



Über vektographische vermittelnde Koordinatenausgleichung bei der Einzelpunkteinschaltung in gezwängte Triangulationsnetze

Ludwig Starkl ¹

¹ *Wels*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **45** (2, 3, 4), S. 41–48, 81–87, 129–135

1957

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Starkl_VGI_195706,  
  Title = {{\U}ber vektographische vermittelnde Koordinatenausgleichung bei der  
    Einzelpunkteinschaltung in gezw{\a}ngte Triangulationsnetze},  
  Author = {Starkl, Ludwig},  
  Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {41--48, 81--87, 129--135},  
  Number = {2, 3, 4},  
  Year = {1957},  
  Volume = {45}  
}
```



den mußte. An den speziellen Welttagen sollen fast ununterbrochen Registrierungen durchgeführt werden. Ferner werden in Graz auch Messungen der Dämpfung, die elektrische Wellen beim Durchgang bzw. bei der Reflexion an der Ionosphäre erfahren, durchgeführt werden, die aber voraussichtlich erst Ende 1957 beginnen können. Wenn möglich, sollen auch Beobachtungen der radiofrequenten Sonnenstrahlung im Wellenlängenbereich von 4 Meter in das Beobachtungsprogramm aufgenommen werden.

(Fortsetzung folgt)

Über vektographische vermittelnde Koordinatenausgleichung bei der Einzelpunkteinschaltung in gezwängte Triangulationsnetze

Von L. Starkl, Wels

1. Einleitung

Seit der Begründung der „Methode der kleinsten Quadrate“ im Jahre 1794 durch Karl Friedrich Gauß und der nahezu gleichzeitigen Auffindung derselben durch Legendre wurde auf mehrfache Art mit Erfolg versucht, unter Anwendung dieses Kalküls die Ausgleichung der trigonometrischen Punktbestimmung graphisch zu bewerkstelligen. Die klassische graphische Ausgleichsmethode war das „Verfahren der fehlerzeigenden Figur“, wobei zuerst die Auswahl des ausgeglichenen Punktes nach Gutdünken getroffen wurde. Ein erstes strenges Verfahren für die Ermittlung des Minimumpunktes in der Fehlerfigur wurde 1876 von Bertot in „Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences“ veröffentlicht, das als „Verfahren von Bertot“ in die preußische Katasteranweisung Eingang fand. Historisch interessant ist die Tatsache, daß bereits 1841 von C. G. J. Jacobi in einer Arbeit „De formatione et proprietatibus determinantum“ der heute nach ihm benannte „Satz von Jacobi“ abgeleitet worden war, ohne daß in der Folge auf dessen Basis das Problem der strengen Punktauswahl in der fehlerzeigenden Figur einer einfachen Lösung zugeführt worden wäre. Bei Anwendung des „Satzes von Jacobi“ auf die Fehlerfigur ist nämlich der ausgeglichene Punkt der Schwerpunkt sämtlicher durch die Fehlergeraden gebildeten Schnittpunkte, wenn diese mit den Quadraten der zugehörigen Koeffizientendeterminanten als Massen belegt werden. Auf diese graphische Lösungsmöglichkeit soll indessen hier nicht weiter eingegangen werden. Es verdient festgehalten zu werden, daß sich seit der Jahrhundertwende besonders österreichische Geodäten um den graphischen Ausgleich verdient gemacht haben. Die Entwicklung tendierte dabei von der graphostatischen Auffassung bei Klingatsch („Die graphische Ausgleichung bei der trigonometrischen Punktbestimmung“, Wien, 1894) über die graphische Verfolgung des rechnerischen Ausgleiches bei Engel (J. Rohrer-, „Vorlesungen über graphische Ausgleichung“, Wien) zur graphisch-vektoriellen Lösung, wie sie Embacher in seiner noch nicht veröffentlichten Dissertation („Über vektorielle Ausgleichsrechnung“, Wien 1949) angedeutet hat.

In vorliegender Arbeit habe ich die vektographische Methode in Hinsicht auf Ableitung und konstruktive Durchbildung in einer Form entwickelt, welche der Forderung nach größtmöglicher Einfachheit und Vollständigkeit Genüge tun dürfte. Mein Verfahren liefert neben der Lage des ausgeglichenen Punktes auch unmittelbar die Bestimmungsstücke der mittleren Fehlerellipse sowie die mittleren Koordinatenfehler und ermöglicht nebenbei die Diskussion von Spezialfragen in denkbar einfachster Weise.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dipl.-Ing., Dr. techn. J. Rohrer, möchte ich an dieser Stelle für seine Unterstützung beim Zustandekommen dieser Arbeit meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

2. Der Vektorbegriff in der Gaußschen Zahlenebene

Zur Bestimmung zweier Unbekannter seien Beobachtungen in überschüssiger Zahl vorhanden, wodurch für jede Beobachtung eine Fehlergleichung der Form

$$v = a \cdot dx + b \cdot dy + w \quad . . . (1)$$

erklärt ist. Die Koeffizienten a und b können durch Einführung eines Hilfswinkels zu

$$a = r \cdot \sin \nu, \quad -b = r \cdot \cos \nu \quad . . . (2)$$

geschrieben werden, wobei

$$r > 0, \quad r^2 = a^2 + b^2, \quad \operatorname{tg} \nu = -\frac{a}{b} \quad \text{ist.}$$

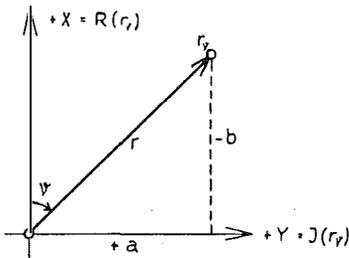


Abb. 1

Die Koeffizienten (2) wollen wir als Koordinaten in einem geodätischen System verwenden und diesem die Gaußsche Zahlenebene derart zuordnen, daß die + X-Achse mit der Realachse, die + Y-Achse mit der Imaginärachse zusammenfällt.

Die Grundlage für die vektographische Ausgleichung bilden nun die aus der Theorie der imaginären und komplexen Zahlen bekannten Sätze über die elementaren Rechenoperationen mit den Zahlenvektoren r_ν , worunter eine komplexe Zahl der Form

$$r_\nu = i \cdot a - b = r (\cos \nu + i \cdot \sin \nu) = R (r_\nu) + i \cdot I (r_\nu) \quad . . . (3)$$

verstanden wird. Dabei ist $-b = R (r_\nu)$ der Realteil und $a = I (r_\nu)$ der Imaginärteil von r_ν .

Für die Summe von n Zahlenvektoren r_ν folgt aus (3)

$$[r_\nu] = i \cdot [a] - [b] = [r \cdot \cos \nu] + i \cdot [r \cdot \sin \nu] = R ([r_\nu]) + i \cdot I ([r_\nu]) \quad . . (4)$$

Demnach ist die Summe von Zahlenvektoren r_ν äquivalent der geometrischen Summe dieser Größen und kann durch Konstruktion des Vektorpolygones

erhalten werden. Für die Multiplikation eines Vektors mit sich selbst gilt mit (3)

$$r_{\frac{3}{2}\nu}^2 = -\{(a^2 - b^2) + i \cdot 2ab\} = r^2 \cdot (\cos 2\nu + i \cdot \sin 2\nu) = \\ = R (r_{\frac{3}{2}\nu}^2) + i \cdot I (r_{\frac{3}{2}\nu}^2) \quad \dots (5)$$

Das Quadrat $(r_\nu)^2 = r_{\frac{3}{2}\nu}^2$ ist demnach wieder ein Vektor, dessen absoluter Betrag gleich dem quadrierten Betrag des Vektors r_ν ist und dessen Richtung gleich ist der doppelten Richtung von r_ν . Die Summe von n Vektoren $r_{\frac{3}{2}\nu}^2$ wird nach (5)

$$[r_{\frac{3}{2}\nu}^2] = -\{[aa] - [bb]\} + i \cdot 2 [ab] = [r^2 \cdot \cos 2\nu] + i \cdot [r^2 \cdot \sin 2\nu] = \\ = R ([r_{\frac{3}{2}\nu}^2]) + i \cdot I ([r_{\frac{3}{2}\nu}^2]) \quad \dots (6)$$

Der absolute Betrag und die Richtung des Summenvektors $[r_{\frac{3}{2}\nu}^2]$ ergeben sich aus (6) gemäß

$$|[r_{\frac{3}{2}\nu}^2]| = \sqrt{([aa] - [bb])^2 + 4 [ab]^2} = W \\ \operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2 [ab]}{[aa] - [bb]} \quad \dots (7)$$

zwei Größen, welche bekanntlich in enger Beziehung zur mittleren Fehlerellipse stehen.

