

Paper-ID: VGI_195803



Graphische Lösungen zur Parallaxenreduktionsmethode

Hans Schmid ¹

¹ *Technische Hochschule Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **46** (1), S. 16–23

1958

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Schmid_VGI_195803,  
Title = {Graphische L{"o}sungen zur Parallaxenreduktionsmethode},  
Author = {Schmid, Hans},  
Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {16--23},  
Number = {1},  
Year = {1958},  
Volume = {46}  
}
```



Graphische Lösungen zur Parallaxenreduktionsmethode

Von H. Schmid

I. Einleitung

In der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen 1954, Heft 3–5, erschien vom Verfasser eine Arbeit unter dem Titel „Die funktionellen Zusammenhänge von γ -Parallaxengröße und Beobachtungsort in einem Stereomodell; ein neues numerisches Orientierungsverfahren“ [1], in der unter anderem Formeln zur Reduktion von γ -Raumparallaxen an der Modelloberfläche in γ -Ebenenparallaxen in einer oder zwei Bezugsebenen abgeleitet wurden. Die Ausgleichung der überschüssigen Parallaxenbeobachtungen erfolgt nach bedingten Beobachtungen, wobei $(n-5)$ Bedingungsgleichungen bestanden, wenn n die Anzahl der beobachteten γ -Parallaxen bedeutete. Sowohl die bedingte Ausgleichung als auch die Parallaxenreduktion wurden numerisch, mit Rechenschiebergenauigkeit durchgeführt. Im folgenden wird diese numerische Orientierung das „Parallaxenreduktionsverfahren“ genannt.

Anlässlich des VIII. Internationalen Kongresses für Photogrammetrie in Stockholm hatte der Autor Gelegenheit, das Aerotriangulationsverfahren von Bjerhammer und Hallert kennenzulernen [2], welches für ebenes Gelände entwickelt wurde. Die Annahme, daß auch für nicht ebenes Gelände die gleichen Formeln gelten, trifft nur bis zu verhältnismäßig geringen Höhenunterschieden zu, wie eine Reihe von Untersuchungen gezeigt hat. Das Parallaxenreduktionsverfahren liefert jedoch Ebenenparallaxen, die für die Methode nach Bjerhammer und Hallert benötigt werden, so daß dadurch die Voraussetzungen zur Anwendung dieser Methode der Aerotriangulation auch für gebirgiges Gelände gegeben sind. Durch einige Umformungen in den Reduktionsformeln bzw. in den Bedingungsgleichungen lassen sich auf graphischem Wege für die praktische Anwendung einfache Lösungen angeben, die sich auch für Einzelmodellorientierungen gut eignen.

II. Lösung des Parallaxenausgleiches

Die allgemeine Bedingungsgleichung (13) aus der eingangs zitierten Arbeit für gebirgiges Gelände lautet

$$p_1^* \frac{Z'_3 + Z'_5}{N'_{35}} - p_2^* \frac{Z'_4 + Z'_6}{N'_{46}} - p_3^* \frac{Z'_3}{N'_{35}} + p_4^* \frac{Z'_4}{N'_{46}} - p_5^* \frac{Z'_5}{N'_{35}} + p_6^* \frac{Z'_6}{N'_{46}} = 0$$

In dieser Gleichung bedeuten p^* die Raumparallaxen und $Z'_n = \frac{Z_n}{Z_1}$, die reduzierten Geländehöhen. Man könnte ebensogut auch die direkt gemessenen Maschinenhöhen verwenden, dies würde aber zu großen Zahlenwerten führen, die für die Ausgleichung ungünstig sind. Da sich der Quotient $Q = \frac{N'_{46}}{N'_{35}}$ einfach konstruieren läßt, formt man die Gleichung (13) um in

$$Q [p_1^* (Z'_3 + Z'_5) - p_3^* Z'_3 - p_5^* Z'_5] - [p_2^* (Z'_4 + Z'_6) - p_4^* Z'_4 - p_6^* Z'_6] = 0 \quad \dots (1)$$

