

Paper-ID: VGI\_195802



## Richtungs- und Streckenreduktion bei ebenen konformen Abbildungen langer geodätischer Strecken

Karl Hubeny <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Technische Hochschule Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **46** (1), S. 8–15

1958

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_195802,  
  Title = {Richtungs- und Streckenreduktion bei ebenen konformen Abbildungen  
    langer geod{\a}tischer Strecken},  
  Author = {Hubeny, Karl},  
  Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {8--15},  
  Number = {1},  
  Year = {1958},  
  Volume = {46}  
}
```



## Richtungs- und Streckenreduktion bei ebenen konformen Abbildungen langer geodätischer Strecken

Von Karl Hubeny, Graz

In jüngster Gegenwart besteht — der instrumentellen Entwicklung folgend — bei der rechnerischen Verarbeitung von Meßergebnissen ein erhöhtes Interesse an Lösungswegen für die geodätischen Hauptaufgaben über größere Entfernungen. Da diese Aufgaben oft vorteilhaft in einer ebenen konformen Abbildung der benützten Bezugsfläche berechnet werden oder dieser Lösungsweg gesucht wird, so besteht ebenso das Bedürfnis nach Formelsystemen für die Richtungs- und Streckenreduktion, die für die Rechnung in der Bildebene hinsichtlich ihrer Genauigkeit den auftretenden Anforderungen genügen können.

Über die Berechnung der Richtungs- und Streckenreduktion gibt es eine reichhaltige Literatur, die teilweise recht elegante und durchsichtige Lösungen bringt. Dabei denke ich besonders an die Entwicklungen in der 1943 erschienenen Arbeit von Hristow „Die Gauß-Krügerschen Koordinaten auf dem Ellipsoid“, § 11, Seite 30, die das oft recht umständlich behandelte Problem in einer vergleichsweise geradezu verblüffend einfachen Form lösen. Wenn ich den bekannten Ableitungen für die Richtungs- und Entfernungsreduktion bei konformen Abbildungen im folgenden nunmehr noch eine weitere hinzufüge, so geschieht dies aus dem Grund, weil die mitzuteilende Entwicklung wegen ihrer Einfachheit die Angabe der Reduktionen mit hoher Genauigkeit gestattet und somit für die Berechnung der Hauptaufgaben beim Vorliegen langer geodätischer Strecken von einigem Interesse sein dürfte.

Zunächst zur konformen Abbildung. Man denke sich ein Paar thermischer Parameter der abzubildenden Fläche passend gewählt und diese mit ebenen cartesischen Koordinaten identifiziert; ein Zahlenpaar  $x, y$  erhält damit eine doppelte geometrische Bedeutung: Es bezeichnet einerseits die Lage eines Punktes in der abzubildenden Fläche, andererseits die Lage seines Bildpunktes in der Bildebene.

Löst man die Hauptaufgabe in der vorliegenden Fläche im Sinne der Legendreschen Reihenentwicklungen, so gelten für den Endpunkt  $P_2 (x_2 y_2)$  einer von einem Punkt  $P_1 (x_1 y_1)$  unter dem geodätischen Richtungswinkel  $\Theta_1$  ausgehenden geodätischen Strecke  $s$  die Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \Delta x_{1,2} = \frac{1}{1!} \frac{dx}{ds} s + \frac{1}{2!} \frac{d^2x}{ds^2} s^2 + \dots \\ y_2 - y_1 &= \Delta y_{1,2} = \frac{1}{1!} \frac{dy}{ds} s + \frac{1}{2!} \frac{d^2y}{ds^2} s^2 + \dots \end{aligned} \quad (1a, b)$$

Die Änderung des geodätischen Richtungswinkels beim Durchlaufen der geodätischen Strecke  $P_1 P_2 = s$  ergibt sich für den Endpunkt  $P_2$  mit

$$\Theta_2 - \Theta_1 = \Delta \Theta_{1,2} = \frac{1}{1!} \frac{d\Theta}{ds} s + \frac{1}{2!} \frac{d^2\Theta}{ds^2} s^2 + \dots \quad (1c)$$

Für die Bildung der Differentialquotienten in (1) geht man von den in einem isothermen krummlinigen Koordinatensystem bestehenden fundamentalen Beziehungen

$$\frac{dx}{ds} = m \cos \Theta, \quad \frac{dy}{ds} = m \sin \Theta \quad (2)$$

aus, worin die Größe  $m$  eine Ortsfunktion, nämlich die Maßzahl der Dichte der Koordinatenlinien an der betrachteten Stelle, oder, in der Bildebene betrachtet, den Abbildungsmaßstab darstellt. Zu den Gleichungen (2) tritt noch jene Differentialgleichung, der die geodätischen Kurven genügen, nämlich

$$\frac{d\Theta}{ds} = -m_y \cos \Theta + m_x \sin \Theta. \quad (3)$$

(Die Indices  $x, y$  bei  $m$  zeigen partielle Ableitungen nach den Parametern  $x$  und  $y$  an.)

