

Paper-ID: VGI\_195521



## Beitrag zur rechnerischen Aerotriangulation

Hans G. Jerie <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Heerbrugg, Schweiz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **43** (6), S. 161–171

1955

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Jerie_VGI_195521,  
Title = {Beitrag zur rechnerischen Aerotriangulation},  
Author = {Jerie, Hans G.},  
Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {161--171},  
Number = {6},  
Year = {1955},  
Volume = {43}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom  
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),  
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und  
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

o. ö. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. R o h r e r und Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. L e g o

---

Nr. 6

Baden bei Wien, Ende Dezember 1955

XLIII. Jg.

---

## Beitrag zur rechnerischen Aerotriangulation\*)

Von H. G. Jerie, Heerbrugg

### *Einleitung*

Bereits eine ganze Reihe von Veröffentlichungen hat sich mit dem Problem beschäftigt, die Elemente der äußeren Orientierung von Luftbildern und die räumlichen Koordinaten von Punkten auf Grund von Messungen in Präzisionsstereokomparatoren auf analytischem Wege zu finden. Waren diese Methoden bisher in der Praxis fast nur für Versuchsarbeiten einsetzbar, so eröffnen sich ihnen mit zunehmender Verwendung von Rechenautomaten breite Anwendungsmöglichkeiten.

Inhalt dieser Arbeit ist eine Weiterentwicklung der von Schröder angegebenen Methode [1], mit dem Ziel der direkten Berechnung der absoluten Orientierungselemente als „Folgebildanschluß“ anstelle der dort vorgeschlagenen Berechnung in Form von „unabhängigen Bildpaaren“, die dann in einem zweiten Arbeitsgang erst aneinander zu schließen sind. Die von H. A. L. Shewell [2] gemachten Angaben lassen darauf schließen, daß die vom Ordnance Survey of Great Britain bereits praktisch angewandte Methode fast identisch mit der von Schröder angegebenen ist.

Die direkte Berechnung der absoluten Orientierungselemente wird auch in der von Earl Church entwickelten Methode der Berechnung durch Bildstreckenvergleiche [3] und in der erst kürzlich von A. M. Wassef veröffentlichten Arbeit, in der die Bildelemente in Eulerschen Winkeln ausgedrückt werden [4], erreicht.

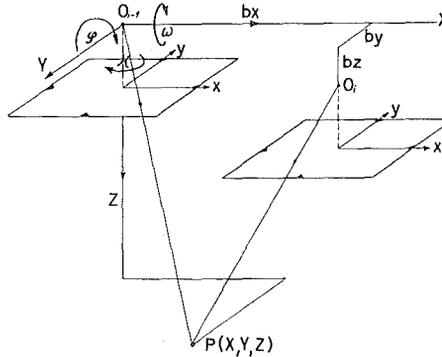
In der vorliegenden Arbeit werden die üblichen Größen zur Festlegung der Kammernlage Verwendung finden. Weiter soll in dieser Arbeit

---

\*) Der Originalartikel erscheint in englisch in „Photogrammetric Engineering“.

noch auf den Fall von Luftaufnahmen in kupiertem Gelände eingegangen werden.

Die bisher angegebenen Methoden — es handelt sich ja durchwegs um Verfahren mit schrittweiser Annäherung — würden hier nur mehr sehr schlecht konvergieren bzw. in gewissen Fällen ganz versagen.



### 1. Einfluß von Änderungen der Elemente der äußeren Orientierung einer Aufnahmekammer auf die Bildkoordinaten eines abgebildeten Punktes

