}\left[m_{qq} - \overline{m}_{qq}\right] \triangle q^2 + \frac{1}{24\,m^2}\left[4\,m_q\,(-\,m_{qq} + \overline{m}_{qq}) + \right.$$
$$\left. + \,m(m_{qqq} - \overline{m}_{qqq})\right] \triangle q^3 + \frac{1}{24\,m^2}\left[m_q\,(m_{qq} - \overline{m}_{qq})\right] \triangle q\,.\triangle l^2 + \ldots\ldots \qquad (23)$$

Die Ableitungen von m nach der isometrischen Breite ergeben sich (es ist $t = \operatorname{tg} \varphi$, $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ mit den entsprechenden quergestrichenen Bezeichnungen für die Kugel) aus der nachstehenden Zusammenstellung:

Ellipsoid	Kugel
$m = \frac{1}{N \cos \varphi}$	$\overline{m} = \frac{1}{a \cos \overline{\varphi}}$
$m_q = \frac{t}{N}$	$\overline{m}_q = \frac{\overline{t}}{a}$
$m_{qq} = \frac{\cos \varphi}{N}(1 + t^2 + \eta^2)$	$\overline{m}_{qq} = \frac{\cos \overline{\varphi}}{a}(1 + \overline{t}^2)$
$m_{qqq} = \frac{\cos^2 \varphi\, t}{N}(1 + t^2 - 3\eta^2 - 4\eta^4)$	$\overline{m}_{qqq} = \frac{\cos^2 \overline{\varphi}\, \overline{t}}{a}(1 + \overline{t}^2)$;

die für die Aufstellung der Formeln (22) und (23) notwendigen Differenzen der zweiten und dritten Ableitungen errechnen sich daraus unter Beachtung von $\overline{\varphi}_1 = \varphi_1$,

$a = N_1$ mit

$$m_{qq} - \overline{m}_{qq} = \frac{\eta^2 \cos\varphi}{N}$$

$$m_{qqq} - \overline{m}_{qqq} = \frac{\cos^2\varphi\, t}{N} (-3\eta^2 - 4\eta^4) \,. \qquad \ldots (24)$$

Indem man unter Beachtung von (20) und (21) die Differenzen (24) in (22) und (23) einträgt und hernach den isometrischen Breitenunterschied durch die Entwicklung

$$\triangle q = \frac{1}{1!}\frac{dq}{d\varphi}\triangle\varphi + \frac{1}{2!}\frac{d^2q}{d\varphi^2}\triangle\varphi^2 + \ldots.$$

und deren Potenzen ersetzt, erhält man die endgültigen Reduktionsformeln mit

$$\varepsilon_1 = \frac{\cos\varphi}{6}(\eta^2 - \eta^4 + \eta^6)\triangle\varphi\triangle l + \frac{\cos\varphi\, t}{24}(-5\eta^2 + 12\eta^4)\triangle\varphi^2\triangle l +$$

$$+ \frac{\cos^3\varphi\, t}{24}(\eta^2)\triangle l^3 + \frac{\cos\varphi}{720}(-32\eta^2 + 30 t^2\eta^2)\triangle\varphi^3\triangle l +$$

$$+ \frac{\cos^3\varphi}{720}(28\eta^2 - 80 t^2\eta^2)\triangle\varphi\triangle l^3 + \ldots\ldots \qquad \ldots (25)$$

und

$$\frac{\overline{s}}{s} = 1 + \frac{1}{6}(\eta^2 - 2\eta^4 + 3\eta^6)\triangle\varphi^2 + \frac{t}{24}(-3\eta^2 + 17\eta^4)\triangle\varphi^3 +$$

$$+ \frac{\cos^2\varphi\, t}{24}(\eta^2 - \eta^4)\triangle\varphi\triangle l^2 + \frac{1}{720}(-24\eta^2 + 18 t^2\eta^2)\triangle\varphi^4 +$$

$$+ \frac{\cos^2\varphi}{720}(16\eta^2 - 54 t^2\eta^2)\triangle\varphi^2\triangle l^2 + \frac{\cos^4\varphi}{720}(3 t^2\eta^2)\triangle l^4 + \ldots\ldots \,. \qquad (26)$$

In den Formeln (13), (14) und (16) bis (23) werden nur die Glieder bis zur Ordnungszahl drei (einschließlich) mitgeteilt; die obigen endgültigen Ausdrücke sind um die Glieder von der Ordnungszahl vier erweitert angegeben. Die Koeffizienten der damit vorliegenden Potenzreihen sind Funktionen der ellipsoidischen geographischen Breite und sind im Punkt P_1 zu nehmen.