Mit Hilfe von (2) und (3) können die in (1) angezeigten Ableitungen der Parameter nach der Bogenlänge gebildet werden, deren Eintragung in (1) die bekannten, von Wl. K. Hristow in der Zeitschrift für Vermessungswesen, 1937, Seite 171–178 angegebenen Potenzreihen der ersten Hauptaufgabe in einem isothermen Koordinatensystem ergeben. Unter Beschränkung auf die Angabe bis zu den Gliedern von der Ordnungszahl zwei lauten diese Potenzreihen wie folgt:

$$\begin{aligned} \Delta x_{1,2} = m s \cos \Theta_1 + \frac{1}{2} m m_x s^2 \cos^2 \Theta_1 + m m_y s^2 \cos \Theta_1 \sin \Theta_1 - \\ - \frac{1}{2} m m_x s^2 \sin^2 \Theta_1 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y_{1,2} = m \cdot s \cdot \sin \Theta_1 - \frac{1}{2} m m_y s^2 \cos^2 \Theta_1 + m m_x s^2 \cos \Theta_1 \sin \Theta_1 + \\ + \frac{1}{2} m m_y s^2 \sin^2 \Theta_1 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \Theta_{1,2} = -m_y s \cos \Theta_1 + m_x s \sin \Theta_1 + \frac{1}{2} \left[ -m_x m_y - m_{xy} \right] s^2 \cos^2 \Theta_1 + \\ + \frac{1}{2} \left[ m_x^2 - m_y^2 + m m_{xx} - m m_{yy} \right] s^2 \cos \Theta_1 \sin \Theta_1 + \\ + \frac{1}{2} \left[ m_x m_y + m m_{xy} \right] s^2 \sin^2 \Theta_1 + \dots \end{aligned} \quad (4a, b, c)$$

Die Umkehrung der Potenzreihen (4a, b) und deren Eintragung in (4c) ergibt das Formelsystem der zweiten Hauptaufgabe mit

$$s \cos \Theta_1 = \frac{1}{m} \Delta x_{1,2} - \frac{m_x}{2m^2} \Delta x_{1,2}^2 - \frac{m_y}{m^2} \Delta x_{1,2} \Delta y_{1,2} + \frac{m_x}{2m^2} \Delta y_{1,2}^2 + \dots$$

$$s \sin \Theta_1 = \frac{1}{m} \Delta y_{1,2} + \frac{m_y}{2m^2} \Delta x_{1,2}^2 - \frac{m_x}{m^2} \Delta x_{1,2} \Delta y_{1,2} - \frac{m_y}{2m^2} \Delta y_{1,2}^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} \Delta \Theta_{1,2} = -\frac{m_y}{m} \Delta x_{1,2} + \frac{m_x}{m} \Delta y_{1,2} + \frac{1}{2m^2} \left[ m_x m_y - m m_{xy} \right] \Delta x_{1,2}^2 + \\ + \frac{1}{2m^2} \left[ -m_x^2 + m_y^2 + m m_{xx} - m m_{yy} \right] \Delta x_{1,2} \Delta y_{1,2} + \\ + \frac{1}{2m^2} \left[ -m_x m_y + m m_{xy} \right] \Delta y_{1,2}^2 + \dots \end{aligned} \quad (5a, b, c)$$

In (4) und (5) ist die Ortsfunktion  $m$  im Punkt  $P_1$  zu nehmen; die Indices zeigen — wie schon in (3) — partielle Ableitungen von  $m$  nach den Parametern an.  $m_x^2$  usw. ist immer als  $(m_x)^2$  zu lesen.

