Die Reduktion des astronomischen und ellipsoidischen Azimutes auf den geoidischen Zielpunkt

Karl Ledersteger [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **42** (1), S. 17–23

1954

Literatur:

[1] *Hopfner* Die beiden Hauptaufgaben der geodätischen Übertragung, D. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1939, Seite 237, Abschnitt d), auch [2].

[2] *Hopfner* Grundlagen der höheren Geodäsie, 1949, Art. 33, b), Seite 77, 78, auch [1].

[3] *Hristow* Änderung der geographischen Koordinaten zufolge Umorientierung eines geodätischen Netzes, D. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1942, Seite 132, Formel 32, 33 u. a.

[4] *Jordan-Eggert* Handbuch der Vermessungskunde III/2 1941, § 21, Seite 86.

[5] *Baeschlin* Lehrbuch der Geodäsie, 1948, § 27, Seite 129 u. a.

[6] *Näbauer* Grundzüge der Geodäsie, 1925 C, II, 25, Seite 418, auch:
Krüger Die kürzeste Entfernung und ihre Azimute zwischen zwei gegebenen Punkten des Erdellipsoids, Nachrichten der K. Ges. der Wissenschaften Göttingen, 1918.

[7] *Jordan-Eggert* Handbuch der Vermessungskunde III/2 1941, § 21, Seite 96.

[8] *Hubeny* Ein Beitrag zur Lösung der zweiten Hauptaufgabe der geodätischen Übertragung, Ö. Z. f. V., Festschrift Doležal, 1952, Seite 343.

Die Reduktion des astronomischen und ellipsoidischen Azimutes auf den geoidischen Zielpunkt

Von Karl Lederstege r, Wien

(Veröffentlichung der Österr. Kommission für die Internationale Erdmessung)

Zusammenfassung: Der neuen Formel von Vening Meinesz für die Reduktion des astronomischen Azimutes wegen der Meereshöhe des Zielpunktes wird eine analoge Reduktion des ellipsoidischen Azimutes auf den geoidischen Zielpunkt gegenübergestellt, in welcher die Reduktion wegen der Meereshöhe des Zielpunktes mit der Reduktion vom astronomischen auf das ellipsoidische Zenit zusammengefaßt ist. Aus der Gegenüberstellung des reduzierten astronomischen und ellipsoidischen Azimutes ergibt sich eine azimutale Lotabweichungskomponente, die einen theoretischen Laplaceschen Widerspruch erzeugt. Dieser Widerspruch hängt allein von der Lotabweichung des Standpunktes und der Meereshöhe eines zur Distanz s gehörigen und im Horizont des Standpunktes erscheinenden Zielpunktes ab.

Summary: The new formula of Vening Meinesz for the correction of astronomic azimuths for skew normals will be compared with an analogous reduction of the spheroidal azimuths, in which the correction for skew normals and the correction for deviation of the vertical are connected. The difference of the reduced astronomic and spheroidal azimuth produces an azimuthal component of deviation and also a Laplace's discrapency which depends only on the deviation of the vertical at the station and of the height of a target in the horizon of P_1 and in the distance to P_2.

Résumé: A la nouvelle formule de Vening Meinesz servant à la réduction de l'azimut astronomique en raison du niveau de la mer du point de visée on oppose une réduction analogue de l'azimut ellipsoïdique au point de visée geoïdique, dans laquelle la réduction en raison du niveau de la mer du point de visée est réunie à la réduction du zénith astronomique au zénith ellipsoïdique. De la confrontation des azimuts astronomique et ellipsoïdique réduits il résulte une composante azimutale de déviation de la verticale, engendrant une contradiction théorique de Laplace. Cette contradiction dépend uniquement de la déviation de la verticale en la station, et de l'altitude d'un point de visée appartenant à la distance „s“ et apparaissant dans l'horizon de la station.