Die Koeffizienten der Bedingungsgleichung bzw. der Verbesserungsgleichung lauten daher

$$\begin{aligned} g_1 &= Q (Z'_3 + Z'_5) \\ g_2 &= - (Z'_4 + Z'_6) \\ g_3 &= - Q Z'_3 \quad \dots \quad (2) \\ g_4 &= + Z'_4 \\ g_5 &= - Q Z'_5 \\ g_6 &= + Z'_6 \end{aligned}$$

Ersetzt man im Quotienten Q die Größen a_n und a'_n durch die entsprechenden Werte aus [1], so ergibt sich

$$\frac{N'_{46}}{N_{35}} = \frac{1 + a'_4 + a'_6}{1 + a_3 + a_5} = \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{Z_4 - Z_2}{K^2} \cdot Z_4 + \frac{1}{2} \frac{Z_6 - Z_2}{K^2} \cdot Z_6}{1 + \frac{1}{2} \frac{Z_3 - Z_1}{K^2} \cdot Z_3 + \frac{1}{2} \frac{Z_5 - Z_1}{K^2} \cdot Z_5}$$

Darin ist

$$a_n = \varepsilon \tilde{\xi}_n Z'_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_1^2}{K^2} \cdot \frac{Z_n - Z_1}{Z_1} \cdot \frac{Z_n}{Z_1} \quad \text{und} \quad a'_n = a_n \left(1 - \frac{\tilde{\xi}_2}{\tilde{\xi}_n} \right) \text{ ist.}$$

Multipliziert man den Zähler und den Nenner mit $2K$ und setzt man für die Z -Differenzen die entsprechenden Modellhöhen ein, so erhält man für

$$Q = \frac{2K + \frac{Z_4 h_4}{K} + \frac{Z_6 h_6}{K}}{2K + \frac{Z_3 h_3}{K} + \frac{Z_5 h_5}{K}} \quad \dots \quad (3)$$

Man hat also entsprechend Figur 1 die Senkrechte zum Bildstrahl mit der Spur der Bezugsebene zum Schnitt zu bringen und erhält sofort mit dem richtigen Vorzeichen die Glieder $\frac{1}{K} Z_n h_n$. In Fig. 1 ist h_3 negativ und h_5 positiv angenommen. Die Strecke $\overline{3'5'}$ stellt den Nenner von Q dar. Eine analoge Konstruktion in der zur x -Achse normalen Ebene durch O_2 ergibt den Zähler, wobei die Bezugsebene durch den Punkt 2 zu legen ist.

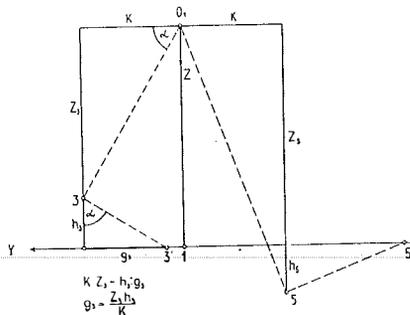


Fig.1

Vor Auflösung der Korrelatengleichung wird noch eine Abschätzung für die Koeffizienten g_n eingefügt, um die notwendige Stellenanzahl zu bestimmen.

Die Korrelate $\bar{\mathfrak{r}}$ der bedingten Ausgleichung ist

$$\bar{\mathfrak{r}} = - \frac{w}{[gg]}.$$

Für die Verbesserungen erhält man $v_n = - \frac{w}{[gg]} g_n$. Setzt man noch für $w = - [gp^*]$ ein, so ergibt sich für die Parallaxenverbesserungen

$$v_n = \frac{[gp^*]}{[gg]} \cdot g_n$$

In expliziter Schreibweise wird dann für 6 Orientierungspunkte

$$v_1 = \frac{g_1 p_1^* + g_2 p_2^* + \dots + g_6 p_6^*}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + \dots + g_6^2} \cdot g_1. \text{ Das totale Differential von } v_1 \text{ nach den}$$

$$\text{Koeffizienten } g_n \text{ ist } dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial g_1} \cdot dg_1 + \frac{\partial v_1}{\partial g_2} \cdot dg_2 + \dots + \frac{\partial v_1}{\partial g_6} \cdot dg_6.$$

Führt man die Differentiation durch, so erhält man für

$$dv_1 = \frac{[gp^*]}{[gg]} \cdot dg_1 + g_1 \frac{[gg] p_1^* dg_1 - 2 [gp^*] g_1 dg_1}{[gg]^2} + g_1 \frac{[gg] p_2^* dg_2 - 2 [gp^*] g_2 dg_2}{[gg]^2} + \dots$$

Faßt man die Differentialquotienten zusammen, so gelangt man schließlich zur Gleichung

$$dv_1 = \frac{[gp^*]}{[gg]} dg_1 + g_1 \frac{[p^* dg]}{[gg]} - 2 g_1 \frac{[gp^*]}{[gg]^2} [gdg]$$

für die überschlägige Berechnung setzt man $dg_1 = dg_2 = \dots = dg_6 = dg$ und ferner alle Z'_n und $Q = 1$.