Die vorhin angegebenen Potenzreihen (4a, b) stellen die Grundlage für die vorzunehmende Berechnung der Richtungs- und Streckenreduktionen dar. Flächentheoretisch hat man in ihnen eine Parameterdarstellung einer geodätischen Kurve mit der Bogenlinie  $s$  als Parameter vor sich; da aber jedem Parameterpaar  $x, y$  der Fläche, also jedem Flächenpunkt, durch die Identifizierung der thermischen Parameter  $x, y$  mit ebenen cartesischen Koordinaten auch ein Punkt  $x, y$  der Bildebene zugeordnet ist, stellen sie auch die Gleichung der Bildkurve der betrachteten geodätischen Kurve dar. Der Parameter  $s$  verliert dadurch natürlich nicht seine ursprüngliche Bedeutung; in der Bildebene sind die Gleichungen (4a, b) eine Parameterdarstellung der Bildkurve, in der der Parameter  $s$  nicht die Bogenlänge der Bildkurve selbst, sondern wie früher jene der abgebildeten geodätischen Kurve bedeutet.

In diesem letzteren Sinne mögen die Gleichungen (4a, b) nunmehr betrachtet werden. In Abbildung 1 ist die Bildebene für ein isothermes Koordinatensystem angedeutet, in dem die Dichte der Koordinatenlinien in der positiven  $x$ -Richtung positiv zunimmt. Demzufolge muß das Bild einer geodätischen Strecke  $P_1 P_2 = s$  als Bildkurve zwischen den Bildpunkten  $\bar{P}_1$  und  $\bar{P}_2$  eine gekrümmte Linie sein, deren konvexe Seite in die Richtung der Zunahme der Dichte der Koordinatenlinien, d. h. in die Richtung des Anwachsens des Abbildungsmaßstabes, zeigt.

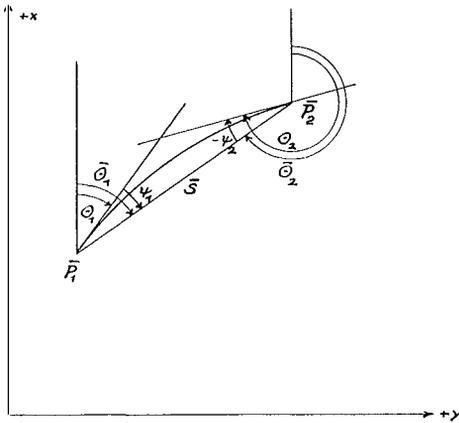


Abb. 1

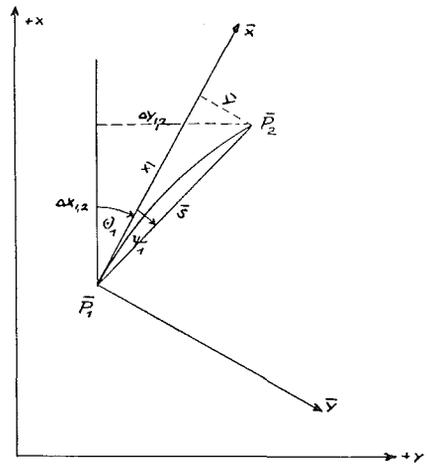


Abb. 2

Als „Richtungsreduktion“ bezeichnet man nun die Richtungs­differenz

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \bar{\Theta}_1 - \Theta_1 \\ \Psi_2 &= \bar{\Theta}_2 - \Theta_2,\end{aligned}\tag{6a, b}$$

während als „Streckenreduktion“ die Differenz

$$\Delta s = \bar{s} - s\tag{7a}$$

oder der Quotient

$$q = \frac{\bar{s}}{s} \quad (7b)$$

angesprochen wird. Es handelt sich demnach um den Übergang von den Bestimmungsstücken der geodätischen Strecke  $s$  zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  der ursprünglichen Fläche zu den Bestimmungsstücken der geodätischen Strecke (Gerade)  $\bar{s}$  zwischen den Bildpunkten in der Koordinatenebene.

