Paper-ID: VGI_195804

Eine weitere Herleitung des Theorems von Clairaut

Karl Hubeny [1]

[1] *Technische Hochschule Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **46** (2), S. 38–39

1958

BibTEX:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_195804,
Title = {Eine weitere Herleitung des Theorems von Clairaut},
Author = {Hubeny, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {38--39},
Number = {2},
Year = {1958},
Volume = {46}
}
```

Die relative Lage der beiden Fundamentalpunkte von Europa und Amerika ergab sich in ostwestlicher Richtung mit einem mittleren Fehler von nur 11 m oder 13.10^{-7}, eine Genauigkeit, die durch eine Verbindungstriangulation etwa über eine Inselbrücke nie erreicht werden könnte.

Damit wäre das Problem der Erdfigur vollständig gelöst. Diese fast völlig hypothesenfreie Lösung ist übrigens seltsam genug. Man sollte eigentlich meinen, daß man das Erdellipsoid kennen muß, ehe man das Geoid gegenüber dieser einheitlichen Bezugsfläche festlegen kann. In Wahrheit aber kehren sich die beiden Teilaufgaben, die Bestimmung des Erdellipsoides und die Bestimmung der Geoidundulationen, fast gänzlich um. Es müssen die Geoidhöhen gegenüber einem streng physikalisch definierten Ellipsoid bekannt sein, ehe aus den gravimetrischen Höhen die Abplattung des Erdellipsoides abgeleitet werden kann, und es müssen überhaupt die Undulationen des Geoides vorliegen, ehe die Achse des Erdellipsoides bestimmt werden kann.

Eine weitere Herleitung des Theorems von Clairaut

Von Karl Hubeny, Graz

Dem Sinussatz der sphärischen Trigonometrie entspricht auf beliebigen Drehflächen bekanntlich die Bedingung $p \,.\, \sin \Theta = k$, welche als das Theorem von Clairaut bezeichnet wird.

Dieser Satz besagt, daß entlang jeder geodätischen Kurve einer Drehfläche in allen Punkten das Produkt aus dem Parallelkreishalbmesser und dem Sinus des zwischen der Kurve und dem Meridian eingeschlossenen Winkels, d. h. des Azimuts, konstant ist. Der Beweis dieses Satzes [1] ist einfach zu führen. Ich möchte nun nachstehend eine Entwicklung desselben aus der Gauß'schen totalen Differentialgleichung der geodätischen Kurven mitteilen, die deswegen von einigem Interesse sein dürfte, weil die genannte Form der Differentialgleichung der geodätischen Kurve bei den meisten grundlegenden geodätischen Entwicklungen eine wichtige Rolle spielt und damit eine gewisse Einheitlichkeit der Darstellung möglich ist.

In der xz-Ebene eines räumlichen cartesischen Koordinatensystems sei eine Kurve in der Parameterdarstellung

$$x = p\ (u), \quad z = q\ (u) \qquad \ldots \quad (1)$$

gegeben. Rotiert diese Kurve um die z-Achse, so hat man in

$$x = p\ (u) \cos v,\ y = p\ (u) \sin v,\ z = q\ (u) \qquad \ldots \quad (2)$$

eine Parameterdarstellung der entstandenen Drehfläche vor sich. In dieser bedeutet u einen beliebigen Parameter, während der Parameter v der zwischen der xz-Ebene und der Kurvenebene bestehende Verdrehungswinkel ist.

Der Radius p eines Parallelkreises ist nach (1) $p\ (u)$; die Fundamentalgrößen erster Ordnung ergeben sich mit (die Akzente zeigen Ableitungen nach u an)

$$\begin{aligned} E &= (p'\ (u))^2 + (q'\ (u))^2 \\ F &= 0 \\ G &= (p\ (u))^2 = p^2. \end{aligned} \qquad \ldots \quad (3)$$

Daraus folgt zunächst (zufolge $F = 0$) die Orthogonalität der Meridiane und Parallelkreise beliebiger Drehflächen; führt man als Parameter u die von irgendeinem Punkt der Meridiankurve (1) gezählte Bogenlänge dieser Kurve ein, so erhält man für die Fundamentalgrößen

$$E = 1 \qquad F = 0 \qquad G = p^2 \qquad \ldots \quad (3\,a)$$

Da es sich bei den gerade erwähnten Parametern um ein Parameterpaar handelt, welches in der Fläche ein orthogonales Netz von Parameterkurven (Meridiane und Parallelkreise) erzeugt, geht die totale Differentialgleichung, der die geodätischen Kurven einer Fläche genügen, in die für ein orthogonales Netz von Parameterkurven bestehende Form

$$d\Theta = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v\, du - G_u\, dv) \qquad \ldots \quad (4)$$

über. Nach (3a) ist nun

$$E = 1,\ G = p^2,\ E_v = 0,\ G_u = 2\, p p_u, \qquad \ldots \quad (5)$$

so daß die obige Gleichung für das benützte Parametersystem mit

$$d\Theta = -\, p_u\, dv \qquad \ldots \quad (6)$$

anzuschreiben ist.

In einem orthogonalen Netz von krummen Koordinatenlinien gilt für das Bogenelement ds einer Flächenkurve mit der Richtung Θ

$$ds \cos \Theta = \sqrt{E}\, du, \qquad ds \sin \Theta = \sqrt{G}\, dv$$

woraus durch Division

$$\operatorname{tg} \Theta = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du}$$

folgt. Für den vorliegenden Fall ergibt sich

$$\operatorname{tg} \Theta = p \frac{dv}{du}$$

oder, in anderer Anschreibung,

$$dv = \frac{1}{p} \operatorname{tg} \Theta\, du. \qquad \ldots \quad (7)$$

Durch Eintragen dieser Differentialgleichung in (6) erhält man

$$\operatorname{ctg} \Theta\, d\Theta + \frac{p_u}{p} du = 0 \qquad \ldots \quad (8)$$

woraus sich durch Integration

$$ln \sin \Theta + ln\ p = c \qquad \ldots \quad (9)$$

oder $$p \,.\, \sin \Theta = e^c = k,$$

also das Clairaut'sche Theorem, ergibt.

Literatur:

[1] siehe z. B. Baeschlin: Lehrbuch der Geodäsie, Orell-Füssli, Zürich, 1948, S. 23—25, oder Hopfner: Grundlagen der Höheren Geodäsie, Springer, Wien 1949, S. 56.