Der absolute Betrag eines Vektors $r_{\frac{3}{2}\nu}^2$ ist nach (5)

$$|r_{\frac{3}{2}\nu}^2| = (a^2 + b^2) = r^2 \quad \dots (8)$$

Summiert man die absoluten Beträge der n Vektoren $r_{\frac{3}{2}\nu}^2$, so folgt aus (8) die Länge des Vektorpolygons $[r_{\frac{3}{2}\nu}^2]$ nach

$$|[r_{\frac{3}{2}\nu}^2]| = [aa] + [bb] = [r^2] = L \quad \dots (9)$$

Da die absoluten Beträge zweier komplexer Zahlen den Formeln für die absoluten Beträge zweier reeller Zahlen genügen, so gilt für (7) und (9)

$$|[r_{\frac{3}{2}\nu}^2]| \leq [r_{\frac{3}{2}\nu}^2] \text{ bzw. } W \leq L, \quad \dots (10)$$

das heißt, der absolute Betrag des Summenvektors $[r_{\frac{3}{2}\nu}^2]$ ist kleiner oder höchstens gleich der Summe der absoluten Beträge der Vektoren $r_{\frac{3}{2}\nu}^2$. In Hinsicht auf später durchzuführende Äquivalenzuntersuchungen soll noch an den Satz von Moivre

$$(\cos \nu \pm i \cdot \sin \nu)^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m}{n} (2k\pi + \nu) \pm i \cdot \sin \frac{m}{n} (2k\pi + \nu) \quad \dots (11)$$

erinnert werden.

3. Die veklographische Ausgleichung des mehrfachen Vorwärtseinschneidens unter Voraussetzung gleicher Gewichte

Wurde ein Neupunkt P_0 von n Festpunkten aus beobachtet ($n > 2$), so existiert für jede der n Richtungen im allgemeinen eine Verbesserungsgleichung (1). Hierin bedeuten dx und dy die Verschiebungen des Neupunktes von einem zuerst gerechneten Näherungswert $P'_0 (x'_0, y'_0)$ auf den wahrscheinlichsten Punkt $P_0 (x_0, y_0)$, a und b die Gaußschen Richtungskoeffizienten (2) mit $r = \frac{\rho''}{s}$, w die Richtungswidersprüche

$$w = \nu - (R_0 \pm 200\epsilon), \quad \dots (12)$$

wobei R_0 die orientierten äußeren Richtungen von den Festpunkten P nach dem Neupunkt P_0 darstellt. Aus den Verbesserungsgleichungen (1) werden auf Grund der Bedingung $[v] = \text{Minimum}$ die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} [av] &= [r \cdot \sin v \cdot v] = 0 = I \quad (0) \\ [bv] &= [r \cdot \cos v \cdot v] = 0 = R \quad (0) \end{aligned}$$

erhalten. Zur Vektorgleichung zusammengefaßt, wird

$$R(0) + i \cdot I(0) = [v \cdot r (\cos v + i \cdot \sin v)] = [v \cdot r_v] = 0 \quad \dots \quad (13)$$

Man führt in (13) die aus (1) mit (2) resultierenden Werte für v ein nach

$$v = r \cdot \sin v \, dx - r \cdot \cos v \, dy + w$$

und erhält

$$\begin{aligned} \left[\frac{r^2 \sin 2v}{2} + i \cdot r^2 \sin^2 v \right] dx - \left[r^2 \cos^2 v + i \cdot \frac{r^2 \sin 2v}{2} \right] dy + \\ + [w \cdot r (\cos v + i \cdot \sin v)] = 0 \end{aligned}$$

Mit Einführung von

$$\sin^2 v = \frac{1 - \cos 2v}{2} \quad \text{und} \quad \cos^2 v = \frac{1 + \cos 2v}{2} \quad \dots \quad (14)$$

ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \left[\frac{r^2 \sin 2v}{2} + i \cdot \frac{r^2}{2} - i \cdot \frac{r^2 \cos 2v}{2} \right] dx - \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^2 \cos 2v}{2} + i \cdot \frac{r^2 \sin 2v}{2} \right] dy + \\ + [w \cdot r (\cos v + i \cdot \sin v)] = 0 \end{aligned}$$

oder mit Umformung des Vektorkoeffizienten von dx

$$\begin{aligned} \left[i \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \left\{ \cos \left(2v + \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left(2v + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \right] dx - \\ - \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} \left\{ \cos 2v + i \cdot \sin 2v \right\} \right] dy + [w \cdot r (\cos v + i \cdot \sin v)] = 0 \end{aligned}$$

und gemäß (5) in vereinfachter Schreibung

$$\frac{1}{2} \left\{ i \cdot [r^2] - \left[r^2_{2v + \frac{\pi}{2}} \right] \right\} dx - \frac{1}{2} \{ [r^2] + [r^2_{2v}] \} dy + [w \cdot r_v] = 0 \quad \dots \quad (15)$$

Nennt man die Vektorkoeffizienten von dx und dy die Normalgleichungsvektoren \vec{N}_x bzw. \vec{N}_y , sowie das allgemeine Glied den Widerspruchsvektor \vec{W} , gewinnt (15) die Gestalt

$$\vec{N}_x \cdot dx + \vec{N}_y \cdot dy + \vec{W} = 0 \quad \dots \quad (16)$$

Eine ähnliche Vektorgleichung wurde erstmalig von Embacher abgeleitet, jedoch nicht weiter diskutiert, da er die Friedrichsche Form der Bestimmung des Fehlervektors beibehielt. (K. Friedrich: „Neue Grundlagen und Anwendungen der Vektorrechnung“.)

Auf der Basis der Formel (16) läßt sich ein einfaches und dem Problem augenscheinlich bestens angepaßtes graphisches Ausgleichsverfahren begründen.

Wie für die rechnerische Ausgleichung müssen auch für die graphische Ausgleichung die in (2) enthaltenen vorläufigen Richtungswinkel v und vor-

läufigen Seitenlängen s sowie die Richtungswidersprüche w nach (12) mit Hilfe eines Näherungswertes P_0' (x_0' , y_0') für den Neupunkt zuerst ermittelt werden. Die graphische Ausgleichung beim Vorwärtseinschneiden erfordert dann nach (15) die Konstruktion der beiden Vektorpolygone $[r_{\frac{1}{2}\nu}^2]$ und $[w \cdot r_\nu]$. Zwecks einfacher Ermittlung dieser Vektorpolygone wäre ein Vordruck zweckmäßig, der auf einem Einheitskreis neben einer einfachen Bezifferung der Gradteilung noch eine zweite Bezifferung erhält, in welcher die doppelten Richtungswinkelwerte 2ν mit dem einfachen Wert ν bezeichnet sind. Zur Ermittlung der Werte $r^2 = \left(\frac{\rho''}{s}\right)^2$ dient ein nach Seitenlängen in Kilometereinheiten bezifferter Hilfsmaßstab, der vom Koordinatenursprung aus nach beiden Seiten der Y -achse aufgetragen ist.

a) *Konstruktion der Normalgleichungsvektoren.*

Vom Koordinatenursprung ausgehend werden mit den Richtungswinkeln 2ν und den dem Hilfsmaßstab entnommenen Werten $\left(\frac{\rho''}{s}\right)^2$ die Vektoren $r_{\frac{1}{2}\nu}^2$ konstruiert.