Denkt man sich nach Abb. 2 im Anfangspunkt  $\bar{P}_1$  der Bildkurve den Ursprung eines Koordinatensystems  $\bar{x}, \bar{y}$ , dessen  $x$ -Achse Tangente an die Bildkurve im Punkt  $\bar{P}_1$  ist, so ist die Richtungsreduktion  $\Psi_1$  der auf  $\bar{x}, \bar{y}$  bezogene Richtungswinkel der Sehne  $\bar{P}_1 \bar{P}_2 = \bar{s}$  und daher aus

$$\operatorname{tg} \Psi_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \quad (8)$$

zu berechnen. Da der Endpunkt  $\bar{P}_2$  gegenüber dem Anfangspunkt die nach (4a, b) zu berechnenden Koordinatenunterschiede  $\Delta x_{1,2}$  und  $\Delta y_{1,2}$  aufweist, sind seine quergestrichenen Koordinaten daraus durch eine Koordinatentransformation nach

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \Delta x_{1,2} \cos \Theta_1 + \Delta y_{1,2} \sin \Theta_1 \\ \bar{y} &= \Delta y_{1,2} \cos \Theta_1 - \Delta x_{1,2} \sin \Theta_1 \end{aligned} \quad (9)$$

zu berechnen, womit man aus (8)

$$\operatorname{tg} \Psi_1 = \frac{\Delta y_{1,2} \cos \Theta_1 - \Delta x_{1,2} \sin \Theta_1}{\Delta x_{1,2} \cos \Theta_1 + \Delta y_{1,2} \sin \Theta_1} \quad (10)$$

erhält. Hierin wären nunmehr die Gleichungen (4a, b) einzutragen; wünscht man noch von der Tangente auf den Bogen überzugehen, so ergibt die Anwendung der arc tg-Reihe

$$\Psi = \operatorname{tg} \Psi - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \Psi + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \Psi - \dots \quad (11)$$

das gesuchte endgültige Ergebnis.

