Paper-ID: VGI_195509

Zum Wurzelziehen mit der Rechenmaschine

Godfried Oliwa [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **43** (2), S. 54–55

1955

BibTEX:

```
@ARTICLE{Oliwa_VGI_195509,
Title = {Zum Wurzelziehen mit der Rechenmaschine},
Author = {Oliwa, Godfried},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {54--55},
Number = {2},
Year = {1955},
Volume = {43}
}
```

Zum Wurzelziehen mit der Rechenmaschine

Von Godfried Oliwa, Wien

In der Rechenpraxis wird oft eine Methode des Quadratwurzelziehens benützt, für die folgende Regel gilt:

Man stelle die Zahl a ($\sqrt{a}$ wird gesucht) in das Resultatwerk. Dividiert man die Zahl a subtraktiv durch b_0 (einem Näherungswert von $\sqrt{a}$, der ins Einstellwerk gesetzt wird), so erhält man im Zählwerk eine Zahl b_0'.

Stimmt nun b_0 und b_0' in den ersten r ($r \geqq 2$) Stellen überein, so stimmt $b_1 = \frac{1}{2}(b_0 + b_0')$ mit dem b_1' (wie b_0' zu finden) auf weitere r Stellen überein.

Zu dieser Art des Quadratwurzelziehens ist zu bemerken, daß mittels Doppelrechenmaschinen Ausdrücke von der Gestalt:

$$b_1 \sqrt{a_1} + b_2 \sqrt{a_2} + \dots \qquad \dots \quad (1)$$

ausgewertet werden können [**1**]. Man stellt ins linke Einstellwerk b und ins rechte Resultatwerk a. Zieht man, wie oben beschrieben, die Wurzel aus a und läßt b bedenkenlos mitlaufen (natürlich unter Berücksichtigung des Vorzeichens von b durch die entsprechende Hebelstellung), so erhält man im linken Resultatwerk Ausdrücke von der Gestalt (1).

Die oben aufgezeigte Methode kann auf das Ausziehen der m-ten Wurzel aus einer Zahl verallgemeinert werden [**2**]. Im allgemeinen werden nicht mehr so viele Stellen bei einer ähnlichen Mittelbildung übereinstimmen wie im Falle der Quadratwurzel. Beim Kubikwurzelziehen sind r-2 sicher in der Praxis mittelbar.

Es ist allgemein $\sqrt[m]{a} = b_0 + h_0$, wobei b_0 der Näherungswert und h_0 die Abweichung ist. Wird nun $\frac{a}{b_0^{m-1}} = b_0'$ gebildet, so mögen b_0 und b_0' in den ersten r Stellen übereinstimmen. Stellt man b_0 und b_0' durch Zehnerpotenzen dar, also $b_0 = \sum\limits_k 10^{n-k}\, b_{0k}$ und $b_0' = \sum\limits_k 10^{n-k}\, b_{0k}'$, so gelte

$$b_{0k} = b_{0k}' \text{ für } 0 \leqq k \leqq r-1 \, . \qquad \dots \quad (2)$$

n ist dabei eine ganze, feste Zahl. Setzt man $b_1 = \frac{1}{m}[(m-1)\, b_0 + b_0']$ an,

so folgt wegen $b_0 = \frac{a}{b_0^{m-1}}$ und $a = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} b_0^{m-k} h_{0k}$:

$$b_1 = \sqrt[m]{a} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} m^{-1}\, b_0^{1-k}\, h_0^k$$

Die ersten r Stellen von $\sqrt[m]{a}$ sind wegen (2) die b_{0k} $(0 \leqq k \leqq r-1)$, daher ist $h_0 < 10^{n-r+1}$ und weil $b_0 \geqq 10^n$ ist, so ist die Abweichung für b_1 kleiner als

$$\sum_{k=2}^{m} \binom{m}{k} m^{-1} \, 10^{n-k(r-1)} \, .$$

Für $m = 2$ ist dann der Fehler des Näherungswertes kleiner als $0{,}5 \, . \, 10^{n-2(r-1)}$. Demnach stimmen außer den ersten r Stellen noch weitere $r-1$ überein. Da $0{,}5 \, . \, 10^{n-2(r-1)}$ obere Schranke und nicht Grenze ist, so ist in der Praxis auch die $2\,r$-te Stelle sicher.

Es sei hier noch an Extremfälle (z. B. $a = 999.998.000.001$) erinnert. Wählt man $b_0 = 999.000$, dann folgt für $b_0' = 1.000.998$; hier stimmen die drei ersten Stellen von b_0 und b_0' nicht überein. Trotzdem kann die Mittelung durchgeführt werden. Man sieht dies leicht ein.

Für den Fall $m = 3$ ist der Näherungswert $b_1 = \frac{1}{3}\,(2\,b_0 + b_0')$ mit einem Fehler behaftet, der kleiner als $10^{n-2(r-1)} + 0{,}3.10^{n-3(r-1)}$ ist. Die Potenz $10^{n-2(r-1)}$ $(r \geqq 2)$ hat die $(2\,r-1)$-te Ziffer von $\sqrt[3]{a}$. Daher beeinflußt der Fehler die $(2\,r-2)$-te Stelle sicher nicht, da für alle $r \geqq 2$ der zweite Summand des Fehlers kleiner als der erste ist.

$$\text{Für } m > 3 \text{ ist } \binom{m}{k} m^{-1} > 1 \, .$$

Es wäre noch zu untersuchen, wie viele Stellen für größere m beim ersten Näherungsschritt übereinstimmen; dies würde hier aber zu weit führen.

Schließlich soll auf das praktische Kubikwurzelziehen eingegangen werden [**3**]. Für diese Rechenart ist es vorteilhaft, Doppelmaschinen zu verwenden. Es steht a ($\sqrt[3]{a}$ wird gesucht) im rechten Resultatwerk. Bringt man b_0 in das linke Einstellwerk und quadriert, so erhält man im linken Resultatwerk b_0^2. Nun werde das Zählwerk und das Einstellwerk gelöscht und b_0^2 ins rechte Einstellwerk gesetzt. Dividiert man nun subtraktiv a durch b_0^2, so erhält man b_0' im Zählwerk. b_0' wird notiert und das Zählwerk auf 0 zurückgekurbelt. b_0^2 wird nun gelöscht. Bildet man links $\frac{1}{3}\,(2\,b_0 + b_0')$ und dessen Quadrat, so kann man wie beim ersten Schritt verfahren.

Literatur:

[**1**] *Herrmann,* A. V. N. **49** (1937) S. 270—276
[**2**] *Meyer zur Capellen,* Mathematische Instrumente (1944) S. 130.
[**3**] *Wittke,* Die Rechenmaschine und ihre Rechentechnik (1943) S. 51—52.