Da die Summe g aus Gl. (2) Null wird, erhält man schließlich für

$$dv_1 = dg \cdot \frac{1}{[gg]} \cdot ([gp^*] + g_1 [p^*])$$

Für den Widerspruch w kann ein Betrag von 0,2 mm und für die Summe aller y -Raumparallaxen ein solcher von 1,2 mm angenommen werden, das sind Beträge, die in der Praxis sicher nie überschritten werden. Es ergibt sich dann für

$$dv_1 = dg \cdot \frac{1}{12} \cdot 2,6 = dg \cdot 0,22$$

Will man nun dv_1 auf $\pm 0,01$ mm genau erhalten, so genügt es, die Koeffizienten g_n auf $\pm 0,04$ Einheiten zu berechnen; die graphische Ermittlung gestattet es jedoch, mit einfachsten Mitteln 2 Dezimalstellen zu bestimmen, was einer Genauigkeit von rund $\pm 0,002$ mm für die Parallaxenverbesserungen entspricht.

Nachdem die Koeffizienten g_1 bis g_6 berechnet bzw. graphisch bestimmt sind, kann nun die Ausgleichung entweder nach dem Strahlennetz entsprechend der Fig. 2 oder numerisch durchgeführt werden.

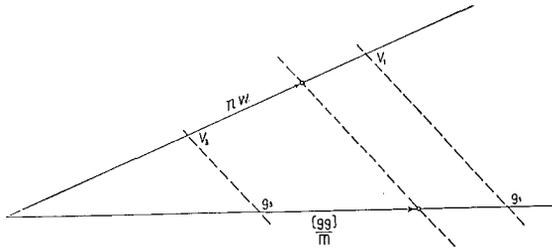


Fig. 2

$$\begin{aligned}
 [gg] &= 8,3 \\
 w &= -0,065 \text{ mm} \\
 m &= 10 \\
 n &= 1000 \\
 v_1 &= \frac{8}{1000} \text{ mm} \\
 &= 0,008 \text{ mm} \\
 v_3 &= 0,004 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Da die Koeffizienten g_n auf $\pm 0,01$ Einheiten genau aufgetragen werden müssen, hat man die Einheit entsprechend groß, etwa 10 cm, zu wählen. Die Summe g^2 liegt in der Größenordnung von 10 Einheiten, man wird daher auf einem Strahl den m -ten Teil der Summe von g^2 auf dem anderen den n -fachen Parallaxenwiderspruch auftragen, wobei die Zahlen m und n von der Größe der Summe g^2 bzw. des Widerspruchs abhängen werden.

III. Graphische Parallaxenreduktion

Legt man die Reduktionsebene durch den Punkt 1, so ist für diesen die Ebenenparallaxe gleich der Raumparallaxe. Für den Punkt 2 lautet die Reduktionsgleichung

$$p_2 = p_2^* + (p_1^* - p_3^*) \frac{a_2 Z'_3}{N} + (p_1^* - p_5^*) \frac{a_2 Z'_5}{N} \quad (10b) \text{ aus [1]}$$

Die entsprechenden Werte für a_2 , Z'_3 , Z'_5 und N eingesetzt, ergeben für

$$\begin{aligned}
 p_2 = p_2^* + (p_1^* - p_3^*) \cdot & \frac{\frac{1}{2} \frac{Z_1^2}{K^2} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1} \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z_1}}{\frac{Z_2}{Z_1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{Z_1^2}{K^2} \frac{Z_3 - Z_1}{Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z_1} + \frac{1}{2} \frac{Z_1^2}{K^2} \frac{Z_5 - Z_1}{Z_1} \cdot \frac{Z_5}{Z_1} \right)} + \\
 + (p_1^* - p_5^*) & \frac{\frac{1}{2} \frac{Z_1^2}{K^2} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1} \frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_5}{Z_1}}{\dots\dots\dots}
 \end{aligned}$$

Nach Erweiterung des Bruches mit $2K$ erhält man für die Ebenenparallaxe schließlich jene Form, die nach Figur 3 graphisch einfach zu lösen ist.

$$p_2 = p_2^* + (p_1^* - p_3^*) \frac{\frac{h_2}{K} \cdot Z_3}{2K + \frac{Z_3 h_3}{K} + \frac{Z_5 h_5}{K}} + (p_1^* - p_5^*) \frac{\frac{h_2}{K} \cdot Z_5}{2K + \frac{Z_3 h_3}{K} + \frac{Z_5 h_5}{K}}$$

Die gemessene und ausgeglichene Raumparallaxe p_2^* ist um die Beträge $\frac{a}{3' 5'}$.