Die Abschätzung des Einflusses der einzelnen Glieder zeigt zunächst, daß erst bei Koordinatenunterschieden von $\triangle\varphi = \triangle l = 0{,}5^0$ die ersten Glieder der Formeln (25), (26) lineare Beträge in der Größenordnung von etwa 2—3 mm annehmen. Daraus folgt ohne weiteres die Möglichkeit, die Hauptaufgaben über kurze Strecken — Größenordnung bis etwa 30 km — ohne jede Reduktion zu berechnen. Lediglich die Abbildung oder Rückabbildung des zweiten Punktes nach den später mitzuteilenden einfachen Formeln unterscheidet in diesem Falle den Vorgang von der sphärischen Rechnung.

Eine Untersuchung der Konvergenz der Potenzreihen (25) und (26) führt zu dem Ergebnis, daß bei zunehmenden Koordinatenunterschieden deren Konvergenz und Gliederzahl noch hinreicht, um bei Koordinatenunterschieden von etwa 6^0 eine lineare Genauigkeit etwa von der Größenordnung des Millimeters zu verbürgen. Dies entspricht einer ungefähren Streckenlänge von 800 km; darüber hinaus — über

1200 bis 1400 km — wird wohl nur mehr das lineare Maß von etwa 0,02—0,03 m als gesichert gelten können. Eine Vermehrung der Gliederzahl um die Glieder von der Ordnungszahl fünf bringt kaum eine Verbesserung, da die Potenzreihen (25) und (26) bei Koordinatenunterschieden von 10^0 und mehr nur mehr sehr träge konvergieren.

III.

Für die Entwicklung der Reduktionen wurde eine konforme Abbildung auf die Soldner'sche Bildkugel mit der Annahme

$$\bar{\varphi}_1 = \varphi_1 \; , \quad a = N_1$$

vorausgesetzt. Mit dieser Annahme ist über die Konstante q_0 in der Abbildungsgleichung

$$\bar{q} + i\,\bar{l} = q + i\,l - q_0$$

verfügt worden; diese braucht jedoch nicht berechnet zu werden, wenn man die isometrischen Breiten (und natürlich auch die Längen) jeweils von P_1 und von dessen Bildpunkt $\bar{P}_1$ aus zählt. Die Abbildungsgleichung geht damit über in

$$\triangle\bar{q} + i\,\bar{l} = \triangle q + i\,l. \qquad \ldots (27)$$

Diese Abbildungsgleichung ist nun für die praktische Rechnung brauchbar zu machen, d. h. es sind Gleichungen anzugeben, die für den Punkt P_2 den Übergang von der ellipsoidischen Breite φ_2 auf die Breite $\bar{\varphi}_2$ seines konformen Bildpunktes auf der Kugel und umgekehrt ermöglichen.

Eine sehr einfache Lösung dafür ergibt sich aus den Potenzreihen, die der Umrechnung eines geographischen Breitenunterschiedes in den entsprechenden isometrischen Breitenunterschied und umgekehrt dienen. Diese seien in allgemeiner Form mit

$$\triangle q = q_2 - q_1 = c_1 \triangle \varphi + c_2 \triangle\varphi^2 + \ldots.$$
$$\triangle \bar{q} = \bar{q}_2 - \bar{q}_1 = \bar{c}_1 \triangle \bar{\varphi} + \bar{c}_2 \triangle\bar{\varphi}^2 + \ldots. \qquad \ldots (28)$$

und

$$\triangle\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = d_1 \triangle q + d_2 \triangle q^2 + \ldots.$$
$$\triangle\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1 = \bar{d}_1 \triangle\bar{q} + \bar{d}_2 \triangle\bar{q}^2 + \ldots. \qquad \ldots (29)$$

