Paper-ID: VGI_195704

Ausgleichung ohne Aufstellung der Gauß'schen Normalgleichungen von Prof. E. Stiefel

Godfried Oliwa [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **45** (1), S. 22–23

1957

BibTeX:

```
@ARTICLE{Oliwa_VGI_195704,
Title = {Ausgleichung ohne Aufstellung der Gau{\ss}'schen Normalgleichungen
   von Prof. E. Stiefel},
Author = {Oliwa, Godfried},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {22--23},
Number = {1},
Year = {1957},
Volume = {45}
}
```

Wir lassen den in der Mitte stehenden Ausdruck unbeachtet und erkennen, daß diese Gl. für beliebige $d\lambda$ und $d\varphi$ nur bestehen kann, wenn:

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cdot \cos \gamma \ , \ \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \rho \sin \gamma \ , \ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \varphi \cos \gamma \ , \ \frac{\partial x}{\partial \lambda} = - \ r \sin \gamma$$

setzt man die cos γ und sin γ einander gleich, so ergeben sich die Cauchy-Riemann'schen Diff.-Gln.:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= - \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \end{aligned} \qquad \ldots \quad (14)$$

Zur Elemination der Radien ρ und r definiert man bekanntlich die isometrische Breite β nach der Beziehung

$$\rho \, d \varphi = r \, d \beta \text{ bzw. } \beta = \int_0^{\varphi} \frac{\rho}{r} \, d\varphi \qquad \ldots \quad (15)$$

diese ist, wie schon in dem genannten Werk Tissots erklärt ist und unmittelbar aus der Anschauung folgt, gleich dem Längenunterschied der Schnittpunkte einer 45^0-Loxodrome mit dem Parallel von der Breite φ und dem Äquator.

Abschließend sei noch an das im ersten Absatz Gesagte erinnert, wonach der Inhalt vorliegender Schrift ein Versuch sein soll, einige bekannte Beziehungen der Kartenentwurfslehre auf einfachste und anschauliche Art zu beweisen. Ein kleiner Auszug aus der Literatur erwies sich dabei als Richter über die Priorität menschlicher Erkenntnisse.

Referate

Ausgleichung ohne Aufstellung der Gauß'schen Normalgleichungen von Prof. E. Stiefel*)

Der Autor behandelt in dieser Arbeit eingehend ein Verfahren zur Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen ohne Aufstellung der Gauß'schen Normalgleichungen.

Dieses Verfahren läßt sich auf die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen übertragen (der einfachen Schreibweise halber, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, wird das Verfahren für drei Unbekannte betrachtet).

1. Das Verfahren liefert bei m Unbekannten nach m Schritten, d. h. bei m maliger Anwendung, die Unbekannten.

2. Bei jedem der m Schritte wird die Fehlerquadratsumme vermindert, bis sie nach dem m ten Schritt ihr Minimum erreicht. (Also der Algorithmus kann nach weniger als m Schritten abgebrochen werden, wenn eine vorgegebene Genauigkeitsstufe erreicht ist.)

3. Das Verfahren beginnt mit Näherungswerten x_0, y_0. . . . Sind x_j, y_j . . . die Näherungswerte für x, y . . . nach dem j ten Schritt, so nimmt, geometrisch gesprochen,

*) Erschienen in der Wissenschaftlichen Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden, 1953; S. 441—442.

der Abstand der Punkte P_j, deren Koordinaten die Näherungswerte x_j, y_j ... sind, vom Lösungspunkt P (x, y...) monoton ab. (Beweis Stiefel, Neue Methoden der Relaxationsrechnung, Z. f. Angewandte Mathematik und Physik Vol. III/1953/spez. S. 23.)