Zur Berechnung des Ausdrucks (10) und für den nach (11) erfolgenden Übergang auf den Bogen bedient man sich zweckmäßig des nachstehenden Vorganges. Vereinfacht angeschrieben, lauten die Potenzreihen (4a, b)

$$\Delta x_{1,2} = m s \cos \Theta_1 + G_x, \quad \Delta y_{1,2} = m s \sin \Theta_1 + G_y. \quad (12)$$

Damit geht (10) über in

$$\operatorname{tg} \Psi_1 = \frac{m s \cos \Theta_1 \sin \Theta_1 + G_y \cos \Theta_1 - m s \cos \Theta_1 \sin \Theta_1 - G_x \sin \Theta_1}{m s \cos^2 \Theta_1 + G_x \cos \Theta_1 + m s \sin^2 \Theta_1 + G_y \sin \Theta_1}$$

und nach entsprechender Zusammenziehung, in

$$\operatorname{tg} \Psi_1 = \frac{G_y \cos \Theta_1 - G_x \sin \Theta_1}{m s \left[ 1 + \frac{1}{m s} (G_x \cos \Theta_1 + G_y \sin \Theta_1) \right]}. \quad (13)$$

Setzt man

$$\frac{1}{m s} \left[ G_y \cos \Theta_1 - G_x \sin \Theta_1 \right] = D_1 \quad (14a)$$

$$\frac{1}{m s} \left[ G_x \cos \theta_1 + G_y \sin \theta_1 \right] = D_2 \quad (14b)$$

und weiter

$$\frac{D_1}{1 + D_2} = A, \quad (14c)$$

so ist

$$\operatorname{tg} \Psi_1 = A \quad (15)$$

und, als endgültiges Ergebnis

$$\Psi_1 = A - \frac{1}{3} A^3 + \frac{1}{5} A^5 - \dots \quad (16)$$

Zur Berechnung der Richtungsreduktion ist demnach aus (4a, b) bei Beachtung von (12) und (14) der Ausdruck – unter Benützung des binomischen Satzes –

$$A = \frac{D_1}{1 + D_2} = D_1 (1 - D_2 + D_2^2 - D_2^3 + \dots)$$

zu bilden und in (16) einzusetzen, womit die Berechnung der Richtungsreduktion  $\Psi_1$  beendet ist.

Die Richtungsreduktion  $\Psi_2$  im Endpunkt läßt sich nach dem bekannten Zusammenhang

$$\Delta \theta_{1,2} = \Psi_1 - \Psi_2$$

aus

$$\Psi_2 = \Psi_1 - \Delta \theta_{1,2} \quad (17)$$

d. h. aus den Formeln (16) und (4c) angeben, worauf nicht näher eingegangen werden soll.

Um zur Streckenreduktion zu kommen, sei es nun in der Form

$$\Delta s = \bar{s} - s$$

oder in der Form

$$q = \frac{\bar{s}}{s},$$

muß auf irgend einem Wege die Strecke  $\bar{s}$  als Funktion von  $s$  dargestellt werden können.

Der Abbildung 2 entnimmt man die Beziehungen

$$\bar{s} = \frac{\bar{y}}{\sin \Psi_1} = \frac{\bar{x}}{\cos \Psi_1}; \quad (18)$$

diese Gleichungen stellen schon die gesuchte Lösung dar, da sowohl  $\bar{y}$ ,  $\bar{x}$  als auch  $\sin \Psi_1$ ,  $\cos \Psi_1$  Funktionen von  $s$  sind. Es ist daher die Gleichung (18) lediglich für die praktische Benützung besser brauchbar zu machen, als sie es in der vorliegenden Form ist. Man geht dabei zweckmäßig von dem zweiten Ausdruck für  $\bar{s}$ , nämlich von

$$\bar{s} = \frac{\bar{x}}{\cos \Psi_1},$$

aus. Unter Benützung von

$$\operatorname{tg} \Psi_1 = A, \quad \frac{1}{\cos \Psi_1} = \sqrt{1 + A^2} \quad (19)$$

