Paper-ID: VGI_195413

Die Richtungsübertragung in Streckenketten

Günther Schelling [1]

[1] *TH Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **42** (5), S. 129–143

1954

BibTEX:

```
@ARTICLE{Schelling_VGI_195413,
Title = {Die Richtungs{\"u}bertragung in Streckenketten},
Author = {Schelling, G{\"u}nther},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {129--143},
Number = {5},
Year = {1954},
Volume = {42}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN
Offizielles Organ
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppe Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie
REDAKTION:
Hofrat Prof. Dr. h. c. mult. E. Doležal,
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. Lego und o. ö. Professor Dipl.-Ing. Dr. H. Rohrer

Nr. 5 Baden bei Wien, Ende Oktober 1954 XLII. Jg.

Die Richtungsübertragung in Streckenketten

(Mit einer Figurentafel)

Von G. Schelling, T. H. Graz

Die bisher erschienenen Abhandlungen über die Ausgleichung und die Fehlertheorie der Streckenketten sollen mit der Darstellung der Verhältnisse bezüglich der Winkelgewichte, der Unsicherheit der Richtungsübertragung und des Querfehlers abgerundet werden.

I. WINKELGEWICHTE IN ZENTRALSYSTEMEN

1. Das Gewicht der Winkel in überbestimmten Zentralsystemen

Wir haben in [2] versucht, aus dem Gewicht einzelner Seiten von Zentralsystemen, in denen sämtliche Seiten mit gleicher Meßgenauigkeit vorliegen, auf deren Eignung als Grundfigur einer Streckenkette zu schließen. Die analoge Untersuchung auf Grund des Gewichtes einzelner Winkel kann weitere Schlüsse in dieser Richtung zulassen.

Jeder Winkel in einem Zentralsystem kann mit Hilfe des Cos.-Satzes als Funktion der gemessenen und ausgeglichenen Seiten dargestellt werden (Fig. 1). In der bisherigen Bezeichnungsweise wird jeder Zentralwinkel α_i dargestellt durch

$$\alpha_i = \arccos \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2 - s_i^2}{2\, r_{i-1}\, r_i} \quad . \qquad (1a)$$

Die beiden peripheren Winkel ergeben sich daraus durch zyklische Vertauschung der Seiten:

$$\beta_i = \arccos \frac{r_i^2 + s_i^2 - r_{i-1}^2}{2\, r_i\, s_i} \qquad \gamma_i = \arccos \frac{s_i^2 + r_{i-1}^2 - r_i^2}{2\, s_i\, r_{i-1}} \quad . \qquad (1b]$$

Die Ableitungen der obigen Funktionen α_i, β_i und γ_i nach den sie bestimmenden Seiten r_i, r_{i-1} und s_i ergeben die zur Bildung der Gewichtsfunktion erforderlichen Koeffizienten f. Ihre Bestimmung wird uns erleichtert, weil wir die Bedingung in einem einfach überstimmten Zentralsystem durch die Gleichung $F = [\alpha_i] - 2\pi = 0$ formuliert haben [1]). Daher sind auch die von uns gesuchten Ableitungen $\frac{\partial \alpha_i}{\partial r_i}$, $\frac{\partial \alpha_i}{\partial r_{i-1}}$ und $\frac{\partial \alpha_i}{\partial s_i}$ bereits in den Ableitungen der Funktion F nach den betreffenden Seiten enthalten, die aber als Koeffizienten $a_{r,\,i}$, $a_{r,\,i-1}$ und $a_{s,\,i}$ der Verbesserungen $v_{r,\,i}$, $v_{r,\,i-1}$ und $v_{s,\,i}$ schon vorliegen [2]). So finden wir die Koeffizienten f der Funktion α_i und erhalten diejenigen der Funktionen β_i und γ_i entsprechend ihrem Bildungsgesetz durch zyklische Vertauschung.

$$\begin{array}{lll}
F = \alpha_i & F = \beta_i & F = \gamma_i \\[2ex]
f_{r,\,i} = \dfrac{r_{i-1} \cos \alpha_i - r_i}{\operatorname{sign} \sin \alpha_i \, 2 J_i} & f_{r,\,i} = \dfrac{s_i \cos \beta_i - r_i}{\operatorname{sign} \sin \beta_i \, 2 J_i} & f_{r,\,i} = \dfrac{r_i}{\operatorname{sign} \sin \gamma_i \, 2 J_i} \\[3ex]
f_{r,\,i-1} = \dfrac{r_i \cos \alpha_i - r_{i-1}}{\operatorname{sign} \sin \alpha_i \, 2 J_i} & f_{r,\,i-1} = \dfrac{r_{i-1}}{\operatorname{sign} \sin \beta_i \, 2 J_i} & f_{r,\,i-1} = \dfrac{s_i \cos \gamma_i - r_{i-1}}{\operatorname{sign} \sin \gamma_i \, 2 J_i} \\[3ex]
f_{s,\,i} = \dfrac{s_i}{\operatorname{sign} \sin \alpha_i \, 2 J_i} & f_{s,\,i} = \dfrac{r_i \cos \beta_i - s_i}{\operatorname{sign} \sin \beta_i \, 2 J_i} & f_{s,\,i} = \dfrac{r_{i-1} \cos \gamma_i - s_i}{\operatorname{sign} \sin \gamma_i \, 2 J_i}
\end{array} \tag{2}$$

Wenn im folgenden Vergleiche zwischen verschiedengestaltigen Figuren angestellt werden, dann ist stets angenommen, daß die jeweils größte in einer Figur vorkommende Seite einer Vergleichsstrecke „l" gleichgesetzt wird.

2. Das Gewicht der Winkel in regelmäßigen Zentralsystemen

Unter Benutzung der Vereinfachungen zufolge der symmetrischen Gestalt der regelmäßigen Zentralsysteme [3]) und der graphischen Methode zur Ermittlung der Koeffizienten [4]) erhalten wir ohne Schwierigkeit die Gewichte der Winkel der regelmäßigen Zentralsysteme Z_n vor und nach der Ausgleichung, die wir für den eingeschränkten Bereich $3 \leq n \leq 6$ zusammenstellen.