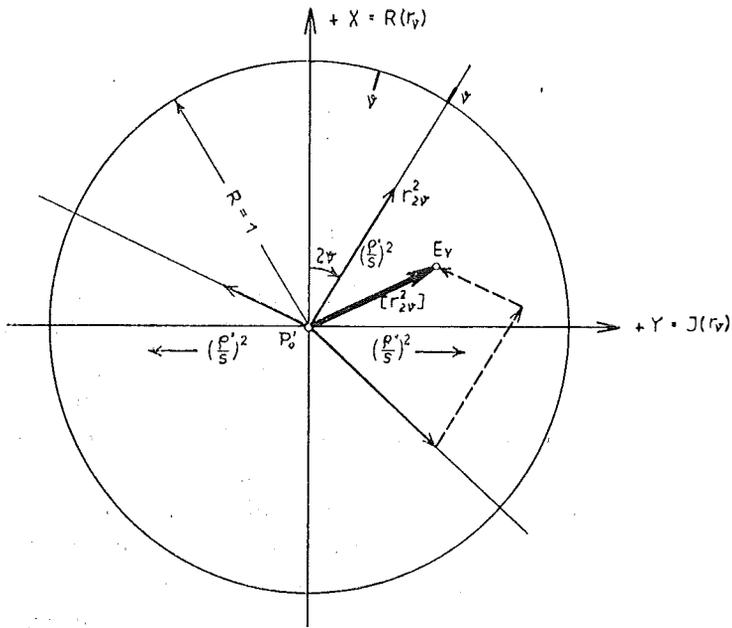


Abb. 2

Die *geometrische Addition* der Vektoren $r_{\frac{1}{2}\nu}^2$ liefert als Endpunkt des Vektorpolygons den Punkt E_ν . Die Reihenfolge der Vektoradditionen ist unwesentlich, wodurch auf die verfügbare Zeichenfläche Rücksicht genommen werden kann.

Durch *algebraische Addition* der Vektoren $r_{\frac{1}{2}\nu}^2$ (Summierung mit dem Zirkel) erhält man die Länge $L = [r^2]$ des Vektorpolygons gemäß (9).

Man schlägt nun mit dem Radius $R = \frac{L}{2} = \left[\frac{r^2}{2} \right]$ einen Kreis um P_0' , halbiert sodann den Vektor $r_{\frac{1}{2}v}^2$ und erhält den Punkt A_v . Aus dem Halbierungspunkt A_v und den als Schnitte des Kreises ($R = \frac{L}{2} = \left[\frac{r^2}{2} \right]$) mit der X-achse erhaltenen Punkten B und C lassen sich die Normalgleichungsvektoren \vec{N}_x und \vec{N}_y nach Richtung und Betrag bestimmen.

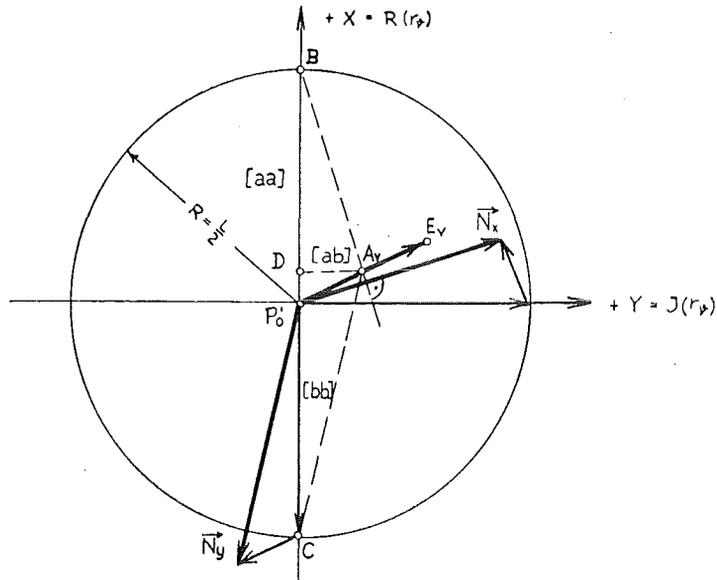


Abb. 3

Unabhängig von der Lage des Punktes A_v in einem speziellen Quadranten, ergibt sich die Richtung der zweiten Normalgleichung durch die Verbindungslinie der Punkte A_v und C . Die Richtung der ersten Normalgleichung ergibt sich in jedem Fall als Senkrechte auf die Verbindungslinie der Punkte A_v und B . Zum Beweis dieser Behauptung betrachte man die Gleichung (15). Nach dieser wird der Vektor \vec{N}_x erhalten, indem man in Richtung der positiven Imaginärachse mit dem Wert $[r^2/2]$ fortschreitet und dann den um $+\pi/2$ gedrehten Vektor $[r_{\frac{1}{2}v}^2/2]$ subtrahiert. Analog ergibt sich der Vektor \vec{N}_y durch Addition der Vektoren $-[r^2/2]$ und $-[r_{\frac{1}{2}v}^2/2]$.

Die Projektion des Punktes A_v auf die X-achse sei D . Dadurch wird der Vektor $[r_{\frac{1}{2}v}^2/2]$ in seinen Real- und Imaginärteil zerlegt. Mit (6) und (9) ergibt sich für

$$\begin{aligned}
 \overline{BD} &= \frac{1}{2} \{ [r^2] - R ([r_{\frac{1}{2}v}^2]) \} = [aa] \\
 \overline{CD} &= \frac{1}{2} \{ [r^2] + R ([r_{\frac{1}{2}v}^2]) \} = [bb] \quad . . . (17) \\
 \overline{AD} &= \frac{1}{2} I ([r_{\frac{1}{2}v}^2]) = -[ab]
 \end{aligned}$$

Der im Uhrzeigersinn um $\pi/2$ gedrehte Vektor \overrightarrow{AB} und der Vektor \overrightarrow{AC} mit den absoluten Längen

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{[aa]^2 + [ab]^2} \\ \overline{AC} &= \sqrt{[ab]^2 + [bb]^2} \end{aligned} \quad . . . (18)$$

stellen in P_0' angeheftet, die Normalgleichungsvektoren dar.

b) *Konstruktion des Widerspruchsvektors.*

Der Widerspruchsvektor \overrightarrow{W} wird nach (15) durch Konstruktion des Vektorpolygones $[w \cdot r_v]$ erhalten. Die einzelnen Vektoren $w \cdot r_v$ sind hierbei mit den Richtungswinkeln v und den Längen $\rho'' \cdot w/s$ zu konstruieren. Die Längen können entweder mit dem Rechenschieber oder mit Hilfe des Horskyschen Diagrammes ermittelt werden, das die Auswertung von Proportionen ermöglicht. Theorie und Anwendung dieses Diagrammes werden hier als bekannt vorausgesetzt. Zur Ermittlung der absoluten Vektorbeträge $\rho'' \cdot w/s$ geht man mit w und s in das Diagramm ein und erhält in p_1 den gesuchten Wert, da die nach s bezifferten Werte d im Diagramm mit $d = \rho''^2/s$ gewählt sind.

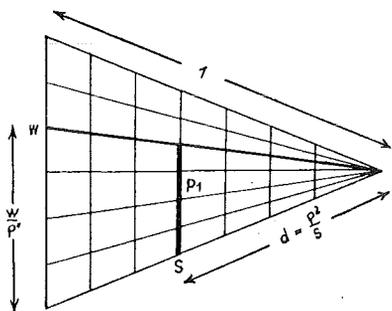


Abb. 4

Ist ein Widerspruch w negativ, wird der Vektor $w \cdot r_v$ mit dem Richtungswinkel $v + \pi$ konstruiert, nach

$$-w \cdot r_v = w \cdot r_v + \pi$$

Die einzelnen Vektoren $w \cdot r_v$ werden nun entsprechend dem Vorgehen mit den Vektoren r_v^2 bei der Konstruktion der Normalgleichungsvektoren *geometrisch* addiert. Der Endpunkt dieses Vektorpolygones $[w \cdot r_v]$ werde mit E_w bezeichnet. Die gerichtete Strecke $\overrightarrow{P_0' E_w}$ stellt dann gemäß (15) den Widerspruchsvektor \overrightarrow{W} dar. Die Komponenten des Widerspruchsvektors in Richtung der Koordinatenachsen sind

$$\begin{aligned} R ([w \cdot r_v]) &= -[bw] \\ I ([w \cdot r_v]) &= [aw], \end{aligned} \quad . . . (19)$$

sein absoluter Betrag ist

$$\overline{P_0' E_w} = \sqrt{[aw]^2 + [bw]^2} \quad . . . (20)$$

c) *Ermittlung der Koordinatenverbesserungen dx und dy .*

Nach (16) muß die vektorielle Summe der mit den unbekanntenen Skalaren dx und dy zu multiplizierenden Normalgleichungsvektoren und des

an Welttagen oder in Weltintervallen. Raketenanstiege sollen an verschiedenen Orten von 63° N bis 31° S erfolgen.