erhält man zunächst

$$\bar{s} = \bar{x} \sqrt{1 + A^2} ; \quad (20)$$

nun ist aber nach (12) und (14b)

$$\bar{x} = m s (1 + D_2),$$

woraus sich

$$\frac{\bar{s}}{s} = m (1 + D_2) \sqrt{1 + A^2} \quad (21 a)$$

oder, durch Anwendung des binomischen Satzes auf den dritten Faktor,

$$\frac{\bar{s}}{s} = m \left[ 1 + D_2 \right] \left[ 1 + \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{8} A^4 + \dots \right] \quad (21 b)$$

ergibt. Wünscht man die Streckenreduktion als Differenz  $\bar{s} - s$  darzustellen, so denke man sich (21 b) ausmultipliziert

$$\bar{s} = m s \left[ 1 + D_2 + \frac{1}{2} A^2 (1 + D_2) - \frac{1}{8} A^4 (1 + D_2) + \dots \right]$$

und in die Form

$$\bar{s} = m s + m s \left[ D_2 + \frac{1}{2} A^2 (1 + D_2) - \frac{1}{8} A^4 (1 + D_2) + \dots \right]$$

umgeschrieben. Durch die Substitution

$$m = 1 + \mu; \quad \mu = m - 1$$

kann im ersten Gliede rechter Hand die Größe  $s$  abgespalten werden, womit auch schon die gewünschte Form von (21 b), nämlich

$$\bar{s} - s = \Delta s = (m - 1) s + m s \left[ D_2 + \frac{1}{2} A^2 (1 + D_2) - \frac{1}{8} A^4 (1 + D_2) + \dots \right] \quad (21 c)$$

gegeben ist

Die Richtungs- und die Streckenreduktion kann somit mit den aus (4a, b) zu bildenden Hilfsgrößen  $A$  und  $D_2$  in jeder beliebigen Genauigkeit aus den Formeln (16) und (21) angegeben werden. Sind die Potenzreihen (4a, b) bis zur Ordnungszahl  $n$  der Potenzen und Produkte ihrer Veränderlichen  $s \cos \Theta_1$  und  $s \sin \Theta_1$  vorliegend, so ergibt sich für die Richtungsreduktion die Ordnungszahl  $n - 1$ , für die Streckenreduktion ebenfalls die Ordnungszahl  $n - 1$  der Produkte im Reduktionsfaktor; beide Ausdrücke entstehen immer in Form von Potenzreihen mit den Veränderlichen  $s \cos \Theta_1$  und  $s \sin \Theta_1$ .

Wie gerade erwähnt wurde, sind die Veränderlichen der Ergebnisse (16) und (21) die Streckenlänge  $s$  und die im Anfangspunkt  $P_1$  bestehende Richtung  $\Theta_1$  der geodätischen Strecke  $P_1 P_2 = s$ . Die in dieser Form erfolgende Angabe der Richtungs- und Streckenreduktion eignet sich daher direkt zur Berechnung der ersten Hauptaufgabe, da bei dieser die Elemente  $\Theta_1$  und  $s$  gegeben sind. Die Berechnung der zweiten Hauptaufgabe setzt die Ermittlung von Näherungswerten für  $s \cos \Theta_1$  und  $s \sin \Theta_1$  voraus, die ohne weiteres aus

$$s \cos \Theta_1 \doteq \bar{s} \cos \bar{\Theta}_1 = \Delta x_{1,2}, \quad s \sin \Theta_1 \doteq \bar{s} \sin \bar{\Theta}_1 = \Delta y_{1,2}$$

entnommen werden können. Eine strenge Lösung dafür entsteht durch Eintragen von (5a, b) in (16) und (21), was aber zweckmäßig erst nach der Ausrechnung dieser Ausdrücke vorgenommen wird.