Wir bemerken die Zunahme der Gewichte aller Winkel, sowohl vor als auch nach der Ausgleichung, beim Übergang vom Zentralsystem Z_3 zum Z_6. Das heißt also, daß die Zentral- und peripheren Winkel im Sechseck mit Radialseiten genauer sind als z. B. im Dreieck mit Radialseiten. Bezüglich der Genauigkeit der einzelnen Seiten der Zentralsysteme stellten wir die umgekehrte Tendenz fest [5]).

Die Bestimmung der Winkelgewichte in einem regelmäßigen Zentralsystem gibt aber auch bereits Aufschluß über die Nutzbarkeit zusätzlicher Winkelmessungen.

Ferner kann bei Verwendung von Richtungsmessungen zur Einschaltung weiterer Punkte in ein bereits ausgeglichen vorliegendes Strecken-

Gewichtsreziproke	n 3	4	5	6
1. des Zentralwinkels $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ eines Z_n				
a) vor d. Ausgl.: $l^2\,[ff] =$				
$= \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}\, 4\,(2 - \cos\alpha)$	30	8	3,58	2
b) nach d. Ausgl.: $l^2 \frac{1}{P} =$				
$= \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} \cdot \frac{4}{n} \left\{(2 - n)\cos\alpha + 2n - 3\right\}$	14	5	2,58	1,55
c) Gewichtserhöhung durch Ausgl. in %	53	38	28	22
2. des peripheren Winkels $\beta = \gamma = \frac{n-2}{2n}\pi$				
a) vor d. Ausgl.: $l^2\,[ff] =$				
$= \frac{1}{1 + \cos\alpha}\,(2\cos^2\alpha - \cos\alpha + 3)$	8	3	2,16	2
b) nach d. Ausgl.: $l^2 \frac{1}{P} = \frac{1}{1 + \cos\alpha} \cdot \frac{1}{n}$				
$\left\{(n - 1)\, 2\cos^2\alpha + (5 - n)\cos\alpha + 3n - 3\right\}$	4	2,25	1,95	1,89
c) Gewichtserhöhung durch Ausgl. in %	50	25	10	5

Tabelle 1

netz die Orientierung der gemessenen Sätze entsprechend den Gewichten der verschiedenen Winkel zwischen den definierten und in die Satzmessung einbezogenen Richtungen erfolgen. Dabei kann man sich die Horizontbedingung im Zentralpunkt nutzbar machen: Es wird in einem Zentralsystem mit n Zentralwinkel das Gewicht der Summe von k Zentralwinkel gleich dem Gewicht der Ergänzung, also der Summe von $(n\text{-}k)$ Zentralwinkel. Desgleichen ist das Gewicht eines Zentralwinkels α gleich der Summe der beiden im selben Dreieck des Zentralsystems gelegenen peripheren Winkel β und γ, wobei im regelmäßigen Zentralsystem $\beta = \gamma$ gilt. Diese aus der Horizontbedingung im Zentralpunkt jedes Systems und aus der Winkelsumme im Dreieck selbstverständlich folgenden Beziehungen ermöglichten die Kontrolle der allgemein geführten Ableitungen.

Wir geben nachstehend für vier Zentralsysteme die Gewichtsreziproken einiger Winkelsummen vor und nach der Ausgleichung.

Wie wir später sehen werden, sind bei der Richtungsübertragung in Ketten, die sich aus regelmäßigen Z. S. Z_4 bilden lassen, Summen von Peripheriewinkel, bei Ketten, die aus regelmäßigen Z. S. Z_6 entstehen, jedoch Summen von Zentralwinkel maßgeblich beteiligt. Der obigen Zusammenstellung entnehmen wir nun als qualitatives Ergebnis eine Zunahme

Gewichtsreziproke	n			
	3	4	5	6
1. des Winkels $\delta_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} = \frac{4\pi}{n}$				
a) vor d. Ausgl.: $l^2 [ff] =$				
$= \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} 4 (5 - 3 \cos\alpha)$	30	20	8,60	4,67
b) nach d. Ausgl.: $l^2 \frac{1}{P} =$				
$= \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} \cdot \frac{4}{n} \left\{ (8 - 3n) \cos\alpha + 5n - 12 \right\}$	14	8	4,58	2,89
c) Gewichtserhöhung durch Ausgl. in %	53	60	40	38
2. des Winkels $\varepsilon_i = \beta_i + \gamma_{i+1} = \frac{n-2}{n} \pi$				
a) vor d. Ausgl.: $l^2 [ff] =$				
$= \frac{2}{1 + \cos\alpha} (4 \cos^2\alpha - \cos\alpha + 3)$	2	6	4,70	4,67
b) nach d. Ausgl.: $l^2 \frac{1}{P} = \frac{1}{1 + \cos\alpha} \cdot \frac{2}{n}$				
$\left\{ (4n - 4) \cos^2\alpha + (10 - n) \cos\alpha + 3n - 6 \right\}$	2	3	3,69	4,22
c) Gewichtserhöhung durch Ausgl. in %	[illegible]	50	21	10

Tabelle 2

des Gewichtes der Summe zweier Zentralwinkel und die Abnahme des Gewichtes der Summe zweier Peripheriewinkel mit wachsendem n. Dies ist offenbar für beide der genannten Ketten günstig, so daß mit Berücksichtigung des zahlenmäßigen Ergebnisses in Tabelle 2 zu erwarten ist, daß sowohl aus dem Sechseck als auch aus dem Quadrat mit Radialseiten Ketten mit günstiger Richtungsübertragung gebildet werden können.

Von den regelmäßigen Z. S. bieten sich also das Z_4 und das Z_6 an, für die wir deshalb die entsprechenden Funktionswerte für zwei weitere interessierende Winkelsummen bekanntgeben.