Die ersten Satelliten werden nur kleine kugelförmige Körper von etwa $\frac{1}{2} m$ Durchmesser sein und sind daher im Hinblick auf ihre instrumentelle Ausrüstung sehr beschränkt. Es können daher zunächst auch noch nicht alle denkbaren Beobachtungsmöglichkeiten ausgenützt werden. Folgende Beobachtungsmöglichkeiten werden aber bereits im geophysikalischen Jahr in Betracht gezogen: geodätische Messungen durch Beobachtung des Satelliten an Stelle des Mondes, Luftdichtebestimmung aus der Wirkung des Luftwiderstandes, Messungen der zeitlichen Schwankungen der UV-Strahlung der Sonne mit Spektrographen, Messungen des erdmagnetischen Feldes oberhalb der Ionosphäre und Bestimmung des Ringstromes bei gleichzeitigen Messungen des Magnetfeldes an der Erdoberfläche, Messung der magnetischen Variation in Abhängigkeit von der Sonnenaktivität, Beobachtungen der primären kosmischen Strahlung und ihres Spektrums in großen Höhen, Bestimmung der Häufigkeit von Mikrometeoriten und Bestimmung des Gehalts des Weltraums an Wasserstoffatomen und Ionen.

Diese Beispiele zeigen die ersten Verwertungsmöglichkeiten leichter Satelliten für wissenschaftliche Beobachtungszwecke. Sie zeigen aber auch, daß die Satellitenbeobachtungen für das Programm des geophysikalischen Jahres eine sehr wertvolle Ergänzung bilden können, daß sie aber keinen unbedingt notwendigen Teil dieses Programms darstellen, so daß ihr Ausfall keine Beeinträchtigung des Erfolges des geophysikalischen Jahres bedeuten würde, ihr Gelingen aber eine sehr wertvolle Bereicherung bringen wird.

Wir haben gesehen, daß das Arbeitsprogramm des geophysikalischen Jahres außerordentlich vielseitig und umfangreich ist und daß auch in Österreich sehr viel auf fast allen Wissensgebieten, die bei diesem größten Forschungsunternehmen bearbeitet werden, geleistet werden wird. Daß dies möglich ist, verdanken wir der verständnisvollen Förderung durch das Bundesministerium für Unterricht und durch die österreichische Akademie der Wissenschaften, denen auch an dieser Stelle besonderer Dank ausgedrückt werden soll.

Über vektographische vermittelnde Koordinatenausgleichung bei der Einzelpunkteinschaltung in gezwängte Triangulationsnetze

Von L. S t a r k l, Wels

(Fortsetzung)

d) *Millerer Fehler einer gemessenen Richtung.*

Zur Berechnung des mittleren Fehlers einer gemessenen Richtung nach

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} \quad \dots \quad (21)$$

sind noch die Verbesserungen v graphisch zu ermitteln. Man schreibt die Gleichung (1) in der Hesseschen Normalform:

$$p_2 = \frac{a \cdot dx + b \cdot dy + (w-v)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Setzt man nach (2)

$\sqrt{a^2 + b^2} = r = \frac{\rho''}{s}$ und nimmt $dx = dy = 0$ an, erhält man in

$$p_2 = \frac{(w-v) \cdot s}{\rho''} \quad \dots \quad (22)$$

die Normalabstände der dann durch den ausgeglichenen Punkt P_0 gehenden Bilder der Verbesserungsgleichungen (1) vom Ursprung P'_0 , oder ebenso die Normalabstände des ausgeglichenen Punktes P_0 von den in P'_0 unter den Richtungswinkeln ν eingetragenen Strahlen. Aus (22) wird v erhalten mit

$$v = w - p_2 \cdot \frac{\rho''}{s}$$

worin $- p_2 \cdot \frac{\rho''}{s} = \Delta \nu$ die Änderung des Richtungswinkels ν zufolge der Ausgleichung bedeutet. Die Verbesserungen v werden daher mit der Beziehung

$$v = w + \Delta \nu \quad \dots \quad (23)$$

gewonnen. Die Werte $\Delta \nu$ können mittels der Perpendikel p_2 wieder dem Horskyschen Diagramm entnommen werden. Man geht dabei mit p_2 und s (auf einer nach Hektometern geteilten s -Teilung) in das Diagramm ein und liest auf der $\frac{w}{\rho''}$ -Skala den Wert $\Delta \nu$ ab. Abgesehen von der Verwendung verschiedener s -Teilungen ist die Ermittlung von $\Delta \nu$ mit den Eingängen p_2 und s einfach die Umkehrung der Ermittlung von p_1 mit w und s bei der Konstruktion des Widerspruchsvektors \vec{W} .

c) *Schlußkontrolle.*

Als abschließende Kontrolle dient die Vektorgleichung (13)

$$[v \cdot r_\nu] = 0$$

Die einzelnen Vektoren $v \cdot r_\nu$ werden genau wie die Vektoren $w \cdot r_\nu$ unter b) ermittelt. Wurde die Ausgleichung richtig durchgeführt, muß sich das Vektorpolygon $[v \cdot r_\nu]$ bis auf kleine Abweichungen schließen.

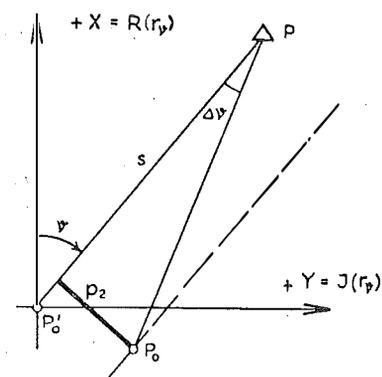


Abb. 6

f) Die milllere Fehlerellipse.

Der große Vorteil des vektographischen Verfahrens besteht darin, daß man im gleichen Arbeitsgang auch die Bestimmungsstücke der mittleren Fehlerellipse erhält. In Hinblick auf den Zusammenhang mit später zu behandelnden Äquivalenzproblemen soll die Theorie der Fehlerellipse in einer von der Jordan-Eggertsen Fassung abweichenden Form etwas ausführlicher behandelt werden. Wir gehen dabei von der Frage nach dem geometrischen Ort jener Punkte aus, für welche die Quadratsumme der Verbesserungen $[vv] = \text{konstant}$ ist. Für die Summe $[vv]$ ergibt sich aus (1)

$$[aa] dx^2 + 2 [ab] dx dy + [bb] dy^2 + 2 [aw] dx + 2 [bw] dy + \{[ww] - [vv]\} = 0 \quad (24)$$

Mit $[vv] = \text{konstant}$ stellt diese algebraische Gleichung zweiten Grades einen Kegelschnitt der allgemeinen Form

$$F(x, y) = 0 \quad (25)$$

dar. Um die Art eines Kegelschnittes zu bestimmen, setzt man bekanntlich den aus den Gliedern 2. Grades gebildeten Ausdruck in (24) für sich gleich Null, somit

$$[aa] dx^2 + 2 [ab] dx dy + [bb] dy^2 = 0$$

Der bei der Auflösung dieser quadratischen Gleichung nach einer Variablen auftretende Ausdruck

$$[aa] [bb] - [ab]^2 = D \quad (26)$$

entscheidet dann über die Art des Kegelschnittes. Dieser ist bekanntlich für

$$\begin{array}{ll} > & \text{Ellipse} \\ D = 0 & \text{eine Parabel} \\ < & \text{Hyperbel} \end{array}$$

Da D als Summe von Quadraten der Form

$$(a_i \cdot b_k - a_k \cdot b_i)^2$$

dargestellt werden kann, ist immer

$$D > 0,$$

der gesuchte geometrische Ort also eine Ellipse. Die Mittelpunktskoordinaten einer Ellipse erhält man aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Aus (24) werden damit die sonst auf Grund der Bedingung