angeschrieben [3]; mit der Festsetzung $\bar{\varphi}_1 = \varphi_1$ ergibt sich, daß alle in (28) und (29) vorkommenden Koeffizienten für die gleiche Breite zu nehmen sind. Aus (29) folgt mit Beachtung der Abbildungsgleichung (27)

$$\bar{\varphi}_2 - \varphi_2 = (\bar{d}_1 - d_1) \triangle q + (\bar{d}_2 - d_2) \triangle q^2 + \ldots.$$

oder

$$\varphi_2 - \bar{\varphi}_2 = (d_1 - \bar{d}_1) \triangle q + (d_2 - \bar{d}_2) \triangle q^2 + \ldots. \qquad \ldots (30)$$

Ersetzt man hierin nach (28) den isometrischen durch den geographischen Breitenunterschied, so entsteht als Ergebnis das Formelpaar

$$\bar{\varphi}_2 - \varphi_2 = (-\eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \triangle\varphi + \frac{t}{2} (3\,\eta^2 - 6\,\eta^4) \triangle\varphi^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} (4\,\eta^2 - 3\,t^2\,\eta^2 - 9\,\eta^4 + 21\,t^2\,\eta^4) \triangle\varphi^3 + \frac{t}{24} (-15\,\eta^2) \triangle\varphi^4 + \ldots. \qquad (31)$$

und

$$\varphi_2 - \bar{\varphi}_2 = \eta^2 \,\triangle\bar{\varphi} + \frac{t}{2}\,(-\,3\,\eta^2 - 3\,\eta^4)\,\triangle\bar{\varphi}^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\,(-\,4\,\eta^2 + 3\,t^2\,\eta^2 - 7\,\eta^4 + 18\,t^2\,\eta^4)\,\triangle\bar{\varphi}^3 + \frac{t}{24}\,(15\,\eta^2)\,\triangle\bar{\varphi}^4 + \ldots. \qquad (32)$$

Die Konvergenz dieser Potenzreihen reicht hin, um in mittleren Breiten bei Breitenunterschieden bis $0{,}5^0$ die Rechengenauigkeit von 10^{-4} Sekunden mit den beiden ersten Gliedern zu erreichen; bei Breitenunterschieden bis etwa 2^0 liefern die vier mitgeteilten Glieder noch etwa dieselbe Genauigkeit. Um größere Breitenunterschiede zu bewältigen, könnten die obigen Potenzreihen — es ist dies leicht möglich — weiterentwickelt werden; dieser Vorgang ist jedoch wegen der nur langsamen Konvergenz der entstehenden vielgliedrigen Reihen nicht zweckmäßig.

Eine sehr rasch konvergierende und daher auch für große Breitenunterschiede anwendbare Form der Abbildungsgleichung ergibt sich, wenn man den reellen Teil von (27), nämlich

$$\triangle\bar{q} = \triangle q, \qquad \ldots (33)$$

unter Beachtung der Festlegung $\bar{\varphi}_1 = \varphi_1$ ausführlich anschreibt und von dieser Form der Abbildungsgleichung ausgeht. Da sich die isometrische Breite aus

$$q = ln\,\mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{e}{2}\,ln\left(\frac{1 - e\,\sin\,\varphi}{1 + e\,\sin\,\varphi}\right)$$

(e ist die erste Exzentrizität des Rotationsellipsoids)

ergibt, lautet die Abbildungsgleichung (33)

$$ln\,\mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{\bar{\varphi}_2}{2}\right) = ln\,\mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi_2}{2}\right) + \frac{e}{2}\,ln\,\frac{1 - e\sin\varphi_2}{1 + e\sin\varphi_2} - \frac{e}{2}\,ln\,\frac{1 - e\sin\varphi_1}{1 + e\sin\varphi_1}$$

oder

$$\mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{\bar{\varphi}_2}{2}\right) = \left(\frac{(1 - e\sin\varphi_2)\;(1 + e\sin\varphi_1)}{(1 + e\sin\varphi_2)\;(1 - e\sin\varphi_1)}\right)^{\frac{e}{2}} \mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi_2}{2}\right) = a\,\mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi_2}{2}\right). \qquad \ldots (34)$$