Im Z_4 erhalten wir für die Richtungsübertragung zwischen zwei einander gegenüberliegenden Außenseiten die Werte

$$\text{a) } l^2 [ff] = 12 \text{ bzw. } 14 \quad , \quad \text{b) } l^2 \frac{1}{P} = 2 \quad , \quad \text{c) } 83 \text{ bzw. } 71\,\%.$$

Im Z_6 erhalten wir für die Summe dreier Zentralwinkel

$$\eta = \alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1}$$

$$\text{a) } l^2 [ff] = \frac{22}{3} \quad , \quad \text{b) } l^2 \frac{1}{P} = \frac{10}{3} \quad , \quad \text{c) Gewichtserhöhung } 55\,\%.$$

3. Das Gewicht der Winkel weiterer Zentralsysteme

Außer den Winkel regelmäßiger Zentralsysteme wurden Einzelwinkel und Winkelsummen weiterer Z. S. untersucht, die zum Teil bereits in [2] vom Standpunkt der Seitengewichte auf ihre Eignung als Grundfigur einer Streckenkette geprüft worden sind. Es sind dies der Rhombus mit Diagonalen und seine spezielle Form, das Quadrat mit Diagonalen (Fig. 3), das Zentralsystem nach Figur 4 mit variablem Öffnungswinkel α sowie das aus diesem hervorgegangene dreifach überbestimmte Z. S. nach Figur 5. Die teilweise sehr umfangreichen Berechnungen ergaben folgendes Ergebnis:

a) *Der Rhombus mit Diagonalen* (Fig. 3).

Zur vollständigen Beurteilung dieser Figuren genügt bei Kenntnis der allgemeinen Struktur der Gewichtsreziproken die Angabe spezieller Werte dieser Größen für $\alpha \leq 45^0$; denn für $\alpha > 45^0$ vertauschen die beiden Diagonalen ihre Eigenschaft als vorgegebene größte Länge „l" der Figur. Da α und β zudem Komplementärwinkel sind, ist das Gewicht des einen Winkels gleich dem Gewicht des anderen bei komplementärem Öffnungswinkel des Rhombus:

$$\left(\frac{1}{P(\beta)}\right)_{\alpha = \alpha_i} = \left(\frac{1}{P(\alpha)}\right)_{\alpha = 90 - \alpha_i}.$$

Diese Feststellung gilt ebenso für die Gewichte der Winkel γ und δ.

Wir geben die Gewichtsreziproken verschiedener Winkel vor und nach der Ausgleichung als Funktion des Öffnungswinkels α_i allgemein, und für drei spezielle Werte von α_i numerisch an.

Wir bemerken den stark asymptotischen Charakter der Gewichtsfunktionen der Winkel α bis ε, die jedoch alle für den Öffnungswinkel $\alpha_i = 45^0$ den günstigsten Wert annehmen. Das Quadrat mit Diagonalen (Fig. 3) ist also die günstigste aller Rhombusformen.

b) *Das Zentralsystem nach Figur 4 (Doppelkette) mit variablem Winkel α.*

In diesem Z. S., das für $\alpha = 60^0$ in das regelmäßige Z. S. Z_6 übergeht, und dessen Konfiguration für $\alpha = 45^0$ in Figur 4 dargestellt ist, wurde zunächst das Gewicht des für die Richtungsübertragung maßgeblichen Winkels η bestimmt. Es ergibt sich für diesen Winkel:

a) das Gewicht vor der Ausgleichung:

$$[ff] = \frac{2}{l^2 \sin^2\alpha}(16\cos^6\alpha - 16\cos^5\alpha - 12\cos^4\alpha + 24\cos^3\alpha - \cos^2\alpha - 8\cos\alpha + 5)$$

b) Das Gewicht nach der Ausgleichung:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{l^2 \sin^2\alpha}(16\cos^6\alpha - 16\cos^5\alpha - 12\cos^4\alpha + 24\cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha - 8\cos\alpha + 5),$$

wofür man auch schreiben kann $\frac{1}{P(\eta)} = \frac{1}{2}[ff] - \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha}{l^2}$.

Winkel	Gewichtsreziproke a) vor der Ausgleichung b) nach der Ausgleichung	α_i		
		15^0	30^0	45^0
α	a) $l^2 [ff] = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (4 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 2)$	40	8	3
	b) $l^2 \frac{1}{P} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (2 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 2)$	14	3,5	2
β	a) $l^2 [ff] = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (4 \sin^4 \alpha - 3 \sin^2 \alpha + 2)$	27	6	3
	b) $l^2 \frac{1}{P} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (2 \sin^4 \alpha - 3 \sin^2 \alpha + 2)$	27	5,5	2
γ	a) $l^2 [ff] = 4 \operatorname{cotg}^2 \alpha (2 \cos^2 \alpha + 1)$	160	30	8
	b) $l^2 \frac{1}{P} = 4 \operatorname{cotg}^2 \alpha$	56	12	4
δ	a) $l^2 [ff] = 4 (2 \sin^2 \alpha + 1)$	4,5	6	8
	b) $l^2 \frac{1}{P} = 4$	4	4	4
ε	a) $l^2 [ff] = 3 (1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha)$	45	12	6
	b) $l^2 \frac{1}{P} = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$	15	4	2

Tabelle 3

Anschließend geben wir die numerischen Werte der Gewichtsreziproken als Funktion des Öffnungswinkels α.

α	$l^2\ [ff]$	$l^2 \frac{1}{P(\eta)}$
10^0	501,8	218,7
20^0	110,3	47,6
30^0	40,9	17,5
35^0	27,3	11,6
40^0	19,1	8,2
45^0	14,0	6,0
50^0	10,7	4,7
55^0	8,6	3,8
60^0	7,3	3,3

Tabelle 4

Wir haben die Zusammenstellung in Tabelle 4 bei $\alpha = 60^0$ abgebrochen, weil für $\alpha > 60^0$ nicht mehr die längste Seite des Z. S. in der Längsrichtung einer zu bildenden Kette liegt und somit laut Voraussetzung eine größere Anzahl von Zentralsystemen zur Überbrückung einer Distanz $L = n \cdot l$ aneinandergereiht werden müssen. Es läßt sich zeigen, daß die mit der Vergrößerung des Winkels α über 60^0 verbundene Gewichtserhöhung den Nachteil der Vermehrung der Zentralsysteme nicht aufzuheben vermag. Tabelle 4 zeigt den Verlauf der Gewichtsfunktion für den Winkel η und legt nahe, den Bereich der zu verwendenden Zentralsysteme dieses Typus mit $45^0 \leq \alpha \leq 60^0$ zu beschränken.