$$[vv] = \text{Minimum}$$

resultierenden Normalgleichungen

$$\begin{array}{l} [aa] dx + [ab] dy + [aw] = 0 \\ [ab] dx + [bb] dy + [bw] = 0 \end{array} \quad (27)$$

erhalten. Demnach ist der Minimumspunkt der Ellipsenmittelpunkt. Zur Ermittlung der Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist das Koordinatensystem parallel zu verschieben, wodurch die linearen Glieder verschwinden. In der Theorie der Kegelschnitte wird gezeigt, daß dabei die Koeffizienten der quadratischen Glieder unverändert erhalten bleiben und das neue konstante Glied das Resultat der Substitution der aus (27) erhaltenen Mittelpunktskoordinaten in die Gleichung (24) ist. Unter Verzicht auf Akzente bei dx und dy ist demnach die Mittelpunktsgleichung gegeben mit

$$[aa] dx^2 + 2 [ab] dx dy + [bb] dy^2 + F(dx_0, dy_0) = 0 \quad \dots \quad (28)$$

wobei

$$F(dx_0, dy_0) = [aa] dx_0^2 + 2 [ab] dx_0 dy_0 + [bb] dy_0^2 + 2 [aw] dx_0 + 2 [bw] dy_0 + \{[ww] - [vv]\},$$

oder anders geordnet

$$F(dx_0, dy_0) = dx_0 \{[aw] dx_0 + [ab] dy_0 + [aw] +\} \\ + dy_0 \{[ab] dx_0 + [bb] dy_0 + [bw] +\} \\ + \{[aw] dx_0 + [bw] dy_0 + [ww]\} - [vv]$$

Hierin sind die beiden ersten Klammerausdrücke wegen (27) gleich Null. Multipliziert man die Verbesserungsgleichungen (1) einmal mit w , einmal mit v und summiert jedesmal, erhält man

$$[vw] = [aw] dx + [bw] dy + [ww] \\ [vv] = [av] dx + [bv] dy + [vv]$$

Für den Minimumspunkt ist

$$[aw] = [bv] = 0, \text{ somit} \\ [vv]_{\text{Min}} = [vw] \text{ oder} \\ [vv]_{\text{Min}} = [aw] dx_0 + [bw] dy_0 + [ww] \quad \dots \quad (29)$$

Mit (29) wird nun

$$F(dx_0, dy_0) = - \{[vw] - [vv]_{\text{Min}}\} = - \Delta [vv] \quad \dots \quad (30)$$

Somit findet man für die Mittelpunktsgleichung nach (28)

$$[aa] dx^2 + 2 [ab] dx dy + [bb] dy^2 = \Delta [vv] \quad \dots \quad (31)$$

Soll in dieser Gleichung noch das gemischtquadratische Glied eliminiert werden, muß der Drehwinkel ϑ des Koordinatensystemes nach (7) mit

$$\text{tg } 2 \vartheta = \frac{2 [ab]}{[aa] - [bb]}$$

bestimmt werden. Durch diese Drehung ändert sich das konstante Glied $\Delta [vv]$ in (31) nicht. Die gesuchte Achsengleichung des Kegelschnittes lautet dann

$$A' \cdot dx^2 + B' \cdot dy^2 = \Delta [vv] \quad \dots \quad (32)$$

Die neuen Koeffizienten A' und B' sind dann bekanntlich mit den alten $[aa]$, $2[ab]$, $[bb]$ durch zwei Gleichungen verbunden, die mit (9) und (26) zu

$$\begin{aligned} A' + B' &= [aa] + [bb] = L \\ 4 A' B' &= 4 \{ [aa] \cdot [bb] - [ab]^2 \} = 4 D \end{aligned} \quad \dots \quad (33)$$

geschrieben werden können. Wegen

$$\begin{aligned} (A' - B')^2 &= (A' + B')^2 - 4 A' B' \\ \text{folgt aus (33)} \quad A' - B' &= \sqrt{L^2 - 4 D} \end{aligned}$$

Eine von Kovarik in der Arbeit „Zur graphischen Bestimmung der Fehlerellipse und des mittleren Punktlagefehlers“ erstmalig angegebene Beziehung zwischen den Größen W und D gibt die Möglichkeit, diesen Wurzel Ausdruck zu vereinfachen. Mit (17) ist

$$D = [aa][bb] - [ab]^2 = \frac{1}{4} \{ [r^2]^2 - R^2 ([r_{2v}^2]) - I^2 ([r_{2v}^2]) \}$$

und nach (9) und (6) bzw. (7)

$$D = \frac{1}{4} (L^2 - W^2) \quad \dots \quad (34)$$

Damit vereinfacht sich $(A' - B')$ zu

$$A' - B' = W$$

In Verbindung mit der entsprechenden Summe in (33) erhält man für die Koeffizienten A' und B'

$$A' = \frac{L + W}{2} \quad B' = \frac{L - W}{2}$$

Da die Formeln (33) für das mathematische Koordinatensystem abgeleitet sind, ist für die Darstellung im geodätischen System in (32) dx und dy zu vertauschen. Man erhält dann für die Achsengleichung

$$\frac{L - W}{2} dx^2 + \frac{L + W}{2} dy^2 = \Delta [vv]$$

Daraus folgen die Halbachsenquadrate der Ellipsen konstanter Verbesserungsquadratsumme mit

$$A^2 = \frac{\Delta [vv]}{L - W} \quad B^2 = \frac{\Delta [vv]}{L + W} \quad \dots \quad (35)$$

Setzt man in (35)

$$\Delta [vv] = [vv] - [vv]_{\text{Min}} = m^2$$

ergeben sich die Halbachsenquadrate der *mittleren* Fehlerellipse zu

$$A^2 = \frac{m^2}{\frac{L-W}{2}} \quad B^2 = \frac{m^2}{\frac{L+W}{2}} \quad \dots \quad (36)$$

Wegen
$$m^2 = \frac{[vv]_{\text{Min}}}{n-u} = \frac{[vv]_{\text{Min}}}{k}$$

wenn k die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen darstellt, gilt

$$[vv] - [vv]_{\text{Min}} = \frac{[vv]_{\text{Min}}}{k}$$

bzw.
$$[vv] = \frac{k+1}{k} [vv]_{\text{Min}} \quad \dots \quad (37)$$

Gemäß (37) ist die mittlere Fehlerellipse der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Verbesserungsquadratsumme den $\frac{k+1}{k}$ fachen Betrag des Minimums derselben erreicht. Für $k=1$ ergibt sich der doppelte Betrag des Minimums. Mit steigender Anzahl der Überbestimmungen nähert man sich dem Grenzwert des einfachen Minimums.

Die Hauptachsenrichtung und die Halbachsen der mittleren Fehlerellipse können im Zusammenhang mit der Konstruktion der Normalgleichungsvektoren unter a) unmittelbar erhalten werden.

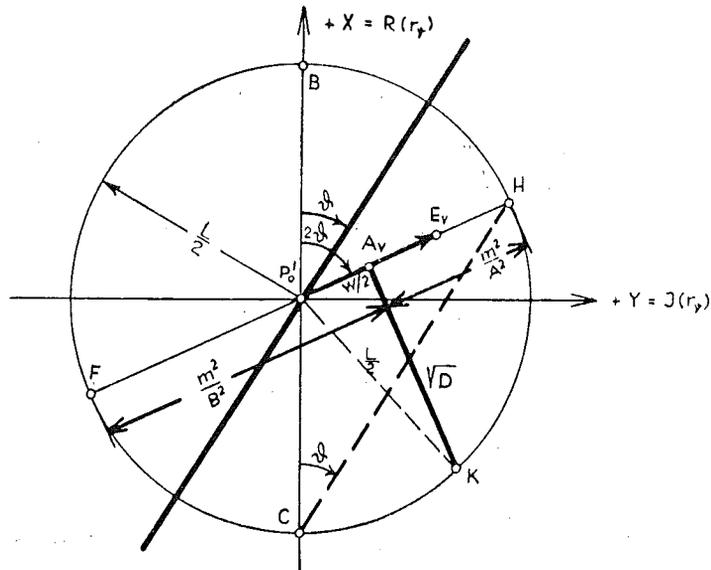


Abb. 7

Nach (7) ist $|\overline{[r_{2v}^2]}| = \overline{P_0' E_v} = W$ und $\widehat{BP_0' H} = 2\vartheta$. Da man $\overline{P_0' A_v} = \frac{W}{2}$ und $\overline{P_0' F} = \overline{P_0' H} = \frac{L}{2}$ gemacht hat, ist

$$\overline{A_v F} = \frac{L+W}{2} \quad \text{und} \quad \overline{A_v H} = \frac{L-W}{2}$$

und mit (36)

$$\begin{aligned} \overline{A_v H} &= \frac{m^2}{A^2} = \left(\frac{\rho''}{s_A}\right)^2 \\ \overline{A_v F} &= \frac{m^2}{B^2} = \left(\frac{\rho''}{s_B}\right)^2 \end{aligned} \quad \dots (38)$$

Nach (38) kann man mit den Strecken $\overline{A_v H}$ bzw. $\overline{A_v F}$ in die $\left(\frac{\rho''}{s}\right)^2$ -Teilung auf der Y-Achse oder des Horskyschen Diagrammes eingehen und die Werte s_A bzw. s_B ablesen, mit denen die Halbachsen nach

$$A = \frac{m}{\rho''} \cdot s_A \quad \text{und} \quad B = \frac{m}{\rho''} \cdot s_B$$

zu erhalten sind. Am einfachsten verwendet man auch hiezu das Horskysche Diagramm mit den Eingängen m und s_A (s_B).