Gilt nun

$$\mathrm{tg}\;\beta = a\;\mathrm{tg}\;\alpha,$$

so ist nach Lagrange

$$\beta - \alpha = \frac{a - 1}{a + 1}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{a - 1}{a + 1}\right)^2 \sin\,4\,\alpha + \frac{1}{3}\left(\frac{a - 1}{a + 1}\right)^3 \sin 6\,\alpha + \ldots. \qquad \ldots (35)$$

Setzen wir

$$\left(\frac{1 - e\sin\varphi_2}{1 + e\sin\varphi_2}\right)^{\frac{e}{2}} = n_2\,, \qquad \left(\frac{1 - e\sin\varphi_1}{1 + e\sin\varphi_1}\right)^{\frac{e}{2}} = n_1\,,$$

so ist

$$a = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{und} \quad \frac{a - 1}{a + 1} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\,. \qquad \ldots (36)$$

Die Größe n kann entweder aus Tafeln entnommen [4] oder durch eine Entwicklung des Ausdruckes

$$n = \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}\right)^{\frac{e}{2}}$$

nach dem binomischen Satz und weiterer Umformung aus

$$n = \left(1 + \frac{e^4}{4} + \frac{e^6}{8}\right) + \left(- e^2 + \frac{e^4}{4} - \frac{e^6}{6}\right) \sin \varphi + \left(- \frac{e^4}{4} - \frac{e^6}{6}\right) \cos 2 \varphi +$$
$$+ \left(\frac{e^4}{12} + \frac{5 e^6}{48}\right) \sin 3 \varphi + \left(\frac{e^6}{24}\right) \cos 4 \varphi + \left(- \frac{e^6}{80}\right) \sin 5 \varphi + \ldots . \qquad (37)$$

berechnet werden. Hierin ist ebenso wie in den vorangegangenen Ausdrücken mit e die erste Exzentrizität des Rotationsellipsoides bezeichnet; führt man dafür die Zahlenwerte für das Bessel'sche Ellipsoid ein, so ergibt sich

$$n = 1{,}000\,011\,173\,98 - 0{,}006\,663\,284\,97 \sin \varphi - 0{,}000\,011\,186\,36 \cos 2 \varphi +$$
$$+ 0{,}000\,003\,743\,24 \sin 3 \varphi + 0{,}000\,000\,012\,39 \cos 4 \varphi -$$
$$- 0{,}000\,000\,003\,72 \sin 5 \varphi \ldots .$$

Mit den Werten des Hayford'schen Ellipsoids folgt aus (37)

$$n = 1{,}000\,011\,336\,55 - 0{,}006\,711\,422\,09 \sin \varphi - 0{,}000\,011\,349\,21 \cos 2 \varphi +$$
$$+ 0{,}000\,003\,797\,84 \sin 3 \varphi + 0{,}000\,000\,012\,66 \cos 4 \varphi -$$
$$- 0{,}000\,000\,003\,80 \sin 5 \varphi \ldots \qquad (38)$$

Die Lagrange'sche Reihe (35) ist unter Beachtung von (34), nämlich von

$$\beta = 45^0 + \frac{\bar{\varphi}_2}{2} \quad , \quad \alpha = 45^0 + \frac{\varphi_2}{2}$$

noch etwas umzuformen, wodurch sich die endgültige Rechenform mit [5]

$$\bar{\varphi}_2 - \varphi_2 = 2 \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \cos \varphi_2 - \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 \sin 2 \varphi_2 - \frac{2}{3} \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^3 \cos 3 \varphi_2 + \ldots$$
$$\ldots \qquad (39)$$

ergibt. Das eben mitgeteilte Ergebnis stellt eine sehr rasch konvergierende Folge dar, die nur bei sehr großen Breitenunterschieden mit Einschluß des dritten Gliedes berechnet werden muß. Die Berechnung der Differenz $\varphi_2 - \bar{\varphi}_2$, also die Rückabbildung der Kugel auf das Ellipsoid, muß allerdings durch eine Iteration erfolgen, indem man in (39) in den Gliedern rechter Hand zunächst $\bar{\varphi}_2$ oder besser einen aus (32) flüchtig berechneten Näherungswert für φ_2 einführt. Auch die Iteration konvergiert sehr rasch; in der Regel führt schon die erste Wiederholung der Näherungsrechnung zum endgültigen Ergebnis.