Im Zentralsystem mit $\alpha = 60^0$ findet die günstigste Richtungsübertragung statt. Dieses System ist identisch mit dem regelmäßigen Z. S. Z_6

(I., 2.). Nachfolgend stellen wir die Gewichtsreziproken der verschiedenen Winkel dieser Z. S. nur mehr für die beiden Figuren mit den den günstigen Anwendungsbereich begrenzenden Winkel $\alpha = 45^0$ und $\alpha = 60^0$ dar (Tabelle 5).

Da das Z. S. mit $\alpha = 45^0$ einen wenn auch nicht bedeutend kleineren Längenfehler aufweist als das System mit $\alpha = 60^0$, anderseits letzteres System eine wesentlich bessere Richtungsübertragung gewährleistet, soll untersucht werden, ob sich das Gewicht der Richtungsübertragung im System mit $\alpha \leq 45^0$ erhöhen läßt, wenn man zwei weitere Strecken quer zur Längsrichtung als „Versteifung" einführt. Dieses System, wieder mit beliebigem Öffnungswinkel α, wird im folgenden behandelt und ist in Figur 5 für $\alpha = 45^0$ dargestellt. Dabei interessieren nur Systeme mit $\alpha \leq 45^0$, weil für einen größeren Öffnungswinkel α die Länge der neu eingeführten Seiten diejenige der Seiten in der Längsrichtung überschreitet und damit die nachteiligen Folgen einer Vermehrung der Einzelfiguren im Verbande einer Kette eintreten.

c) *Das Zentralsystem nach Figur 5 mit variablem Winkel* α.

Wir stellen zunächst fest, ob bei den gegebenen Voraussetzungen eine Versteifung der Zentralsysteme nach Figur 4 durch zwei gemessene Strecken quer zur Längsausdehnung des Z. S., bzw. der zu bildenden Kette, eine Erhöhung des Gewichtes für den maßgeblichen Winkel η ergibt.

In diesem dreifach überbestimmten Z. S. wählen wir zur Formulierung der drei Bedingungsgleichungen folgende drei einfach überbestimmte Zentralsysteme, die einen gemeinsamen Zentralpunkt besitzen: 1. Das Z. S. nach Figur 4, 2. und 3. je einen Rhombus mit Diagonalen. Bezeichnen wir die Koeffizienten der Verbesserungen in den drei Bedingungsgleichungen mit a, b und c, so lautet die Gewichtsgleichung

$$\frac{1}{P(\eta)} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf\,.\,1]^2}{[bb\,.\,1]} - \frac{[cf\,.\,2]^2}{[cc\,.\,2]}.$$

Dafür können wir auch schreiben:

$$\left(\frac{1}{P(\eta)}\right)_{\text{Fig. 5}} = \left(\frac{1}{P(\eta)}\right)_{\text{Fig. 4}} - \frac{[bf\,.\,1]^2}{[bb\,.\,1]} - \frac{[cf\,.\,2]^2}{[cc\,.\,2]}.$$

Soll das Gewicht des Winkels η in den beiden Zentralsystemen nach Figur 5 und Figur 4 verschieden sein, so muß $[bf\,.\,1]$ oder $[cf\,.\,2] \neq 0$ sein. Wir finden, bei beliebigem α, $[aa] = 2\ [af]$ und $[ab] = [bc] = 2\ [bf] = 2\ [cf]$. Daraus folgt jedoch unmittelbar $[bf\,.\,1] = [cf\,.\,1] = [cf\,.\,2] = 0$.

Das Gewicht des Winkels η ist, wie zu erwarten war, in den Z. S. nach Figur 4 und Figur 5 gleich groß, und zwar unabhängig vom Öffnungswinkel α. In den entsprechenden Ketten ist daher durch die Messung der Querseiten keine Verbesserung der Richtungsübertragung und des Querfehlers des Kettenendpunktes zu erwarten. Es verbleibt lediglich zufolge der größeren Zahl von Bedingungen in einer Kette, die aus Figur 5 abzuleiten ist, eine bessere Kenntnis der inneren Genauigkeit, die aber von wesentlicher Bedeutung sein kann, wenn es gilt, systematische Fehleranteile zu eliminieren.

Der gewichtserhöhende Einfluß der Einführung zweier Querseiten auf einige andere Winkel des Z. S. mit $\alpha = 45^0$ ist aus der vergleichenden Zusammenstellung in Tabelle 5 ersichtlich.

Winkel	Vor der Ausgl.: $[ff]\ l^2$			Nach der Ausgl.: $\frac{1}{P}\ l^2$		
	Figur 4		Figur 5	Figur 4		Figur 5
	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 45^0$	$\alpha = 45^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 45^0$	$\alpha = 45^0$
α	2	3	3	1,89	3	1,96
β	2	3	3	1,55	2,5	1,70
γ	2	8	8	1,89	7,5	3,87
δ	2	3	3	1,89	2,5	2,06
ε	2	8	8	1,55	6	4,80
ζ	4,67	11	11	4,22	9	5,33
η	7,33	14	14	3,33	6	6

Tabelle 5

II. DIE RICHTUNGSÜBERTRAGUNG IN STRECKENKETTEN

1.

Wir stellen uns die Aufgabe, zu untersuchen, mit welcher Genauigkeit die Richtung durch eine der ausgewählten Streckenketten von der ersten auf die letzte in der Längsrichtung der Kette gelegenen Seite übertragen wird. Dabei wird die Kette wieder wie beim Längenfehler für sich allein betrachtet, also ohne Anschlußzwang oder andere netzfremde Bedingungen (freie Kette).

Die Richtungsübertragung kann in jeder Kette auf verschiedenem Weg erfolgen, muß jedoch nach der Ausgleichung zu gleichen Ergebnissen führen. Wir wählen die Übertragung der Richtung durch die Winkel β_j Figuren (6 bis 9). Eine jeweils andere Art der Übertragung wurde als unabhängige Rechenkontrolle durchgeführt und wird hier nicht weiter erwähnt.