Geht man von der Normalstellung der Kammer aus, wobei der Ursprung des Koordinatensystems ins Projektionszentrum gelegt wird und die üblicherweise gewählten Winkelwerte  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\varkappa$  mit  $\Phi$  angenommen werden, dann ergeben sich die Bildkoordinaten eines Punktes  $(x, y)$  mit:

$$\boxed{x = \frac{X}{Z} \cdot f \quad y = -\frac{Y}{Z} \cdot f} \quad (1)$$

Nach einer Verschiebung der Kammer parallel zu den angenommenen Koordinatenachsen um die Beträge  $bx$ ,  $by$  und  $bz$  ändern sich die Bildkoordinaten nacheinander in:

$$x^{(1)} = \frac{X - bx}{Z} \cdot f \quad y^{(1)} = -\frac{Y}{Z} \cdot f \quad (2)$$

$$x^{(2)} = \frac{X - bx}{Z} \cdot f = x^{(1)} \quad y^{(2)} = \frac{Y - by}{Z} \cdot f = y^{(1)} + \frac{by}{Z} \cdot f \quad (3)$$

$$x^{(3)} = \frac{X - bx}{Z - bz} \cdot f = x^{(2)} \left(1 - \frac{bz}{Z}\right)^{-1} \quad y^{(3)} = -\frac{Y - by}{Z - bz} \cdot f = y^{(2)} \left(1 + \frac{bz}{Z}\right)^{-1} \quad (4)$$

Wird nun die Kammer der Reihe nach um die Winkelwerte  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\varkappa$  um die entsprechenden Achsen gedreht, dann ändern sich die Bildkoordinaten schrittweise entsprechend den Ausdrücken:

$$x^{(4)} = \frac{x^{(3)} \sec \omega}{1 - \frac{y^{(3)}}{f} \cdot \lg \omega} \quad y^{(4)} = \frac{y^{(3)} + f \cdot \lg \omega}{1 - \frac{y^{(3)}}{f} \cdot \lg \omega} \quad (5)$$

$$x^{(5)} = \frac{x^{(4)} + f \cdot \lg \varphi}{1 - \frac{x^{(4)}}{f} \cdot \lg \varphi} \quad y^{(5)} = \frac{y^{(4)} \cdot \sec \varphi}{1 - \frac{x^{(4)}}{f} \cdot \lg \varphi} \quad (6)$$

$$x^* = x^{(5)} \cos \alpha - y^{(5)} \sin \alpha \quad y^* = y^{(5)} \cos \alpha + x^{(5)} \sin \alpha \quad (7)$$

Diese Werte  $x^*$  und  $y^*$  entsprechen also den tatsächlich im Komparator gemessenen Bildkoordinaten.

## 2. Reduktion der gemessenen Bildkoordinaten

Umgekehrt können aber die gemessenen Bildkoordinaten  $x^*$ ,  $y^*$  wenn die Orientierungselemente bekannt sind, durch Umkehrung der Formeln (3) bis (7) in reduzierte Bildkoordinaten  $x^{(1)}$ ,  $y^{(1)}$  zurückgeführt werden.

$$x^{(5)} = x^* \cos \alpha + y^* \sin \alpha \quad y^{(5)} = y^* \cos \alpha - x^* \sin \alpha \quad (8)$$

$$x^{(4)} = \frac{x^{(5)} - f \cdot \lg \varphi}{1 + \frac{x^{(5)}}{f} \cdot \lg \varphi} \quad y^{(4)} = \frac{y^{(5)} \cdot \sec \varphi}{1 + \frac{x^{(5)}}{f} \cdot \lg \varphi} \quad (9)$$

$$x^{(3)} = \frac{x^{(4)} \cdot \sec \omega}{1 + \frac{y^{(4)}}{f} \cdot \lg \omega} \quad y^{(3)} = \frac{y^{(4)} - f \cdot \lg \omega}{1 + \frac{y^{(4)}}{f} \cdot \lg \omega} \quad (10)$$

Für die Umkehrung der Formeln (3) und (4) müssen noch einige Umformungen durchgeführt werden, deren Ziel vor allem die Einführung von neuen Unbekannten  $\frac{by}{bx}$  und  $\frac{bz}{bx}$  anstelle von  $by$  und  $bz$  ist, um auf diese Weise für die Berechnung der Orientierungselemente den Maßstabeinfluß zu eliminieren.