$(p_1^* - p_3^*)$ und $\frac{b}{3' 5'}$ $\cdot (p_1^* - p_5^*)$ zu reduzieren. Eine Überschlagsrechnung zeigt,

daß es genügt, die Quotienten $\frac{a}{3' 5'}$ und $\frac{b}{3' 5'}$ auf $\pm 0,1$ zu bestimmen, um die

Reduktionswerte auf etwa $\pm 0,002$ mm zu erhalten. Diese Genauigkeit ist beispielsweise noch zu erreichen, wenn die Maschinenkoordinaten für die Kartierung der Vertikalschnitte etwa 10fach verjüngt und die Strecken auf $\pm 0,5$ mm abgegriffen werden.

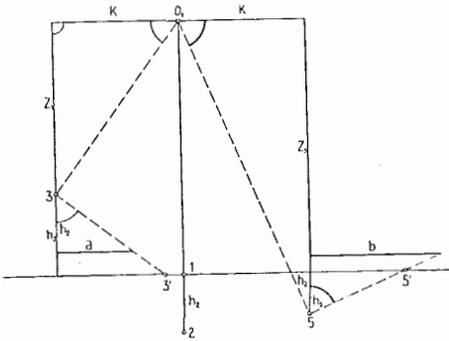


Fig. 3

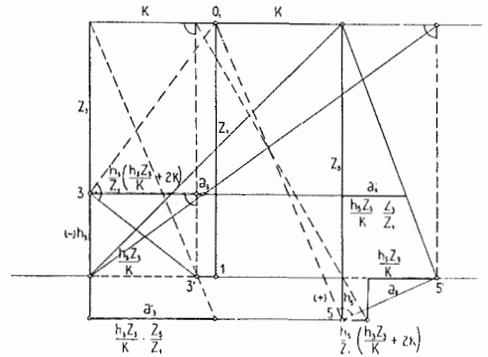


Fig. 4

Für die Punkte 3 und 5 lauten die Reduktionsgleichungen

$$p_3 = p_3^* + (p_1^* - p_3^*) \frac{a_3 - \xi_3 A_5}{N_{35}} + (p_1^* - p_5^*) \frac{a_3 Z'_5}{N_{35}} \quad (10c) \text{ aus [1]}$$

und

$$p_5 = p_5^* + (p_1^* - p_3^*) \frac{a_5 Z'_3}{N_{35}} + (p_1^* - p_5^*) \frac{a_5 - \xi_5 A_3}{N_{35}} \quad (10e) \text{ aus [1]}$$

Analoge Umformungen wie für die Gleichung (10b) ergeben dann

$$p_3 = p_3^* + (p_1^* - p_3^*) \frac{\frac{h_3 Z_3}{K} - \frac{h_3}{Z_1} \left(\frac{h_5 Z_5}{K} + 2K \right)}{3' 5'} + (p_1^* - p_5^*) \frac{\frac{h_3 Z_3}{K} \cdot \frac{Z_5}{Z_1}}{3' 5'} \text{ und}$$

$$p_5 = p_5^* + (p_1^* - p_3^*) \frac{\frac{h_5 Z_5}{K} \cdot \frac{Z_3}{Z_1}}{3' 5'} + (p_1^* - p_5^*) \frac{\frac{h_5 Z_5}{K} - \frac{h_5}{Z_1} \left(\frac{h_3 Z_3}{K} + 2K \right)}{3' 5'}$$

In Figur 4 sind die Konstruktionslinien für die Reduktion der y -Parallaxen in den Modellpunkten 3 und 5 dargestellt.