Die gesuchte Funktion ist somit $K(s_{jk}) = [\beta_j]_{j=1}^{j=n-1}$, wobei β_j selbst als Summe einzelner Winkel von je zwei benachbarten Zentralsystemen auftritt: $\beta_j = [\alpha_i]$. Die Zahl der Winkel α_i, aus welchen sich β_j zusammensetzt, ist von der Kettenform abhängig. Bei den Ketten nach Figur 8 und 9 beträgt sie drei, bei denjenigen nach Figur 6 und 7 vier, bzw. zwei. Mit s_{jk} bezeichnen wir eine Seite der Kette, wobei j die Ordnungszahl des Zentralsystems innerhalb der Kette und k die Ordnungszahl der Seite innerhalb eines Z. S. bedeutet. Zur Gewichtsbestimmung der Funktion $K(s_{jk})$ benötigen wir wieder deren partielle Ableitungen nach den gemessenen Seiten s_{jk}. Diese Differentialquotienten $\frac{\partial K}{\partial s_{jk}} = \frac{\partial [\beta]}{\partial s_{jk}}$ reduzieren sich auf den Ausdruck $\frac{\partial \beta_{j-1}}{\partial s_{jk}} + \frac{\partial \beta_j}{\partial s_{jk}}$, weil bei einer Änderung der Seite s_{jk} die Funktion $K = [\beta]$

nur durch die Veränderung der beiden Winkel β_{j-1} und β_j beeinflußt werden kann. Die Differentialquotienten erhält man entsprechend $\frac{\partial \beta_j}{\partial s_{jk}} = \frac{\partial}{\partial s_{jk}} ([\alpha_{ji}]_i)$ einfach mittels der bereits mehrfach erwähnten graphischen Methode [4]). Es resultiert für jede Kettenform ein einfaches Schema. Die Koeffizienten $\frac{\partial K}{\partial s_{jk}} = f_{jk}$ sind für entsprechende Seiten s_k des ersten und letzten Zentralsystems einerseits und aller übrigen Zentralsysteme anderseits aus Symmetriegründen gleich groß. Die Gewichtsfunktion bestimmen wir dann unter Zuhilfenahme des Verfahrens zur Bestimmung von Funktionsgewichten in überbestimmten symmetrischen Streckenketten [3].

2.

Da es uns letztlich nicht nur um die absolute Größe des Fehlers der Richtungsübertragung, sondern um einen Vergleich dieser Werte für verschiedene Kettenformen geht, müssen wir den Vergleichsmaßstab definieren. In allen ausgewählten und zu Ketten zusammengefügten Z. S. kommen in der Längserstreckung nur zwei Seitenlängen vor; sie verhalten sich zueinander wie Seite und Diagonale eines Quadrates. Die längere vorkommende Strecke haben wir als Vergleichsstrecke „l" festgelegt. Je nach Art der Kette liegen daher die die Richtungsübertragung bewerkstelligenden Winkel β um die Strecke l oder $l\frac{\sqrt{2}}{2}$ voneinander entfernt. Wir bestimmen zunächst die Gewichtsfunktion für jede Kette unter der Annahme von $n-1$ Richtungsübertragungen, so daß die Länge L der Kette entweder $n \,.\, l$ oder $n \,.\, l\frac{\sqrt{2}}{2}$ beträgt. Anschließend gehen wir zu einer Vergleichslänge $\bar{L} = n \,.\, l$ über. Damit erhalten wir abschließend eine vergleichende Gegenüberstellung des Gewichtes einer Richtung, welche durch die verschiedenen Ketten der gleichbleibenden Länge $\bar{L}$ von der ersten auf die letzte in der Längsrichtung der Kette gelegenen Seite übertragen wird.

Wir entsprechen dem Ergebnis der Untersuchung der für die Richtungsübertragung maßgeblichen Winkel in verschiedenen Grundfiguren durch eine etwas ausführlichere Behandlung der doppelten Dreieckskette mit dem Öffnungswinkel α nach Figur 8, die sich aus Einzelsystemen nach Figur 4 zusammensetzt. Obwohl wir von vornherein die Konfiguration mit $\alpha = 60^0$ als günstigste zu erwarten haben, führen wir die Untersuchung doch allgemein, um den Einfluß einer Änderung von α auf den Fehler der Richtungsübertragung zu erfassen. Die numerischen Werte für die Kette mit $\alpha = 45^0$ und $\alpha = 60^0$ sind in Tabelle 6 enthalten.

Für das Gewicht der Richtungsübertragung vor der Ausgleichung erhalten wir:

$$[ff] = \frac{2}{l^2 \sin^2\alpha}\Big\{n\,(16\cos^6\alpha - 16\cos^5\alpha - 12\cos^4\alpha + 16\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1) - 16\cos^6\alpha + 16\cos^5\alpha + 12\cos^4\alpha - 8\cos^3\alpha - 9\cos^2\alpha + 3\Big\}.$$

Diese Funktion stellt zugleich auch die Gewichtsreziproke einer einfachen Dreieckskette dar.

Das Konvergenzglied der Gewichtsfunktion (siehe [3]) ergibt sich mit

$$\frac{\overline{B}^2}{\overline{A}} = \frac{B_2^{0\,2}}{A_1 + 2\,K} = \frac{B_2^0}{2} = \frac{1}{l^2 \sin^2 \alpha} (16 \cos^6 \alpha - 16 \cos^5 \alpha - 12 \cos^4 \alpha + 16 \cos^3 \alpha + {} + 6 \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha + 1).$$

Wir ersetzen in der Gewichtsfunktion auch die ersten Terme durch den Konvergenzausdruck $\frac{\overline{B}^2}{\overline{A}}$ und erhalten damit einen groben Näherungswert:

$$\frac{1}{P} = [ff] - (n-1)\frac{\overline{B}^2}{\overline{A}} =$$

$$= \frac{1}{l^2 \sin^2 \alpha} \Big\{ n\,(16 \cos^6 \alpha - 16 \cos^5 \alpha - 12 \cos^4 \alpha + 16 \cos^3 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - {} - 4 \cos \alpha + 1) - 16 \cos^6 \alpha + 16 \cos^5 \alpha + 12 \cos^4 \alpha - 12 \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha + 7 \Big\}.$$

Dieser Näherungswert der Gewichtsfunktion $\frac{1}{P}$ nimmt mit wachsendem α stetig ab, erreicht für $\alpha = 45^0$ den Wert $\frac{1}{l^2}\,(2\,n + 4)$ und für $\alpha = 60^0$ den Wert $\frac{1}{l^2}\left(\frac{2}{3}\,n + 4\right)$. Die berechneten exakten Werte der Gewichtsfunktion ergeben sich hingegen mit

$$\left(\frac{1}{P}\right)_{\alpha = 45^0} = \frac{1}{l^2}\,(2\,n + 2) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{P}\right)_{\alpha = 60^0} = \frac{1}{l^2}\left(\frac{2}{3}\,n + 2\right).$$

Das Ergebnis der Untersuchung für die übrigen Kettenformen stellen wir in Tabelle 6 zusammen.