Abschließend sei eine nach den Formeln (16) und (21c) erfolgte Weiterentwicklung der allgemeinen Formeln zur Berechnung der Richtungs- und Streckenreduktion (Wl. K. Hristow, Zeitschrift für Vermessungswesen 1938, Seite 457–466) mitgeteilt. Als Funktionen von Richtung und Strecke dargestellt, erhält man die nachstehenden Reduktionsgrößen:

$$\begin{aligned}
 \Psi = & -\frac{m_y}{2} s \cos \Theta_1 + \frac{m_x}{2} s \sin \Theta_1 + \frac{1}{12} \left[ -3 m_x m_y - 2 m m_{xy} \right] s^2 \cos^2 \Theta_1 + \\
 & + \frac{1}{12} \left[ 3 m_x^2 - 3 m_y^2 + 2 m m_{xx} - 2 m m_{yy} \right] s^2 \cos \Theta_1 \sin \Theta_1 + \frac{1}{12} \left[ 3 m_x m_y + \right. \\
 & + 2 m m_{xy} \left. \right] s^2 \sin^2 \Theta_1 + \frac{1}{24} \left[ (-2 m_x^2 m_y + 2 m_y^3) + m (-3 m_x m_{xy} - 3 m_y m_{xx} + \right. \\
 & + m_y m_{yy}) + m^2 (-m_{xxy}) \left. \right] s^3 \cos^3 \Theta_1 + \frac{1}{24} \left[ (-22 m_x m_y^2 + 2 m_x^3) + m (6 m_x m_{xx} - \right. \\
 & - 4 m_x m_{yy} - 11 m_y m_{xy}) + m^2 (m_{xxx} - 2 m_{xyy}) \left. \right] s^3 \cos^2 \Theta_1 \sin \Theta_1 + \frac{1}{24} \left[ (+ 22 m_x^2 m_y - \right. \\
 & - 2 m_y^3) + m (11 m_x m_{xy} - 6 m_y m_{yy} + 4 m_y m_{xx}) + m^2 (2 m_{xxy} - m_{yyy}) \left. \right] s^3 \cos \Theta_1 \sin^2 \Theta_1 + \\
 & + \frac{1}{24} \left[ (-2 m_x^3 + 2 m_x m_y^2) + m (-m_x m_{xx} + 3 m_x m_{yy} + 3 m_y m_{xy}) + \right. \\
 & + m^2 (m_{xyy}) \left. \right] s^3 \sin^3 \Theta_1 + \dots
 \end{aligned} \tag{22a}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta s = \bar{s} - s = & (m - 1) s + m s \left\{ \frac{m_x}{2} s \cos \Theta_1 + \frac{m_y}{2} s \sin \Theta_1 + \frac{1}{24} \left[ 4 m_x^2 - \right. \right. \\
 & - 5 m_y^2 + 4 m m_{xx} \left. \right] s^2 \cos^2 \Theta_1 + \frac{1}{24} \left[ 18 m_x m_y + 8 m m_{xy} \right] s^2 \cos \Theta_1 \sin \Theta_1 + \\
 & + \frac{1}{24} \left[ -5 m_x^2 + 4 m_y^2 + 4 m m_{yy} \right] s^2 \sin^2 \Theta_1 + \frac{1}{48} \left[ (2 m_x^3 - 13 m_x m_y^2) + \right. \\
 & + m (8 m_x m_{xx} - 10 m_y m_{xy}) + m^2 (2 m_{xxx}) \left. \right] s^3 \cos^3 \Theta_1 + \frac{1}{48} \left[ (32 m_x^2 m_y - \right. \\
 & - 13 m_y^3) + m (26 m_x m_{xy} + 18 m_y m_{xx} - 10 m_y m_{yy}) + m^2 (6 m_{xxy}) \left. \right] s^3 \cos^2 \Theta_1 \sin \Theta_1 + \\
 & + \frac{1}{48} \left[ (-13 m_x^3 + 32 m_x m_y^2) + m (-10 m_x m_{xx} + 18 m_x m_{yy} + 26 m_y m_{xy}) + \right. \\
 & + m^2 (6 m_{xyy}) \left. \right] s^3 \cos \Theta_1 \sin^2 \Theta_1 + \frac{1}{48} \left[ (-13 m_x^2 m_y + 2 m_y^3) + m (-10 m_x m_{xy} + \right. \\
 & + 8 m_y m_{yy}) + m^2 (2 m_{yyy}) \left. \right] s^2 \sin^3 \Theta_1 + \dots \left. \right\}
 \end{aligned} \tag{22b}$$