(Ableitung siehe Anhang 1)

$$x^{(1)} = x^{(3)} \frac{\left(1 - \frac{bz}{bx} \cdot \frac{x}{f}\right)}{\left(1 - \frac{bz}{bx} \cdot \frac{x^{(3)}}{f}\right)} \quad (12)$$

$$y^{(1)} = y^{(3)} \left(1 - \frac{bz}{bx} \cdot \frac{x - x^{(1)}}{f}\right) - \frac{by}{bx} \cdot (x - x^{(1)}) \quad (13)$$

Unter  $x^*$ ,  $y^*$  sind also die gemessenen Bildkoordinaten in dem neu zu bestimmenden Bild zu verstehen, während  $x^{(1)}$ ,  $y^{(1)}$  die wegen  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\alpha$ ,  $by$ ,  $bz$  reduzierten Koordinaten der gleichen Punkte darstellen.  $x$  und  $y$  sind

die reduzierten Bildkoordinaten der gleichen Punkte in dem vorhergehenden, bereits bestimmten Bild.

### 3. Parallaxengleichung

Das Kriterium für richtige relative Orientierung eines Bildes zum vorhergehenden ist

$$y^{(1)} = y$$

Der Vorgang ist nun weiterhin so wie allgemein üblich in allen analytischen Methoden: Es ist nicht möglich, die gesuchten Unbekannten direkt in Funktion der gemessenen Bildkoordinaten  $x^*$ ,  $y^*$  und der reduzierten Bildkoordinaten des vorhergehenden Bildes  $x$ ,  $y$  auszudrücken, daher werden Näherungsformeln für die Bildordinatendifferenzen in Funktion der gesuchten Unbekannten aufgestellt.

Mit Hilfe dieser Parallaxengleichungen werden Näherungswerte für die Orientierungselemente errechnet.

Mit diesen werden die gemessenen Bildkoordinaten nach den strengen Formeln (8), (9), (10), (12), (13) reduziert.

Aus den reduzierten Bildkoordinaten werden neuerliche Verbesserungen für die Orientierungselemente errechnet. Und so wird das Verfahren fortgesetzt, bis sich aus der Rechnung keine Verbesserung mehr ergibt.

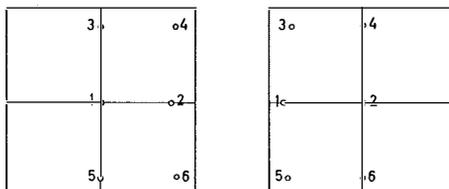
Praktisch wird damit durch Rechnung das gleiche getan, was sonst automatisch in den räumlichen Auswertegeräten beim Vorgang der relativen Orientierung geschieht.

Aus den Ausdrücken (8), (9), (10) und (13) erhält man nach Reihenentwicklung und Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung: die „Parallaxengleichung“.

$$p = y^* - y = x^* \cdot z + \frac{x^* y^*}{f} \varphi + f \cdot \left(1 + \frac{y^{*2}}{f^2}\right) \omega + y^* \cdot \frac{x - x^*}{f} \frac{bz}{bx} + (x - x^*) \cdot \frac{by}{bx} \quad (14)$$

### 4. Meßpunkte

Als Meßpunkte werden jeweils der Hauptpunkt und zwei Punkte auf der Hauptvertikalen möglichst mit gleichen Bildordinaten und die diesen entsprechenden Punkte in den Nachbarbildern gewählt.



### 5. Stereokomparator

Für diese Messungen am geeignetsten erscheint ein Stereokomparator mit einem  $x$ -Parallaxenmeßbereich in der Abmessung des Bildformates, Doveprismen und eventuell einer Einrichtung für optische Bildvertausche, damit nach dem Prinzip „Basis innen“ — „Basis außen“ gearbeitet werden kann. Dann verschwinden die Einflüsse von exzentrischer Bildeinlegung bzw. Parallaxen-Nullpunktfehlern auf die Maßstabübertragung.

Auch die  $y$ -Parallaxen können natürlich mit Hilfe der Doveprismen schärfer erfaßt werden.