Gewichtsreziproke der Richtungsübertragung von der ersten auf die letzte Längsseite einer Streckenkette				
Kette nach	Länge	vor der Ausgl.	nach der Ausgl.	nach der Ausgl. Länge der Kette $\overline{L} = n \cdot l$
		$l^2\,[ff]$	$l^2\,\frac{1}{P}$	$l^2\,\frac{1}{P}$
Fig. 6 (Z_4)	$n \cdot l$	$16\,n - 18$	$2\,n + 2$	$2\,n + 2$
Fig. 7, $\alpha = 45^0$	$n \cdot l\,\frac{\sqrt{2}}{2}$	$24\,n - 28$	$4\,n$	$4\sqrt{2}\,n$
Fig. 8, $\alpha = 60^0$	$n \cdot l$	$\frac{8}{3}\,n + 2$	$\frac{2}{3}\,n + 2$	$\frac{2}{3}\,n + 2$
Fig. 8, $\alpha = 45^0$	$n \cdot l$	$8\,n - 2$	$2\,n + 2$	$2\,n + 2$
Fig. 9, $\alpha = 45^0$	$n \cdot l$	$8\,n - 2$	$2\,n + 2$	$2\,n + 2$

Tabelle 6

Das Quadrat des mittleren Richtungsfehlers der letzten Längsseite einer freien Streckenkette ist im wesentlichen proportional zur Länge der Kette.

III. DER QUERFEHLER IN STRECKENKETTEN

1.

Wir legen die positive x-Achse eines orthogonalen Koordinatensystemes in die durch den Anfangspunkt A einer Streckenkette gehende und in die Längsrichtung der Kette weisende Seite. Dann können wir — eine gestreckte Kette vorausgesetzt — ohne wesentliche Vernachlässigung den Fehler der y-Koordinate des Endpunktes B der Kette als den Querfehler bezeichnen. Wir haben demgemäß y_B als Funktion der gemessenen und ausgeglichenen Seiten der Kette darzustellen. Das Gewicht dieser Funktion vermittelt den Querfehler. Wir bestimmen y_B wie in einem Polygonzug und führen anschließend die durch die gestreckte Form der Kette und die Kongruenz der einzelnen Z. S. bedingten Vereinfachungen durch.

$$y_B = H\,(s_{jk}) = [s_{j2} \sin \tau_j]_{j=1}^{j=n} \quad , \quad \tau_j = [\beta_i]_{i=0}^{i=j-1} - (j-1)\,\pi \quad , \quad \beta_0 = 0. \tag{3}$$

Hierin bedeutet s_{j2} die an der Koordinatenübertragung beteiligte Seite des Polygonzuges im Zentralsystem der Ordnungszahl j, während τ_j den Richtungswinkel dieser Seite angibt.

Zufolge der Voraussetzungen sind die τ_j sehr kleine Winkel. Wir schreiben daher:

$$y_B = H\,(s_{jk}) = [s_{j2} \,.\, \tau_j]_{j=1}^{j=n} = [s_{j2} \{[\beta_i]_{i=0}^{i=j-1} - (j-1)\,\pi\}]_{j=1}^{j=n} \tag{4a}$$

oder ausführlich angeschrieben

$$\begin{aligned} y_B = H\,(s_{jk}) = s_{22}\,(\beta_1 - \pi) + s_{3,2}\,(\beta_1 + \beta_2 - 2\,\pi) + \ldots + \\ + s_{n2}\,\{\beta_1 + \ldots + \beta_{n-1} - (n-1)\,\pi\}. \end{aligned} \tag{4b}$$

2.

Als nächsten Schritt haben wir die Ableitungen der Funktion $H\,(s_{jk})$ nach den Seiten der Kette zu bilden. Wir wählen ganz allgemein die Ableitung nach der Seite mit der Ordnungszahl p im Z. S. der Ordnungszahl r.

$$\frac{\partial H\,(s_{jk})}{\partial s_{rp}} = f_{rp} = \left[\frac{\partial s_{j2}}{\partial s_{rp}} \,.\, \tau_j + s_{j2} \frac{\partial \tau_j}{\partial s_{rp}}\right]_{j=1}^{j=n} \quad . \tag{5}$$

Wegen der beiden Voraussetzungen — gestreckte Kette und Kongruenz der Z. S. — ist $\tau_j \sim 0$, $s_{j2} = \text{const.} = s$. Ferner gilt

$$\frac{\partial s_{j2}}{\partial s_{rp}} \begin{array}{l} = 0 \text{ für } j \neq r \\ = 1 \text{ für } j = r\,. \end{array}$$

Somit erhalten wir
$$f_{rp} = s \left[\frac{\partial \tau_j}{\partial s_{rp}}\right]_{j=1}^{j=n} , \tag{6}$$

oder auch

$$f_{rp} = s \frac{\partial}{\partial s_{rp}} \left\{ (n-1)\beta_1 + (n-2)\beta_2 + \ldots + \beta_{n-1} = \right.$$
$$= s \frac{\partial}{\partial s_{rp}} \Big[(n-i)\,\beta_i \Big]_{i=1}^{i=n-1}. \tag{7}$$

Da es sich wieder um die Ableitungen der Winkel β_i nach einer Seite s_{rp} handelt, gelten die Bemerkungen des Abschnittes II, 1., denen zufolge gilt:

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial s_{rp}} = 0 \text{ für } i \neq r-1 \text{ und } i \neq r.$$

Daher reduziert sich die Gleichung (7) auf den Ausdruck

$$f_{rp} = s \left\{ (n-r+1) \frac{\partial \beta_{r-1}}{\partial s_{rp}} + (n-r) \frac{\partial \beta_r}{\partial s_{rp}} \right\}. \tag{8}$$

Kehren wir, nachdem alle Summationen durchgeführt sind, wieder zu den laufenden Indizes zurück, so erhalten wir

$$f_{jk} = s \left\{ (n-j+1) \frac{\partial \beta_{j-1}}{\partial s_{jk}} + (n-j) \frac{\partial \beta_j}{\partial s_{jk}} \right\}. \tag{9}$$

Damit ist aber die Bildung der Koeffizienten f_{jk} der Funktion H (s_{jk}) auf die Bestimmung der Koeffizienten der im vorigen Abschnitt behandelten Funktion K (s_{jk}) zurückgeführt.