Die reduzierten Parallaxen p_3 und p_5 sind demnach

$$p_3 = p_3^* + (p_1^* - p_3^*) \frac{a_3}{3' 5'} + (p_1^* - p_5^*) \frac{a_3'}{3' 5'} \quad \text{und}$$

$$p_5 = p_5^* + (p_1^* - p_3^*) \frac{a_5'}{3' 5'} + (p_1^* - p_5^*) \frac{a_5}{3' 5'}$$

Schließlich ist noch die Raumparallaxe p_4^* zu reduzieren. Die bezügliche Gleichung (10d) aus [1] lautet:

$$p_4 = p_4^* + (p_1^* - p_3^*) \frac{a_4 Z_3' \left(1 - \frac{\xi_2}{Z_4'}\right)}{N_{35}} + (p_1^* - p_5^*) \frac{a_4 Z_5' \left(1 - \frac{\xi_2}{Z_4'}\right)}{N_{35}} - (p_2^* - p_4^*) \cdot \xi_4$$

Entsprechende Umformungen für die Konstruktion ergeben für

$$p_4 = p_4^* + (p_1^* - p_3^*) \frac{\frac{h_4 Z_4}{K} \cdot \frac{Z_3}{Z_1} - \frac{h_4 h_2}{K} \cdot \frac{Z_3}{Z_1}}{2K + \frac{h_3 Z_3}{K} + \frac{h_5 Z_5}{K}} + (p_1^* - p_5^*) \frac{\frac{h_4 Z_4}{K} \cdot \frac{Z_5}{Z_1} - \frac{h_4 h_2}{K} \cdot \frac{Z_5}{Z_1}}{2K + \dots} - (p_2^* - p_4^*) \frac{h_4}{Z_1}$$

Daraus resultiert eine reduzierte Raumparallaxe für den Punkt 4 mit

$$p_4 = p_4^* + (p_1^* - p_3^*) \cdot \frac{a_3}{3'5'} + (p_1^* - p_5^*) \frac{a_3'}{3'5'} - (p_2^* - p_4^*) \frac{h_4}{Z_1}$$

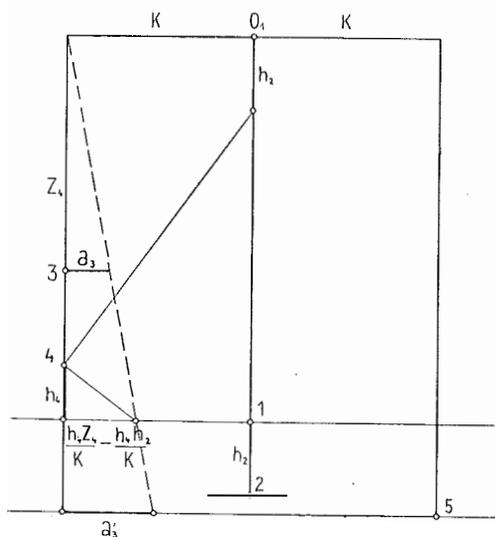


Fig. 5

In der beigelegten Tafel sind alle Konstruktionslinien für das erste praktische Beispiel aus der bereits mehrfach zitierten Arbeit [1] ausgeführt. Die erhaltenen Ergebnisse stimmen mit den numerischen Daten bis auf Abrundungsgrößen überein.

Durch diese graphische Lösung scheint das Parallaxenreduktionsverfahren für die Praxis als rasches und strenges Verfahren besonders geeignet zu sein.

Berechnungen aus den Figuren 6:

$$Q = \frac{79.8}{170.0} = 0.47, \quad B = 82.43 \text{ mm}, \quad K = 80.0 \text{ mm}, \quad Z_1 = 248.5 \text{ mm}$$

	1	2	3	4	5	6	
Z'	1.00	1.02	1.05	0.91	1.15	1.11	
g	1.035	-2.010	-0.490	+0.910	-0.540	+1.110	7.65 [gg]
p^*	0	0	+0.150	-0.010	+0.160	+0.100	
gp^*	0	0	-0.074	-0.009	-0.087	+0.111	-0.059 w
v	+0.008	-0.016	-0.004	+0.007	-0.004	+0.009	
p_a	+0.008	-0.016	+0.146	-0.003	+0.156	+0.109	
gp_a	+0.008	+0.032	-0.072	-0.003	-0.084	+0.121	+0.002 [gp _a]

$$p_1 = +0.008 \text{ mm}$$

$$p_2 = -0.016 + (-0.138) \frac{0.9}{17.0} + (-0.148) \frac{1.2}{17.0} = -0.033 \text{ mm}$$

$$p_3 = +0.146 + (-0.138) \frac{1.2}{17.0} + (-0.148) \frac{2.3}{17.0} = +0.116 \text{ mm}$$

$$p_4 = -0.003 + 0.138 \frac{3.1}{17.0} + 0.148 \frac{3.4}{17.0} - 0.013 \frac{1.1}{12.3} = +0.051 \text{ mm}$$

$$p_5 = +0.156 - 0.138 \frac{7.3}{17.0} - 0.148 \frac{5.5}{17.0} = +0.049 \text{ mm}$$

Für die Berechnung der Orientierungselemente verwendet man die Gleichungen (2) und (3) aus der Arbeit [1] — die der Vollständigkeit halber nochmals angeführt werden —, und zwar gilt die folgende Vorzeichenregel für WILD-Geräte A7 und A8.