### 6. Berechnung von Näherungswerten für die Orientierungselemente

Werden die Meßpunkte wie oben angegeben gewählt, dann stehen für die Berechnung der Näherungswerte der 5 Unbekannten jeweils 6 Gleichungen zur Verfügung. Auf Grund der symmetrischen Anordnung der Meßpunkte vereinfacht sich das Gleichungssystem und die Unbekannten können — analog zu den von Hallert [5] angegebenen Formeln zur relativen Orientierung — nach der Methode der kleinen Quadrate errechnet werden.

Die eine überschüssige Beobachtung macht das Verfahren symmetrisch, erhöht die Genauigkeit, besonders der  $\omega$ -Bestimmung, und gibt gewisse Kontrollmöglichkeit.

Für den Fall des praktisch ebenen Geländes gilt:

$$\begin{aligned} x - x^* &= b \\ |y| \text{ (für Punkt 3 — 6)} &= d \end{aligned}$$

Nennt man  $y^* - y = p$ , dann erhält man folgende Formeln, ohne auf deren bereits bekannte Ableitung einzugehen:

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{3} \frac{f}{b} (p_1 + p_3 + p_5 - p_2 - p_4 - p_6) \\ \varphi &= -\frac{f}{2} \frac{1}{bd} (p_3 - p_5 - p_4 + p_6) \\ \omega &= -\frac{f}{4} \frac{1}{d^2} (2 p_1 + 2 p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6) \quad (15) \\ \frac{bz}{bx} &= \frac{f}{2} \frac{1}{bd} (p_4 - p_6) \\ \frac{by}{bx} &= \frac{1}{3} \frac{f}{b} (p_2 + p_4 + p_6) - \frac{1}{3} \frac{1}{b} \left( 3f + \frac{2d^2}{f} \right) \omega \end{aligned}$$

### 7. Berechnung der Näherungswerte für die Orientierungselemente für den Fall des nichtebenen Geländes

Die Annahme  $(x - x^*) = b = \text{const.}$  ist nicht mehr erfüllt. Schon bei verhältnismäßig kleinen Höhendifferenzen ( $\Delta h \sim 5 - 10\%$  von  $h$  für Normalwinkelaufnahmen) kann dies dazu führen, daß das Verfahren der

sukzessiven Näherung nur mehr sehr schlecht konvergiert, d. h., daß eine große Anzahl von Näherungsrechnungen durchzuführen sind und daß sogar in manchen Fällen bei größeren Höhendifferenzen überhaupt keine Konvergenz des Verfahrens eintritt.

Man kann das vermeiden, wenn für die Berechnung der Näherungswerte Formeln verwendet werden, die analog zu der Verallgemeinerung des Hallert'schen Orientierungsverfahrens für beliebiges Gelände [6] diese Höhenunterschiede berücksichtigen.

Dies ist umsomehr gerechtfertigt, weil auch in diesem Fall die Berechnung der Näherungswerte nur einen kleinen Teil der gesamten Berechnungsarbeit in Anspruch nimmt, während die nachfolgende Berechnung der reduzierten Bildkoordinaten nach den strengen Formeln weit mehr Arbeitsaufwand verlangt und also hauptsächlich hier die Anzahl der notwendigen Wiederholungsrechnungen ins Gewicht fällt.

Wählt man die Meßpunkte wieder in der oben angegebenen Weise und führt man nun  $x - x^* = b$  als variabel ein, so geht die Parallaxenformel (14) für die 6 Punkte über in:

$$\begin{array}{rcl}
 p_1 = -b_1 \cdot z & + & f \cdot \omega & + & b_1 \frac{by}{bx} \\
 p_2 = -b_3 \cdot z - b_3 \cdot \frac{d}{f} \cdot \varphi + f \left( 1 + \frac{d^2}{f^2} \right) \omega + b_3 \frac{d}{f} \cdot \frac{bz}{bx} + b_3 \frac{by}{bx} \\
 p_5 = -b_5 \cdot z + b_5 \cdot \frac{d}{f} \cdot \varphi + f \left( 1 + \frac{d^2}{f^2} \right) \omega - b_5 \frac{d}{f} \cdot \frac{bz}{bx} + b_5 \frac{by}{bx} \\
 p_2 = & + & f \cdot \omega & + & b_2 \frac{by}{bx} \\
 p_4 = & + & f \left( 1 + \frac{d^2}{f^2} \right) \omega + b_4 \frac{d}{f} \cdot \frac{bz}{bx} + b_4 \frac{by}{bx} \\
 p_6 = & + & f \left( 1 + \frac{d^2}{f^2} \right) \omega - b_6 \frac{d}{f} \cdot \frac{bz}{bx} + b_6 \frac{by}{bx}
 \end{array} \quad (16)$$

Für die folgenden Näherungen wird

$$b = x - x^{(1)} \text{ anstelle } b = x - x^*$$

Um nun einigermaßen einfache Normalgleichungen zu bekommen, kann man sich mit einem Kunstgriff helfen. Man gibt jeder Verbesserungsgleichung ein Gewicht  $\frac{1}{b_1}$ . Dies hat natürlich keinerlei theoretische Rechtfertigung, ermöglicht aber eine leichte Auflösung des Normalgleichungssystems, ohne daß die dadurch entstehenden Fehler irgendeinen nennenswerten Einfluß hätten. Die  $b_i$  ändern sich ja nur um relativ kleine Beträge, andererseits ist es aber fehlertheoretisch ziemlich ohne Belang, wie der durch nur eine überschüssige Beobachtung auftretende Widerspruch auf die

5 notwendigen Beobachtungen verteilt wird. Nur darauf hat aber die Einführung von Gewichten für die Beobachtungen einen Einfluß.

Führt man nun noch einige Bezeichnungen ein:

$$\frac{d}{f} = k \text{ und } 1 + \frac{d^2}{f^2} = 1 + k^2 = K$$

dann erhalten die Verbesserungsgleichungen folgende Form:

$$\begin{aligned} v_1 &= -x && + \frac{by}{bx} + \frac{f}{b_1} \omega && - \frac{p_1}{b_1} \\ v_3 &= -x - k \cdot \varphi + k \frac{bz}{bx} + \frac{by}{bx} + \frac{f}{b_3} K \omega && - \frac{p_3}{b_3} \\ v_5 &= -x + k \cdot \varphi - k \frac{bz}{bx} + \frac{by}{bx} + \frac{f}{b_5} K \omega && - \frac{p_5}{b_5} \\ v_2 &= && + \frac{by}{bx} + \frac{f}{b_2} \omega && - \frac{p_2}{b_2} \\ v_4 &= && + k \frac{bz}{bx} + \frac{by}{bx} + \frac{f}{b_4} K \omega && - \frac{p_4}{b_4} \\ v_6 &= && - k \frac{bz}{bx} + \frac{by}{bx} + \frac{f}{b_6} K \omega && - \frac{p_6}{b_6} \end{aligned} \quad (17)$$

Nach Aufstellung und Lösung der Normalgleichungen erhält man analog zu der Ableitung in (6)

$$\omega = \omega_1 \cdot \frac{u^2}{u^2 + v^2} + \omega_2 \frac{v^2}{u^2 + v^2} \quad (18a) \quad \text{wobei}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{u} \left( 2 \frac{p_1}{b_1} - \frac{p_3}{b_3} - \frac{p_5}{b_5} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{v} \left( 2 \frac{p_2}{b_2} - \frac{p_4}{b_4} - \frac{p_6}{b_6} \right) \quad (18b) \quad \text{und}$$

$$u = \left( 2 \frac{f}{b_1} - \frac{f}{b_3} K - \frac{f}{b_5} K \right), \quad v = \left( 2 \frac{f}{b_2} - \frac{f}{b_4} K - \frac{f}{b_6} K \right) \quad (18c)$$

darnach werden die Werte  $\frac{p_i}{b_i}$  wegen des  $\omega$ -Einflusses korrigiert