Mit den Formelkombinationen (25), (26) und (31) (32) oder (25). (26) und (39) ist das gesamte Formelsystem für die Lösung der Hauptaufgaben durch die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Soldner'sche Kugel nach (2) gegeben *). Da, wie

*) Für die Berechnung von (25, 26) im Rahmen der ersten Hauptaufgabe genügen Näherungswerte der Koordinatenunterschiede, die einer vorläufigen sphärischen Rechnung entnommen werden können.

gezeigt, einerseits bei kurzen Strecken einfachste Rechengänge eintreten, andererseits geodätische Strecken bis 1000 km und sogar darüber mit einem relativ geringen Rechenaufwand bewältigt werden können, schien die Mitteilung der Ergebnisse doch von einigem Interesse für die Praxis zu sein.

Literaturverzeichnis:

[1] Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde III. Band, 2. Halbband: Kapitel V: „Konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel."

[2] Ein diesbezüglicher Hinweis findet sich bei
Bodemüller: Ellipsoidische Abbildungen von Rotationsellipsoiden mit Hilfe von Differentialformeln, in Nachrichten des Kriegs-Karten- u. Vermessungswesens, 1944, Seite 291 ff.

[3] Hristow: Potenzreihen zwischen dem geographischen und dem isometrischen Breitenunterschied, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1935, S. 649.

[4] Grabowski: Tafeln zur Berechnung der isometrischen Breite . . ., Zeitschrift für Vermessungswesen, 1929, S. 33ff.

[5] Siehe dazu auch: Hristow, Über die konforme Abbildung des Erdellipsoids auf die Kugel, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1936, Seite 305.

Martin Behaim und Hieronymus Münzer, zwei Kosmographen aus dem Zeitalter der großen Entdeckungsreisen

Von K. Lego und G. Oliva

Diese Studie wurde zum 500. Geburtstag des Nürnbergers Martin Behaim und zum 450. Todestag des ihm befreundeten, aus Feldkirch in Vorarlberg stammenden Hieronymus Münzer verfaßt. *Die Redaktion.*

1. *Das Zeitalter der Entdeckungen im Erd- und Himmelsraum und der Anteil der ersten Wiener Mathematikerschule an den Problemen dieser Zeit*

Die Zeit des 15. und der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts gehört wohl zu den denkwürdigsten Epochen der Geschichte der Menschheit. Sie brachte einen vollständigen Wandel im geistigen und kulturellen, im wirtschaftlichen und sozialen Leben der damaligen Zeit: Die mittelalterliche Scholastik ging in dem Humanismus auf; auf religiösem Gebiet hatten Reformbestrebungen weitestgehende Auswirkungen zur Folge; das gesamte Kriegswesen wurde durch die Erfindung des Schießpulvers umgestaltet; die Erfindung der Buchdruckerkunst ermöglichte es, Bildung ins Volk zu tragen. Besonders hoch sind aber die neugewonnenen naturwissenschaftlichen Erkenntnisse zu werten, die sich aus den Entdeckungsreisen und den damaligen astronomischen Forschungen ergaben. Sie führten 1492 zur Entdeckung Amerikas durch die Spanier und 1498 zur Entdeckung des Seeweges nach Ostindien durch die Portugiesen. Der bekannte Teil der Erde, der sich bis dahin auf Europa und die angrenzenden Mittelmeerländer beschränkt hatte, wuchs mit Riesenschritten und bald erbrachten Schiffe, die nach Westen absegelten und von Osten heimkehrten, den unumstößlichen Beweis von der Kugelgestalt der Erde. Um diese Zeit kam auch Copernicus zur Erkenntnis, daß die Erde nicht der Mittelpunkt der Welt sei,