Fall A) Triangulation von links nach rechts

Basis innen: rechte Kammer „neu“

Basis außen: linke Kammer „neu“

$$d\varphi = \frac{Z}{BK} (-p_1 + p_2 + p_3 - p_4) \quad dby = Z \cdot dw + p_2$$

$$dx = \frac{1}{B} (p_1 - p_2) \quad dbz = \frac{Z}{K} \left(-p_1 + p_2 - p_4 + \frac{p_3 + p_5}{2} \right)$$

$$d\omega = \frac{Z}{2K^2} (2p_1 - p_3 - p_5)$$

Fall B) Triangulation von rechts nach links

Basis innen: linke Kammer „neu“

Basis außen: rechte Kammer „neu“

$$d\varphi = \frac{Z}{BK} (p_1 - p_2 - p_3 + p_4) \quad dby = Z \cdot dw + p_2$$

$$dx = \frac{1}{B} (-p_1 + p_2) \quad dbz = \frac{Z}{K} \left(-p_1 + p_2 - p_4 + \frac{p_3 + p_5}{2} \right)$$

$$d\omega = \frac{Z}{2K^2} (2p_1 - p_3 - p_5)$$

Die Messung der γ -Parallaxen geschieht in jedem Fall mit der $b\gamma$ -Schraube der „neuen Kammer“ und die Punktbezeichnung erfolgt so, daß immer mit 1 der Nadirpunkt der „alten“ und mit 2 der Nadirpunkt der „neuen“ Kammer bezeichnet wird. 3 und 4 sind die vom Beobachter abgewandten und 5 bzw. 6 die dem Beobachter zugewandten Modellpunkte.

Literaturverzeichnis:

- [1] Schmid H.: „Die funktionellen Zusammenhänge von γ -Parallaxengröße und Beobachtungsort in einem Stereomodell; ein neues numerisches Orientierungsverfahren”.
Ö. Z. f. V. W. 1954/3–5.
- [2] Bjerhammar A.: „Further results with the parallax triangulation method” Svensk Lantmäteritidskrift, Congress Number 1956.

Mitteilungen

Zur Berufung des ord. Prof. Dr. Josef Krames an die Technische Hochschule in Wien

Wie wir im Mitteilungsblatt zur ÖZfV., 1957, S. 36 berichteten, wurde o. Professor i. R. Dr. Krames mit Beginn des laufenden Studienjahres am 11. Juni 1957 zum ord. Professor und Vorstand des I. Institutes für Geometrie an der Technischen Hochschule in Wien ernannt. Da der Genannte in den Jahren 1948 bis 1956 am Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen zum Teil mit Werkvertrag, zum Teil mit besonderem Auftrag des Amtes wissenschaftlich tätig war und erfolgreich in die theoretische Entwicklung der modernen Photogrammetrie eingegriffen hat, ist es uns eine angenehme Pflicht, auch in diesen Blättern auf seinen Werdegang als Lehrer und Forscher näher einzugehen.

Prof. Krames wurde am 7. Oktober 1897 in Wien als Sohn eines Staatsbeamten geboren. 1908 kam er nach der Volksschule an die Schubert-Realschule im IX. Bezirk, die diesen Namen deshalb führte, weil im gleichen Haus, in der Grünen Torgasse, Franz Schubert als Lehrer gewirkt hatte. Später übersiedelte die Realschule in die im gleichen Bezirk gelegene Glasergasse, wo Krames 1915 die Maturitätsprüfung mit Auszeichnung ablegte.

Um das Mittelschullehramt für Mathematik und Darstellende Geometrie zu erlangen, inskribierte er an der Technischen Hochschule in Wien die einschlägigen Fächer und die Ergänzungsfächer an der Wiener Universität und legte schon nach zwei Jahren die I. Staatsprüfung aus dem Bauingenieurfach ab. Sein Studiengang erinnert vielfach an den Hofrat Doležal, der ja auch Lehramtskandidat für die gleichen Fächer war. Beide erweckten durch ihren Fleiß, ihr Interesse und ihre Begabung die besondere Aufmerksamkeit eines ihrer Fachprofessoren und wurden von diesem schon während ihrer Studienzeit zu Assistentendiensten verwendet. Doležal wurde a. o. Assistent



Photo · Kobé

J. Krames.