$$\begin{aligned} \bar{p}_i &= \frac{p_i}{b_i} - \frac{f}{b_i} \cdot \omega && i = 1, 2 \\ \bar{p}_i &= \frac{p_i}{b_i} - \frac{f}{b_i} \cdot K \cdot \omega && i = 3, 4, 5, 6 \end{aligned} \quad (18d)$$

und man erhält die anderen Elemente

$$\begin{aligned}
 \varphi &= -\frac{1}{2k} \left( \frac{\bar{p}_3}{b_3} - \frac{\bar{p}_5}{b_5} - \frac{\bar{p}_4}{b_4} + \frac{\bar{p}_6}{b_6} \right) \\
 z &= -\frac{1}{3} \left( \frac{\bar{p}_1}{b_1} + \frac{\bar{p}_3}{b_3} + \frac{\bar{p}_5}{b_5} - \frac{\bar{p}_2}{b_2} - \frac{\bar{p}_4}{b_4} - \frac{\bar{p}_6}{b_6} \right) \\
 \frac{by}{bx} &= +\frac{1}{3} \left( \frac{\bar{p}_2}{b_2} + \frac{\bar{p}_4}{b_4} + \frac{\bar{p}_6}{b_6} \right) \\
 \frac{bz}{bx} &= +\frac{1}{2k} \left( \frac{\bar{p}_4}{b_4} - \frac{\bar{p}_6}{b_6} \right)
 \end{aligned} \tag{18e}$$

### 8. Berechnung von $bx$ (Maßstabsübertragung)

$$bx = Z \cdot \frac{x - x^{(1)}}{f} \tag{19}$$

Berechnung aus den reduzierten Bildkoordinaten eines oder mehrerer Punkte, deren Höhe  $Z$  aus dem vorhergehenden Bildpaar bekannt ist, z. B. dem Hauptpunkt des gemeinsamen Bildes.

### 9. Berechnung von $by$ und $bz$

aus den errechneten Verhältnissen  $\frac{by}{bx}$  und  $\frac{bz}{bx}$

### 10. Berechnung der Modellkoordinaten aller gemessenen Punkte

$$Z = bx \cdot \frac{f}{x - x^{(1)}}, \quad X = \frac{x}{f} \cdot Z, \quad Y = \frac{y}{f} \cdot Z \tag{20}$$

Die Modellkoordinaten sind noch jeweils auf das Projektionszentrum des 1. Bildes jedes Modelles bezogen.

### 11. Streifenkoordinaten

Die Modellkoordinaten in einem einheitlichen Streifensystem, z. B. bezogen auf das Projektionszentrum des 1. Bildes im Streifen ergeben sich aus den unter 10. genannten Modellkoordinaten durch Addition von Konstanten, die jeweils der Summe der Basiskomponenten  $bx$ ,  $by$  und  $bz$  aller vorhergehenden Modelle entsprechen.

### 12. Praktischer Vorgang

Zur Vorbereitung der Triangulationsstreifen werden die Meßpunkte markiert, und zwar jeder Punkt nur einmal und nur in demjenigen Bild, in dem er auf der Hauptvertikalen liegt. Eine Markierung des gleichen Punk-

tes auch in den beiden Nachbarbildern ist nicht notwendig, weil die Messung ja stereoskopisch erfolgt.

Die Bildkoordinaten werden in einem Stereokomparator gemessen, wobei es, wie schon oben erwähnt, wünschenswert ist, ein Bild für die Messungen in den zwei aufeinanderfolgenden Modellen, denen es gemeinsam ist, unverändert in einem Plattenträger zu belassen.

#### B e r e c h n u n g:

Für das erste Modell werden die Elemente der relativen Orientierung berechnet, entweder als „Unabhängige Bildpaare“ nach der von Schröder angegebenen Methode oder auch als „Folgebildanschluß“, wie im vorangehenden gezeigt, wobei vorläufig die Elemente des 1. Bildes mit Null angenommen werden.