Durch den Übergang auf die Koordinatenunterschiede (strenge Formeln für die Berechnung der 2. Hauptaufgabe) entsteht das den obigen Ausdrücken entsprechende Formelpaar:

$$\begin{aligned}
 \Psi' = & -\frac{m_y}{2m} \Delta x_{1,2} + \frac{m_x}{2m} \Delta y_{1,2} + \frac{1}{12m^2} \left[ 3m_x m_y - 2m m_{xy} \right] \Delta x_{1,2}^2 + \\
 & + \frac{1}{12m^2} \left[ -3m_x^2 + 3m_y^2 + 2m m_{xx} - 2m m_{yy} \right] \Delta x_{1,2} \Delta y_{1,2} + \frac{1}{12m^2} \left[ -3m_x m_y + \right. \\
 & + 2m m_{xy} \left. \right] \Delta y_{1,2}^2 + \frac{1}{24m^3} \left[ (-3m_x^2 m_y + m_y^3) + m(3m_x m_{xy} + m_y m_{xx} - \right. \\
 & - m_y m_{yy}) + m^2(-m_{xxy}) \left. \right] \Delta x_{1,2}^3 + \frac{1}{24m^3} \left[ (3m_x^3 - 21m_x m_y^2) + m(-4m_x m_{xx} + \right. \\
 & + 4m_x m_{yy} + 7m_y m_{xy}) + m^2(m_{xxx} - 2m_{xyy}) \left. \right] \Delta x_{1,2}^2 \Delta y_{1,2} + \frac{1}{24m^3} \left[ (21m_x^2 m_y - \right. \\
 & - 3m_y^3) + m(-7m_x m_{xy} - 4m_y m_{xx} + 4m_y m_{yy}) + m^2(2m_{xxy} - m_{yyy}) \left. \right] \Delta x_{1,2} \Delta y_{1,2}^2 + \\
 & + \frac{1}{24m^3} \left[ (-m_x^3 + 3m_x m_y^2) + m(m_x m_{xx} - m_x m_{yy} - 3m_y m_{xy}) + \right. \\
 & \left. + m^2(m_{xyy}) \right] \Delta y_{1,2}^3 + \dots \quad (23 \text{ a})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta s = \bar{s} - s = & (m-1)s + s \left\{ \frac{m_x}{2} \Delta x_{1,2} + \frac{m_y}{2} \Delta y_{1,2} + \frac{1}{24m} \left[ -2m_x^2 + \right. \right. \\
 & + m_y^2 + 4m m_{xx} \left. \right] \Delta x_{1,2}^2 + \frac{1}{24m} \left[ -6m_x m_y + 8m m_{xy} \right] \Delta x_{1,2} \Delta y_{1,2} + \\
 & + \frac{1}{24m} \left[ m_x^2 - 2m_y^2 + 4m m_{yy} \right] \Delta y_{1,2}^2 + \frac{1}{48m^2} \left[ (2m_x^3 - m_x m_y^2) + \right. \\
 & + m(-4m_x m_{xx} + 2m_y m_{xy}) + m^2(2m_{xxx}) \left. \right] \Delta x_{1,2}^3 + \frac{1}{48m^2} \left[ (8m_x^2 m_y - m_y^3) + \right. \\
 & + m(-10m_x m_{xy} - 6m_y m_{xx} + 2m_y m_{yy}) + m^2(6m_{xxy}) \left. \right] \Delta x_{1,2}^2 \Delta y_{1,2} + \\
 & + \frac{1}{48m^2} \left[ (-m_x^3 + 8m_x m_y^2) + m(2m_x m_{xx} - 6m_x m_{yy} - 10m_y m_{xy}) + \right. \\
 & + m^2(6m_{xyy}) \left. \right] \Delta x_{1,2} \Delta y_{1,2}^2 + \frac{1}{48m^2} \left[ (-m_x^2 m_y + 2m_y^3) + m(2m_x m_{xy} - \right. \\
 & - 4m_y m_{yy}) + m^2(2m_{yyy}) \left. \right] \Delta y_{1,2}^3 + \dots \left. \right\} \quad (23 \text{ b})
 \end{aligned}$$

Die leicht ausführbare allgemeine Weiterentwicklung führt — wie ersichtlich — zu ziemlich umfangreichen Ausdrücken, weshalb sich bei einer etwa notwendigen Weiterführung der Ableitung spezielle Entwicklungen für die in Betracht kommenden Fälle empfehlen.