3.

Mit Hilfe der graphischen Methode der Koeffizientenermittlung [4]) können die Werte f_{jk} direkt einer zeichnerischen Darstellung der Streckenkette entnommen werden. Wir haben die Koeffizienten anschließend quadriert und mit Anwendung der Regeln zur Summation arithmetischer Reihen höherer Ordnung die Koeffizientensumme $[ff]$ für jede Kette gebildet.

Bei der Bildung der Summen $[af]$, $[bf]$ usw. und deren Reduktionsstufen ergibt sich ein für alle Ketten gültiges Bildungsgesetz, aus dem schließlich die Terme der Gewichtsfunktion folgten [6]). Ohne auf den beträchtlichen Umfang an allgemeinen Entwicklungen und speziellen Berechnungen weiter einzugehen, sei das sich ergebende Fehlergesetz für den Querfehler mitgeteilt:

$$\frac{1}{P(H)} = \frac{s^2}{l^2} (c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3).$$

Da n proportional zur Länge L der Kette ist, kann das mittlere Quadrat des Querfehlers durch ein Polynom dritten Grades in L dargestellt werden:

$$\frac{1}{P(H)} = (d_0 + d_1 L + d_2 L^2 + d_3 L^3).$$

Hiebei haben wir den Faktor $\frac{s^2}{l^2}$, der das Verhältnis der Länge einer in der Längsrichtung der Kette gelegenen Seite zur größten Seite „l" charakterisiert, in den Koeffizienten d bereits berücksichtigt. Das Ergebnis der behandelten Kettenformen stellen wir nachfolgend zusammen.

Dem Querfehler einer Streckenkette zugeordnete Gewichtsreziproke				
Kette nach	Länge	vor der Ausgl.	nach der Ausgl.	nach der Ausgl. Länge der Kette $\overline{L} = n \,.\, l$
		$9\,[ll]$	$9\,\frac{1}{P}$	$9\,\frac{1}{P}$
Fig. 6 (Z_4)	$n \,.\, l$	$48\,n^3 - 81\,n^2 + 33\,n$	$6\,n^3 + 9\,n^2 - 15\,n$	$6\,n^3 + 9\,n^2 - 15\,n$
Fig. 7, $\alpha = 45^0$	$n \,.\, l\,\frac{\sqrt{2}}{2}$	$36\,n^3 - 63\,n^2 + 27\,n$	$6\,n^3 - 6\,n$	$12\sqrt{2}\,n^3 - 6\sqrt{2}\,n$
Fig. 8, $\alpha = 60^0$	$n \,.\, l$	$8\,n^3 + 9\,n^2 - 17\,n$	$2\,n^3 + 9\,n^2 - 11\,n$	$2\,n^3 + 9\,n^2 - 11\,n$
Fig. 8, $\alpha = 45^0$	$n \,.\, l$	$24\,n^3 - 9\,n^2 - 15\,n$	$6\,n^3 + 9\,n^2 - 15\,n$	$6\,n^3 + 9\,n^2 - 15\,n$
Fig. 9, $\alpha = 45^0$	$n \,.\, l$	$24\,n^3 - 9\,n^2 - 15\,n$	$6\,n^3 + 9\,n^2 - 15\,n$	$6\,n^3 + 9\,n^2 - 15\,n$

Tabelle 7

Die Genauigkeit der Richtungsübertragung und der Querfehler einer Streckenkette hängen eng miteinander zusammen. Daher folgt auch aus dem Querfehler an Hand der Tabelle 7 eine gleichartige Qualifikation der einzelnen Kettenformen wie bei der Richtungsübertragung.

Da die Formeln für $n - 1$ Richtungsübertragungen, bzw. für n Längsseiten einer Kette entwickelt wurden, gelten sie für $n \geq 2$. Für $n = 2$ können wir den Querfehler auch direkt aus dem Gewicht der Richtungsübertragung bilden: $s^2 \frac{1}{P\,(K)} = \frac{1}{P\,(H)}$. Wir finden diese Bedingung in allen untersuchten Ketten erfüllt, was als Rechenkontrolle gelten kann.

IV. DAS VERHÄLTNIS VON QUERFEHLER ZU LÄNGSFEHLER IN STRECKENKETTEN

Entsprechend dem allgemeinen Fehlergesetze für die Länge einer Streckenkette ist $\frac{1}{P\,(F)} = e_0 + e_1\,L$, während die dem Querfehler zugeordnete Gewichtsfunktion durch $\frac{1}{P\,(H)} = d_0 + d_1\,L + d_2L^2 + d_3L^3$ dargestellt werden kann. Damit ergibt sich für das Verhältnis $\frac{P\,(H)}{P\,(F)}$ ein Polynom 2. Grades.

Es resultiert der Satz:

Das Verhältnis des Querfehlers zum Längenfehler einer Streckenkette wächst im wesentlichen proportional mit der Länge der Kette.