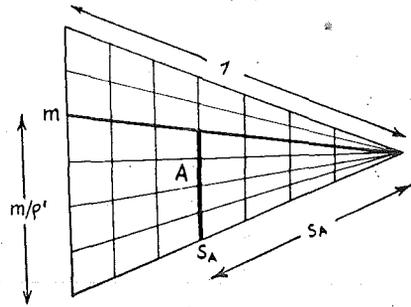


Abb. 8

Die Richtung der Fehlerellipsenhauptachse ist durch die Verbindungsgerade \overline{CH} gegeben. Denn der Winkel in C ist als Peripheriewinkel des Zentriwinkels 2ϑ über dem Bogen \widehat{BH} gleich ϑ . Nach (34) läßt sich auch die Determinante D der Normalgleichungskoeffizienten als graphische Größe deuten. Errichtet man in A_v das Lot und bringt es zum Schnitt mit dem Kreis $\left(R = \frac{L}{2}\right)$, dann folgt aus dem Dreieck $\triangle P_0' A_v K$

$$\begin{aligned} (\overline{A_v K})^2 &= (\overline{P_0' K})^2 - (\overline{P_0' A_v})^2 = \frac{1}{4} (L^2 - W^2) = D \\ \overline{A_v K} &= \sqrt{D} \end{aligned} \quad \dots (39)$$

(Fortsetzung folgt)

Das neue hessische Katastergesetz und das Abmarkungsgesetz

Von Ministerialrat Dipl.-Ing. St. Nagy

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

Der hessische Landtag hat am 3. Juli 1956 ein Katastergesetz und ein Abmarkungsgesetz verabschiedet; beide Gesetze sind am 1. August 1956 in Kraft getreten. Die für das Vermessungswesen äußerst wichtigen Rechtsvorschriften sind im Gesetz- und Verordnungsblatt für das Land Hessen, Jahrgang 1956, auf Seite 121 bzw. Seite 124 veröffentlicht worden. Gegen Ende des Jahres 1956 sind im Deutschen Fachschriftenverlag als Band 10 der Schriftenreihe „Gesetze im Lande Hessen“, die Gesetzestexte mit Erläuterungen zu diesen Vorschriften und mit Auszügen aus einschlägigen Verwaltungsvorschriften einschließlich der Gebührenordnung für die Leistungen der Katasterbehörden erschienen. Die Verfasser des Kommentares, Regierungsdirektor G. Wirth und Regierungsvermessungsrat Dipl.-Ing. O. Kriegel, haben den Vermessungsfachleuten die Handhabung der neuen Rechtsvorschriften durch übersichtliche Zusammenstellung und ausführliche Erläuterungen wesentlich erleichtert. Der Erfolg neuer Gesetzesbestimmungen

Über vektographische vermittelnde Koordinatenausgleichung bei der Einzelpunkteinschaltung in gezwängte Triangulationsnetze

Von L. Starkl, Wels

(Schluß)

Zur Ermittlung der mittleren Koordinatenfehler m_x , m_y und des mittleren totalen Punktlagefehlers M werden am besten die bereits bekannten Fehlerellipsenhalbachsen verwendet.

Bekanntlich ist

$$m_x^2 = \frac{[bb]}{D} m^2 \quad \text{und} \quad m_y^2 = \frac{[aa]}{D} m^2 \quad \dots \quad (40)$$

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = \frac{[aa] + [bb]}{D} m^2 = \frac{L}{D} m^2 = A^2 + B^2$$

Aus (17) folgt

$$[aa] = \frac{1}{2} (L - W \cdot \cos 2\vartheta) \quad \dots \quad (41)$$

$$[bb] = \frac{1}{2} (L + W \cdot \cos 2\vartheta)$$

Mit $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$ und $\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta = \cos 2\vartheta$ lassen sich die Gleichungen (41) auf die Form

$$[aa] = \frac{1}{2} \{L (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) - W (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)\}$$

$$[bb] = \frac{1}{2} \{L (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) + W (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)\} \text{ bzw.}$$

$$[aa] = \frac{L + W}{2} \sin^2 \vartheta + \frac{L - W}{2} \cos^2 \vartheta$$

$$[bb] = \frac{L - W}{2} \sin^2 \vartheta + \frac{L + W}{2} \cos^2 \vartheta \text{ bringen.}$$

Mit (40) und unter Beachtung von (34)

$$D = \frac{L + W}{2} \cdot \frac{L - W}{2}$$

wird

$$m_x^2 = \frac{m^2}{\frac{L + W}{2}} \sin^2 \vartheta + \frac{m^2}{\frac{L - W}{2}} \cos^2 \vartheta = (A \cos \vartheta)^2 + (B \sin \vartheta)^2$$

$$m_y^2 = \frac{m^2}{\frac{L - W}{2}} \sin^2 \vartheta + \frac{m^2}{\frac{L + W}{2}} \cos^2 \vartheta = (A \sin \vartheta)^2 + (B \cos \vartheta)^2 \quad \dots \quad (42)$$

Die Glieder der Gleichungen (42) sind die Projektionen der Fehlerellipsenhalbachsen in die X - bzw. Y -achse.

Konstruiert man mit der X -(Y -) Projektion der Halbachsen A und B ein rechtwinkeliges Dreieck, dann hat die Hypotenuse den Wert $m_x(m_y)$. Bekanntlich stellen m_x und m_y die Radiusvektoren zu den Schnittpunkten der sogenannten Fußpunktskurve der mittleren Fehlerellipse mit den Koordinatenachsen des Landeskoordinatensystemes dar. Die geometrische Interpretation der Gleichungen (42) gestaltet sich besonders einfach unter Beachtung des Satzes, daß die Fußpunkte der aus den Brennpunkten auf eine Ellipsentangente gefällten Lote auf dem großen Scheitelkreis liegen.

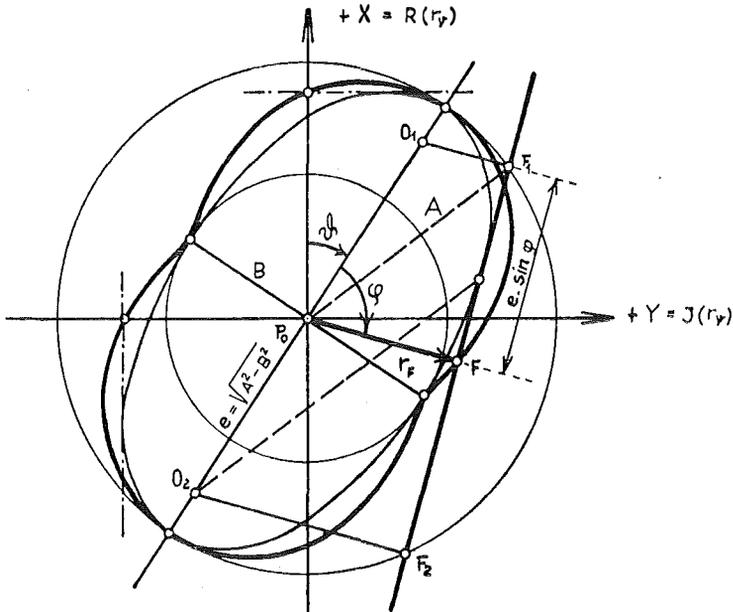


Abb- 9

Aus dem Dreieck $\triangle P_0 F_1 F$ folgt die Polargleichung der Fußpunktskurve mit

$$r_F^2 = A^2 - e^2 \sin^2 \varphi$$

und mit

$$e^2 = A^2 - B^2$$

$$r_F^2 = (A \cos \varphi)^2 + (B \sin \varphi)^2 \quad \dots (43)$$

Mit $\varphi_1 = -\vartheta$ bzw. $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ geht (43) in die Gleichungen (42) über.