Kurz das Verfahren:

Sind $a_i x + b_i y + c_i z + l_i = v_i$ ($i = 1, 2, \ldots n$) die Fehlergleichungen, so ergibt sich durch Einsetzung der Näherungswerte x_0, y_0, z_0 der scheinbare Fehler v_i aus $a_i x_0 + b_i y_0 + c_i z_0 + l_i = v_i$; durch $r = [av]$, $s = [bv]$, $t = [cv]$, $e = -r$, $f = -s$, $g = -t$, wird $q = a_i e + b_i f + c_i g$ gebildet und es ist: $\lambda = (r^2 + s^2 + t^2) / [qq]$. Mit $v_i' = v_i + \lambda q_i$ folgt mit $r' = [av']$, $s = [bv']$, $t = [cv']$ und $\varepsilon = (r'^2 + s'^2 + t'^2) / (r^2 + s^2 + t^2)$ für $e' = -r' + \varepsilon e$, $f' = -s' + \varepsilon f$, $g' = -t' + \varepsilon g$, sodaß $q' = a_i e' + b_i f' + c_i g$ und $\lambda' = (r'^2 + s'^2 + t'^2) / [q' q']$ ist.

Der nächste Schritt ist dem zweiten analog. Man hat nur die nichtgestrichenen durch einfachgestrichene Größen, die einfach- durch zweifachgestrichene zu ersetzen. (Mit Ausnahme von a_i b_i c_i und x_0 y_0 z_0.) Der Abschluß des Verfahrens ist die Bildung von $x = x_0 + \lambda e + \lambda' e' + \ldots$ (die Ausdrücke für y und z sind analog gebaut.)

Es folgt ein sehr brauchbares Rechenschema und ein durchgerechnetes Beispiel. Rechenkontrollen sind durch Zeilen- und Kolonnensummen sowie scharfe quadratische Proben gegeben.

Diese Arbeit entwickelt also einen für unsere geodätische Praxis sehr interessanten Algorithmus.

Dieses Referat soll Ankündigung einer in den nächsten Nummern dieser Zeitschrift erscheinenden Publikation des Autors sein; in dieser wird die ganze Methode sowohl für bedingte als auch für die vermittelnde Ausgleichung auseinander gesetzt werden.

Oliwa

Kleine Mitteilungen

Referat des Dr. L. Brandstätter-Wolfsberg (Kärnten) in der Sitzung des Arbeitskreises „Topographisch-morphologische Kartenproben 1:25.000" in München

Am 2. November 1956 hielt an der Technischen Hochschule in München vor dem genannten Arbeitskreis Kollege Dipl.-Ing. Dr. techn. L. Brandstätter einen Bericht über seine Methode der Reliefdarstellung in topographischen Karten. Dem Protokoll über diese Sitzung entnehmen wir Nachstehendes:

„In einem Referat, das durch die Projektion von Kartenproben ergänzt wurde, gab Dr. Brandstätter einen Überblick über die von ihm entwickelte Methode der Reliefbearbeitung durch Kanten- und Schraffenzeichnung. Er betonte dabei die Forderung nach einer realistischen Plastik im Kartenbild, die weder durch Höhenlinien allein noch durch Schummerung unter Schrägbeleuchtung erzielt werden könne. Die Höhenlinien als abstrakte, mathematische Kurven ließen oft nicht die Gewinnung eines anschaulichen Landschaftsbildes zu, während die Schummerung das Kartenbild — vor allem auf den Südhängen — zu stark verdunkle. Dr. Brandstätter befürwortete die Ergänzung des Höhenlinienbildes mit einfachsten Hilfsmitteln, wofür er die Einzeichnung naturgegebener Kanten- und Kerblinien, die Hervorhebung von Kamm- und Tiefenlinien durch eine zurückhaltende morphologische Schummerung und die vorsichtige Verwendung von Fels- und Böschungsschraffen in Steilgebieten entwickelt hat. Den Sitzungsteilnehmern wurden von ihm selbst entworfene Kartenproben aus den Loferer Steinbergen sowie aus Mittelgebirgslandschaften Österreichs — hergestellt im Österreichischen Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen — zur Verfügung gestellt. Sie gaben einen wirkungsvollen Eindruck von der Leistungsfähigkeit seiner Methoden. Durch die Veröffentlichung seiner Dissertation, die demnächst erscheinen wird, wird eine speziellere Beurteilung seiner Vorschläge möglich sein.