Nach Einführung eines Näherungswertes für  $bx$  werden Raumkoordinaten der gegebenen Paßpunkte errechnet (20) und der genaue Maßstabswert durch Raumstreckenvergleich bestimmt.

Damit erhält man die endgültigen Werte der Basiskomponenten.

Nach neuerlicher Berechnung der Raumkoordinaten kann man die notwendigen Modelldrehungen  $\Phi$  und  $\Omega$  berechnen. Entweder mit Hilfe der bekannten graphischen Konstruktion zur absoluten Orientierung in räumlichen Auswertegeräten oder, wenn mehr als drei Paßpunkte gegeben sind, durch Ausgleichung, indem jedem Punkt eine Verbesserung

$$v_i = h_0 + X_i \Phi + Y_i \Omega - \Delta Z$$

zugeordnet wird und die wahrscheinlichsten Werte von  $\Phi$ ,  $\Omega$  und  $h_0$  gefunden werden.

Im allgemeinen wird  $\Phi$  und  $\Omega$  genügend klein sein, daß der Einfluß von vernachlässigten Gliedern höherer Ordnung nicht fühlbar wird. Ähnliches gilt auch für die Fehler, die dadurch entstehen, daß man nicht berücksichtigt, daß eine der beiden Drehungen um eine Sekundärachse erfolgen sollte.

Die neuen Werte von  $\varphi$  und  $\omega$  erhält man aus den Elementen der relativen Orientierung durch Hinzufügung von  $\Phi$  und  $\Omega$ . Auch die Basis muß dieser Drehung unterworfen werden.

$\varphi_1 = \varphi_1' + \Phi$	$\varphi_2 = \varphi_2' + \Phi$	
$\omega_1 = \omega_1' + \Omega$	$\omega_2 = \omega_2' + \Omega$	
$bx = bx' \cdot \cos \Phi - bz' \cdot \sin \Phi$		(21)
$by = by' \cdot \cos \Omega + bz' \cdot \sin \Omega$		
$bz = bz' \cdot \cos \Phi - bx' \cdot \sin \Phi$		

Damit sind die Elemente der äußeren Orientierung des 1. und 2. Bildes gefunden. Mit ihnen werden die Meßpunkte des 2. Bildes nach den Formeln (8, 9, 10, 12, 13) reduziert.

Dann werden die Differenzen zwischen den gemessenen Bildordinaten im 3. Bild und den reduzierten Ordinaten im 2. Bild gebildet.

$$\rho = y^* [3. \text{ Bild}] - y [2. \text{ Bild}]$$

Aus diesen Parallaxen werden mit Hilfe der Formeln (15) oder (18) Näherungswerte für die gesuchten Orientierungselemente gefunden.

Diese Näherungswerte werden für eine erste Reduktion der im 3. Bild gemessenen Bildkoordinaten verwendet (Formel 8, 9, 10, 12, 13).

Mit Hilfe der Differenzen zwischen diesen erstmalig reduzierten Koordinaten des 3. Bildes und den reduzierten Koordinaten des 2. Bildes erhält man Verbesserungen zu den Näherungswerten der Orientierungselemente.

Nun werden die ursprünglich gemessenen Bildkoordinaten erneut wegen der verbesserten Werte der Orientierungselemente reduziert usw.

Dieser Prozeß wird so lange fortgesetzt, bis die übrigbleibenden Ordinattendifferenzen ( $y$ -Parallaxen) kleiner als ein vorgegebenes Maß werden.

Mit den endgültigen Orientierungselementen werden auch alle anderen im 3. Bild gemessenen Punkte reduziert.

Dann wird aus einem oder mehreren koordinatenmäßig aus dem Vormodell bekannten Punkte  $bx$  berechnet (Maßstabsübertragung) (Formel 19).

Damit können auch  $by$  und  $bz$  und weiterhin die Modellkoordinaten aller gemessenen Punkte gefunden werden (Formeln 20).