Mit den Formeln (14) kann die Beziehung (43) zu

$$r_F^2 = \frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2\varphi$$

und mit (36) in der Form

$$r_F^2 = \frac{m^2}{2D} (L + W \cos 2\varphi) \quad \dots (44)$$

geschrieben werden. Auf diese Gleichung wird unter 5) im Zusammenhang

mit einer weiteren einfachen und interessanten Methode der graphischen Darstellung von m_x und m_y ohne Kenntnis der Fehlerellipsenhalbachsen noch eingegangen werden.

4. Der reduzierende Vektor beim mehrfachen Rückwärtseinschneiden.

Wurden von einem Neupunkt aus mehr als drei Festpunkte beobachtet, so haben die Verbesserungsgleichungen die Gestalt

$$v = a \cdot dx + b \cdot dy + z + w \quad . . . \quad (45)$$

Hierin bedeutet $\Delta v = a \cdot dx + b \cdot dy$

wieder die Änderung des auf den Neupunkt bezogenen Richtungswinkels infolge der Koordinatenänderungen dx und dy zwischen P_0' und P_0 gemäß der Gaußschen Relation.

w ist der Richtungswiderspruch nach

$$w = v - r_0, \quad . . . \quad (46)$$

wobei r_0 die vorläufig orientierte innere Richtung vom Neupunkt P_0' nach einem Festpunkt P darstellt.

z bedeutet die Orientierungsunbekannte

$$z = o' - o,$$

also den Unterschied zwischen vorläufiger und endgültiger Orientierung. Die Verbesserungsgleichung (45) kann durch vorgängige Elimination von z auf

die Form (1) gebracht werden. Die Forderung $\frac{\delta [vv]}{\delta z} = 0$ führt zu der Gleichung $[v]_i = 0$, aus welcher z als Funktion von dx und dy allein erhalten werden kann, da bekanntlich bei den inneren Richtungen $[w]_i = 0$ gemacht wird. Die auf die Form (1) gebrachten Gleichungen (45) lauten dann

$$v = A \cdot dx + B \cdot dy + w \quad . . . \quad (47)$$

wobei $A = a - \frac{[a]}{n} = r' \cdot \sin v'$

$$B = b - \frac{[b]}{n} = -r' \cos v' \quad . . . \quad (48)$$

Mit (47) ist das mehrfache Rückwärtseinschneiden in ein total äquivalentes mehrfaches Vorwärtseinschneiden verwandelt worden. Bei der Behandlung des mehrfachen Vorwärtseinschneidens hat sich gezeigt, daß für die Ausgleichung in Hinsicht auf die Normalgleichungsvektoren und die Elemente

der mittleren Fehlerellipse allein der Vektor $\frac{1}{2} [r_{\frac{1}{2}}^2 v]$ und der Betrag $[r^2] = L$

maßgebend waren. Man erhält vorerst aus (48) die bekannten Relationen

$$\begin{aligned} [AA] &= [aa] - \frac{[a]^2}{n} \\ [BB] &= [bb] - \frac{[b]^2}{n} \quad . . . \quad (49) \\ [AB] &= [ab] - \frac{[a][b]}{n} \end{aligned}$$

Weiters ist nach (4)

$$[r_v] = i \cdot [a] - [b]$$

Das Quadrat dieses Vektors

$$[r_v]^2 = - \{([a]^2 - [b]^2) + i \cdot 2 [a] [b]\} \quad . . . \quad (50)$$

ist wieder ein Vektor, dessen Richtung gleich der doppelten Richtung von $[r_v]$ ist und dessen absoluter Betrag den Wert

$$|[r_v]^2| = ([a]^2 + [b]^2) \quad . . . \quad (51)$$

hat. Gemäß (6) und mit (49) bilden wir nun den Vektor $[r'_{\frac{1}{2}v}]$. Man erhält

$$[r'_{\frac{1}{2}v}] = - \{([AA] - [BB]) + i \cdot 2 [AB]\} =$$

$$= - \{([aa] - [bb]) + i \cdot 2 [ab]\} + \frac{1}{n} \{([a]^2 - [b]^2) + i \cdot 2 [a] [b]\}$$

oder mit (6) und (50)

$$[r'_{\frac{1}{2}v}] = [r_{\frac{1}{2}v}] - \frac{1}{n} [r_v]^2 \quad . . . \quad (52)$$

Nach (9) bilden wir noch die Summe $[r'^2]$. Es ist

$$[r'^2] = L_R = [AA] + [BB] = [aa] + [bb] - \frac{1}{n} ([a]^2 + [b]^2)$$

was mit (9) und (51) in der Form

$$[r'^2] = [r^2] - \frac{1}{n} |[r_v]^2| \quad \text{oder}$$

$$L_R = L_V - \frac{1}{n} |[r_v]^2| \quad . . . \quad (53)$$

geschrieben werden kann. Aus (52) und (53) erkennt man, daß das Rückwärtseinschneiden zuerst genau wie das Vorwärtseinschneiden behandelt werden kann. Die dann noch erforderliche Reduktion bewirkt der Vektor $[r_v]^2$. Die graphische Ermittlung des reduzierenden Vektors $\vec{R} = - \frac{1}{n} [r_v]^2$ ist einfach.

Man konstruiert zuerst das Vektorpolygon

$$[r_v] = [r \cdot \cos v] + i \cdot [r \cdot \sin v]$$

wobei die einzelnen Vektoren r_v mit den Richtungswinkeln v und den Längen

$r = \frac{\rho''}{s}$ gebildet werden. Die absoluten Beträge r können einer $\frac{\rho''}{s}$ -Teilung

des Horskyschen Diagrammes entnommen bzw. mit dem Rechenschieber ermittelt werden.

Die geometrische Addition der einzelnen Vektoren r_v liefert den Summenvektor $[r_v]$, dessen Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen gegeben sind durch

$$R ([r_v]) = - [b]$$

$$I ([r_v]) = [a]$$

und dessen absoluter Betrag

$$|[r_v]| = \sqrt{[a]^2 + [b]^2} \text{ ist.}$$

Dieser Betrag wird graphisch quadriert. Hierbei findet wieder der Einheitskreis Verwendung.