Daraus ergibt sich auch die Notwendigkeit, die Richtungsübertragung in Streckenketten durch zusätzliche Maßnahmen zu verbessern, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden kann.

Für die gleichseitige doppelte Dreieckskette fügen wir zur Illustration einige Zahlenwerte an. In Tabelle 8 bedeuten m_L den mittleren Längenfehler, m_Q den mittleren Querfehler, m_τ den mittleren Richtungsfehler der letzten Längsseite und m den mittleren Fehler einer Streckenmessung.

$n =$	2	5	10	15	20
$\frac{m_L}{m}$	1,35	1,68	2,12	2,48	2,80
$\frac{m_Q}{m}$	1,83	6,83	17,6	30,9	46,5
$\frac{m_Q}{m_L}$	1,35	4,06	8,32	12,4	16,6
$l\,\frac{m_\tau}{m}$	1,83	2,31	2,94	3,46	3,91

Tabelle 8

Zusammenfassung:

Als Grundlage für eine die speziellen Verhältnisse des Meßverfahrens und der gestellten Triangulationsaufgabe berücksichtigenden Beurteilung verschiedener Formen von Streckenketten wurden untersucht:

1. Die Genauigkeit der Winkel in verschiedenen bestimmten und überbestimmten Einzelfiguren, sowie
2. die Genauigkeit der Richtungsübertragung und der Querfehler in verschiedenen Einfach- und Doppelketten (einfache Dreieckskette, Diagonalquadratkette, doppelte Dreieckskette usw.).

Die Vergleichsgrundlage wurde durch die Annahme der vollen Ausnutzbarkeit des Meßgerätes bestimmt, so daß sich die vergleichenden Ergebnisse auf Ketten beziehen, deren längste direkt zu messende Strecken gleich lang sind. Eine Modifizierung dieser Ergebnisse für andere Verhältnisse ist jedoch ohne Schwierigkeit möglich.

Als wesentliche Bestandteile einer Fehlertheorie der gestreckten Streckenketten wurden folgende Fehlergesetze ermittelt:

1. Das Quadrat des mittleren Längenfehlers ist proportional der Länge der Kette.
2. Das Quadrat des mittleren Fehlers der Richtungsübertragung ist proportional der Länge der Kette.
3. Das Quadrat des mittleren Querfehlers wächst mit der dritten Potenz der Länge der Kette.

Aus diesen Gesetzen folgt die Notwendigkeit, die Richtungsübertragung in Streckenketten durch geeignete zusätzliche Messungen zu verbessern.

Literatur:

[1] K. Hubeny: Die Ausgleichung von Dreiecksnetzen mit direkt gemessenen Seiten. Ö. Z. f. V. W., Heft Nr. 5/6, 1950.

[2] G. Schelling: Über die Grundfigur und den Längsfehler in Streckenketten. Ö. Z. f. V. W., Heft Nr. 5/6, 1952.

[3] G. Schelling: Zur Bestimmung von Funktionsgewichten in überbestimmten symmetrischen Streckenketten. Ö. Z. f. V. W., Heft Nr. 5, 1953.

Fußnoten:

[1]) [2], Gleichung (1a).
[2]) [2], Gleichung (2b).
[3]) [2], Abschnitt B, a).
[4]) [2], Abschnitt A, letzter Absatz.
[5]) [2], Tabelle 1.
[6]) [3], Abschnitt 4, 5 und 6.

1 Figurenbeilage.

Die Rolle der Grundlinien bei der Netzprojektion

Von K. Ledersteger, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

(Schluß)

Der mit diesen Betrachtungen gewonnene Einblick in das Maßstabproblem der Projektion setzt uns in den Stand zu prüfen, inwieweit bei den verschiedenen Methoden der astronomisch-geodätischen Netzausgleichung die Verwertung der Grundlinien den prinzipiellen Erfordernissen der Projektion gerecht wird. Wie bereits erwähnt, bedauert Helmert schon für die übliche Netzausbreitung die mangelnde Reduktion der Grundlinien vom Geoid auf das Referenzellipsoid. Denn der dadurch bedingte Fehler in den Vergrößerungsseiten beeinträchtigt, wenn auch zumeist nur sehr geringfügig, die Berechtigung der Basisgleichungen. Der Sachverhalt ändert sich aber sofort, wenn ein ursprünglich rein geometrisch ausgeglichenes Großnetz nachträglich einer astronomisch-geodätischen Ausgleichung im Sinne der translativen Methode Helmerts unterworfen wird. Weil nämlich diese geodätisch dahin gedeutet werden kann, daß sie auf die Gesamtheit aller Projektionen abzielt, steht hier für die exakte Lösung des Maßstabproblemes nur folgender Weg offen. Man reduziert alle Grundlinien exakt auf das ursprüngliche Referenzellipsoid und muß beim Ellipsoidübergang genau so wie bei der Netzverschiebung die Änderung der Geoidhöhen berücksichtigen. Dann ergeben sich gemäß (12) alle Verbesserungen in Funktion von 5 statt wie bei Helmert in Funktion von 4 Größen, weil Δz_0 als weitere Unbekannte auftritt. Außerdem erfahren selbstverständlich die Koeffizienten der übrigen vier Unbekannten ξ_0, η_0, $\frac{da}{a}$ und $d\alpha$ gewisse Änderungen. Kennt man aber die ursprünglichen Geoidhöhen nicht, kann also die Grundlinien nur auf das Geoid reduzieren, so wäre es zwecklos, den von Krassowskij vorgeschlagenen Weg zu gehen; denn ist eine individuelle Behandlung aller Ellipsoide und Netzlagen unmöglich, so sind die auf dem Geoid liegenden Grundlinien wenigstens bestmöglich im Sinne aller Projektionen reduziert und das Helmertsche Verfahren stellt noch den besten Ausweg aus dem Dilemma dar. In diesem Falle brauchen die Basisgleichungen auch nicht Zwangsbedingungen zu sein, sondern können in die erste, geometrische Netzausgleichung ohneweiters Verbesserungen für die Basisvergrößerungsseiten einbezogen werden, deren Gewicht natürlich sorgfältig bestimmt werden muß.