Als letztes sind diese Modellkoordinaten noch auf ein einheitliches Streifensystem, z. B. auf das Projektionszentrum des 1. Bildes zu beziehen, was jeweils nur die Addition der Summe der Basiskomponenten aller vorhergehenden Modelle zu den errechneten Modellkoordinaten erfordert.

Diese Streifenkoordinaten können nun einer der üblichen Ausgleichungsmethoden unterworfen werden, wie wenn sie aus einer Aeropolygonierung an einem räumlichen Auswertegerät erhalten worden wären.

#### *Anhang 1:*

Aus (1) und (2) erhält man die bekannte Gleichung für den Normalfall:

$$Z = bx \cdot \frac{f}{x - x^{(1)}} \quad (11)$$

setzt man diese in (4) nach einer Umformung ein

$$\begin{aligned} x^{(3)} &= x^{(1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{bz}{Z}} \\ x^{(1)} &= x^{(3)} \cdot \left(1 - \frac{bz}{Z}\right) \\ x^{(1)} &= x^{(3)} \cdot \left(1 - \frac{bz}{bx} \cdot \frac{x - x^{(1)}}{f}\right) \\ x^{(1)} &= x^{(3)} \cdot \left(1 - \frac{bz}{bx} \cdot \frac{x}{f}\right) + x^{(1)} \cdot \frac{bz}{bx} \cdot \frac{x^{(3)}}{f} \end{aligned}$$

so erhält man nach Zusammenfassung der  $x^{(1)}$

$$x^{(1)} = x^{(3)} \cdot \frac{1 - \frac{bz}{bx} \cdot \frac{x}{f}}{1 - \frac{bz}{bx} \cdot \frac{x^{(3)}}{f}} \quad (12)$$

Ähnlich erhält man aus (4)

$$y^{(3)} = -\frac{Y - by}{Z - bz} \cdot f$$

$$y^{(3)} \left(1 - \frac{bz}{Z}\right) = -\left(\frac{Y}{Z} \cdot f - \frac{by}{Z} \cdot f\right) = y^{(1)} + \frac{by}{Z} \cdot f$$

daraus

$$y^{(1)} = y^{(3)} \left(1 - \frac{bz}{Z}\right) - \frac{by}{Z} \cdot f$$

setzt man wieder (11) ein, so wird

$$y^{(1)} = y^{(3)} \left(1 - \frac{bz}{bx} \cdot \frac{x - x^{(1)}}{f}\right) - \frac{by}{bx} \cdot (x - x^{(1)}) \quad (13)$$

#### L i t e r a t u r:

- (1) F. Schröder: Die rechnerische Orientierung von Luftbildaufnahmen auf Grund von Messungen am Stereokomparator und ihr Verhältnis zu den optisch-mechanischen Verfahren. Diss. T. H. Hannover 1949.
- (2) Shewell H. A. L.: Photogrammetric Record 1952/2.
- (3) Earl Church: Theory of Photogrammetry. Bull. Nr. 19.
- (4) Wassef A. M.: Some recent Development in analytical Photogrammetry: The use of Eulerian Angles and computational Procedure. Photogrammetria 1953—54/2.
- (5) Hallert B.: Über die Herstellung Photogrammetrischer Pläne. Diss. T. H. Stockholm 1944.
- (6) Jerie H. G.: Beitrag zu numerischen Orientierungsverfahren für gebirgiges Gelände. Photogrammetria 1953—54/1.

## Über das Rückwärtseinschneiden im Raum

Von Ing. K. Killian

(Schluß)

Zur numerischen Berechnung des räumlichen Rückwärtseinschnittes nach obiger Methode ist es notwendig, die Koeffizienten der beiden Gln. (8) und (9) zu berechnen. Wir bezeichnen die gemeinsame Seite der beiden gewählten Pyramiden (1, 2, 3, 0 und  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, 0$ ) mit  $b$ . Die anderen Seiten heißen  $a, c$  bzw.  $\bar{a}, \bar{c}$  (Fig. 2). Beim räumlichen Rückwärtseinschnitt nach drei Festpunkten wird bekanntlich vorteilhaft das Verhältnis zweier Kanten-