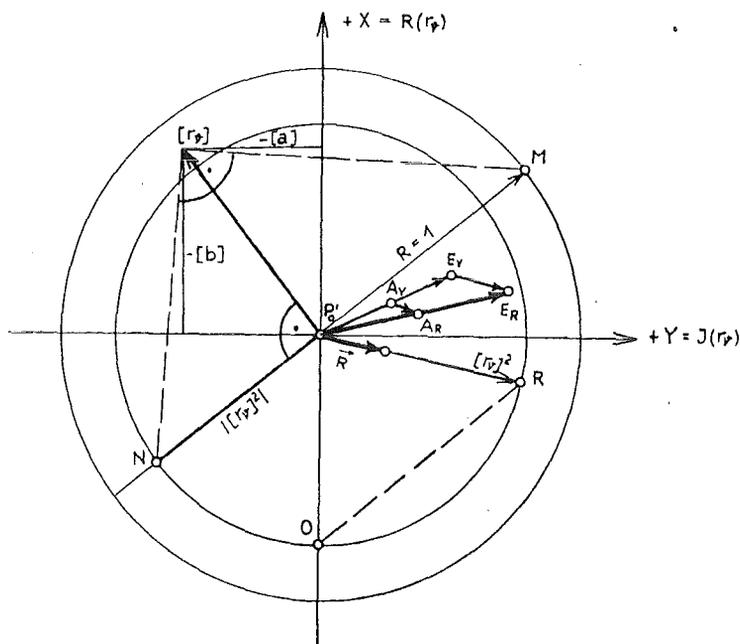


Abb. 10

Die Senkrechte auf den Vektor $[r_v]$ schneidet den Einheitskreis in M . Das Lot auf die Verbindungsgerade des Punktes M mit dem Endpunkt des Vektors $[r_v]$ schneidet diese Senkrechte im Punkte N . Aus dem über der Basis \overline{MN} liegenden rechtwinkligen Dreieck mit der Höhe $\sqrt{[a]^2 + [b]^2}$ folgt nach dem Höhensatz

$$\overline{P'_0 N} \cdot \overline{P'_0 M} = [a]^2 + [b]^2$$

somit nach (51)

$$\overline{P'_0 N} = |[r_v]^2|$$

Mit diesem Radius wird ein Kreis um P'_0 geschlagen, der die $-X$ -achse in 0 schneidet. Der Richtungswinkel des Vektors $[r_v]$ sei α . Dann ist der Richtungswinkel des reduzierenden Vektors $-\frac{1}{n} [r_v]^2$ gleich $2\alpha + \pi$. Diese Richtung ist einfach zu erhalten. Man zieht durch den Punkt 0 eine Senk-

rechte zum Vektor $[r_v]$ bzw. eine Parallele zur Geraden \overline{MN} . Sie schneidet den Kreis ($R = [a]^2 + [b]^2$) im Punkt R . Der Winkel dieser Geraden mit der $+X$ -Richtung ist somit $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Die Verbindungsgerade $\overline{P_0'R}$ gibt dann gemäß der Beziehung zwischen Peripherie- und Zentriwinkel die Richtung des reduzierenden Vektors mit $2\alpha + \pi$. Der absolute Betrag des Vektors $\overline{P_0'R} = -[r_v]^2$ ist noch durch die Anzahl n der vorhandenen Innenrichtungen zu dividieren. Das Ergebnis ist der reduzierende Vektor \overline{R} . Es ist natürlich auch möglich, den Vektor $[r_v]$ von vornherein durch n zu dividieren und damit die Konstruktion von \overline{R} durchzuführen. Gemäß (52) ist \overline{R} zum Vektor $[r_{\frac{1}{2}v}]$ zu addieren, wodurch man den Punkt E_R erhält. Durch Halbieren von $\overline{P_0'E_R}$ ergibt sich der Punkt A_R . Der mit A_R für die Ausgleichung maßgebende Kreisdurchmesser L_R ist nach (53) zu ermitteln, wonach L_v um den Betrag des reduzierenden Vektors zu vermindern ist. Die Konstruktion der Normalgleichungsvektoren und die Ermittlung der Fehlerellipse erfolgt mit A_R und L_R nach dem beim Vorwärtseinschneiden dargestellten Verfahren. Wegen $[w]_i = 0$ erfährt der Widerspruchsvektor \overline{W} keine Reduktion, er kann daher genau wie beim Vorwärtseinschneiden ermittelt werden.

Die Bildung der Richtungsverbesserungen ergibt sich aus der Beziehung (45)

$$\begin{aligned} v &= \Delta v + z + w \\ \text{Damit wird} \quad [v] &= [\Delta v] + n \cdot z + [w] \\ \text{und wegen} \quad [v] &= [w] = 0 \\ z &= - \frac{[\Delta v]}{n} \end{aligned}$$

Die Verbesserungen werden daher mit

$$v = \Delta v - \frac{[\Delta v]}{n} + w \quad \dots \quad (54)$$

erhalten. Als Schlußkontrolle dient wieder die Vektorgleichung (13)

$$(13) \quad [v \cdot r_v] = 0 \text{ und die Gleichung } [v] = 0$$

Die vektographische Ausgleichung des kombinierten Einschneidens ist auf Grund der bisherigen Darlegungen ebenso einfach möglich. Man hat in diesem Falle zuerst alle Richtungen als Vorwärtsrichtungen zu behandeln und dann für die Rückwärtsrichtungen noch den reduzierenden Vektor zu bestimmen.

L i t e r a t u r:

- Rohrer „Vorlesungen über graphische Ausgleichung“, Technische Hochschule Wien.
- 1841 C. G. I. Jacobi „De formatione et proprietatibus determinantum“, Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 22/1841, S 285.
- 1868 Helmert F. R. „Studien über rationelle Vermessungen“ in Schömilchs Z. f. M. u. Ph., 13. Bd., § 18, S. 91.

- 1875 Franke „Die trigonometrische Punktbestimmung im Netzanschluß“, München.
- 1876 Gauß F. G. „Trigonometrische und polygonometrische Rechnungen in der Feldmeßkunst“, Berlin, § 22, S. 67—71.
- 1876 Bertot „Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'academie des sciences“, 82. Bd. Januar—Juli 1876, S. 682—685.
- 1877 Helmert F. R. „Verfahren von Bertot“, Z. f. V., S. 53—58.
- 1886 Genge „Beiträge zur graphischen Ausgleichung“, Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft, Zürich.
- 1894 Klingatsch „Die graphische Ausgleichung bei der trigonometrischen Punktbestimmung“, Wien.
- 1896 Hammer „Zur graphischen Ausgleichung beim trigonometrischen Einschneiden von Punkten“ in Z. f. V., S. 611—624.
- 1903 Eggert „Über die günstigsten Punktlagen beim Einschneiden“, Z. f. M. u. Ph., S. 145.
- 1928 Jung „On Inskäring“ in „Svensk Lantmäteritidskrift“.
- 1939 Chen Y.—L. „Die vektorische und die klassische Ausgleichung geodätischer Messungen“, Würzburg, Dissertation.
- 1949 Embacher W. „Über vektorielle Ausgleichsrechnung“, Wien, Dissertation.
- 1950 Brandenberger „Zur Ausgleichung von trigonometrisch bestimmten Paßpunkten für luftphotogrammetrische Kartierungen“, Zürich, S. Z. f. V. 1950, Nr. 9 u. 10.
- 1951 Säuberli R. „Graphische Ausgleichung“, S. Z. f. V., Nr. 3 u. 11.
- 1952 Kovarik „Zur graphischen Bestimmung der Fehlerellipse und des mittleren Punktlagefehlers“, Z. f. V., Nr. 8.

Kleine Mitteilungen

Prof. Dr.-Ing. habil. Otto Lacmann — 70 Jahre

Prof. Lacmann, dem wir vor kurzem in dieser Zeitschrift (1957, S. 61) zu seiner Ernennung zum Ehrensenator der Techn. Universität Berlin-Charlottenburg die Glückwünsche der österreichischen Vermessungsingenieure ausgesprochen haben, vollendete am 14. September 1957 das 7. Jahrzehnt seines Lebens.

In seiner Geburtsstadt Colmar im Elsaß verblieb er bis zur Erwerbung des Abiturs am humanistischen Gymnasium und wandte sich dann dem Bauingenieurstudium an der Münchner und Berliner Technischen Hochschule zu.

Nach der Promovierung zum Dr.-Ing. kam er als wissenschaftlicher Mitarbeiter an die Berliner Versuchsanstalt für „Wasser- und Schiffbau“ (1913—1919), wo er schon stereophotogrammetrische Vermessungsmethoden einführte. 1919 gründete er die norwegische „Kart.-Kontoret Stereografik“ und leitete sie bis 1924. Nach einem vorübergehenden Aufenthalt in Moskau, wohin er als Instruktor zur Militärgeographischen Verwaltung eingeladen worden war, kehrte er nach Berlin zurück und gründete 1927 die Abteilung für Luftbildwesen und Navigation in der „Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (DVL)“, die er auch bis 1933 leitete.

1929 habilitierte er sich an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg und wurde im nächsten Jahr zum ordentlichen Professor der neuerrichteten Lehrkanzel für Photogrammetrie, der ersten für dieses Fach, ernannt. 1933 gelang es ihm, sein Forschungsinstitut an die Technische Hochschule hinüberzunehmen, wo es dem Institut für Vermessungswesen angegliedert wurde. Die Lehrkanzel und ihr Institut mit den reichen Sammlungen wurden eine Pflegestätte der Photogrammetrie, die durch ihre wertvollen Untersuchungen, Publikationen und die kostbaren Sammlungen hohes internationales Ansehen genoß. Leider wurde durch die Kriegereignisse ein Drittel der Sammlungen und Geräte zerstört und der Rest als Kriegsbeute abtransportiert.

Beim Neuaufbau und der Neuorganisation der Hochschule als „Technische Universität“ wurde Lacmanns Lehrkanzel erweitert und als „Lehrstuhl für Photogrammetrie und Kartenkunde“ mit einem eigenen „Institut für Photogrammetrie“ neu aufgebaut. Am 1. Oktober 1954 erfolgte