In einem kürzlich erschienenen Aufsatz [1]) habe ich zu zeigen versucht, daß aus den ellipsoidischen Azimutreduktionen wegen der relativen Lotabweichung des Standpunktes und wegen des Überganges vom geoidischen auf den ellipsoidischen Zielpunkt theoretische Laplacesche Widersprüche entstehen. Hingegen darf stets die Reduktion vom Vertikalschnitt auf die geodätische Linie vernachlässigt werden, während die Reduktion wegen der Meereshöhe des Zielpunktes dem astronomischen und ellipsoidischen Azimut gleicherweise zukommt und somit in der azimutalen Lotabweichungskomponente ausfällt. Voraussetzung für die letztere Behauptung war, daß die Reduktion wegen der Zielpunktshöhe unter der hypothetischen Zugrundelegung eines Ellipsoides mit geraden Lotlinien berechnet werden darf.

In einer sehr interessanten Abhandlung [2]) hat nun Vening Meinesz für diese Reduktion eine zweite Näherung entwickelt, die zwar gleichfalls an den geraden Lotlinien festhält, jedoch die Lotabweichungen des Standpunktes und des Zielpunktes berücksichtigt. Dadurch geht aber, wie im folgenden näher ausgeführt sein soll, die Gleichheit der Reduktion für das astronomische und ellipsoidische Azimut verloren und es erweist sich als notwendig, für das ellipsoidische Azimut die scheinbare Höhe des Zielpunktes über dem Horizont des Standpunktes gleichzeitig mit seiner Meereshöhe in Rechnung zu setzen.

Die Helmertsche Reduktion eines beobachteten Azimutes wegen der Meereshöhe des Zielpunktes — in der eingangs zitierten Arbeit mit $d_2\alpha$ bezeichnet — ist für die gegenwärtig übliche nordöstliche Zählung der Azimute und für die östliche Zählung der Längen genau so wie für die von Helmert selbst verwendete südwestliche Azimut- und westliche Längenzählung:

$$d_2\alpha = + \frac{h_2 e^2}{2a} \rho'' \cos^2 \varphi_1 \sin 2\alpha_{12}; \qquad \ldots (1)$$

sie erreicht für ein Azimut von 45^0 den Maximalbetrag

$$+ 0''.1087\, h_{2,\mathrm{km}} \,.\, \cos^2 \varphi_1,$$

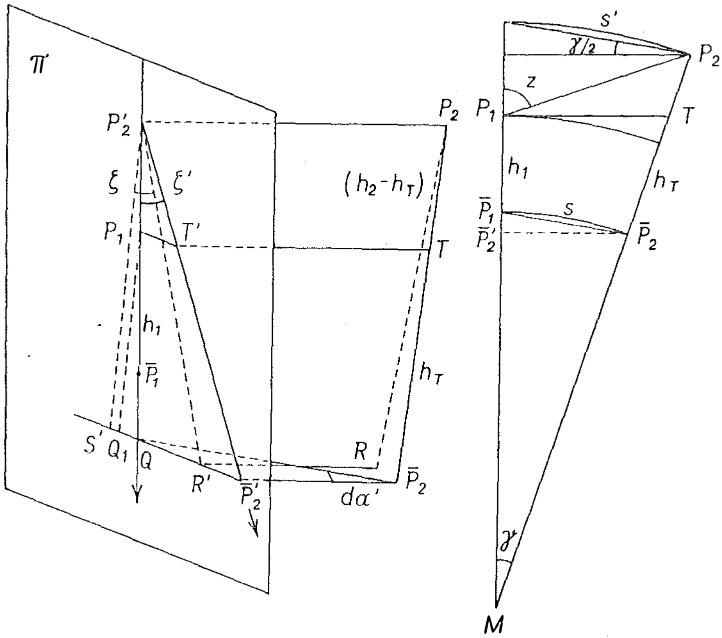
wobei das Internationale Ellipsoid zugrundegelegt ist.

Diese streng ellipsoidisch abgeleitete Korrektion ist nun im Sinne von Vening Meinesz um ein Lotabweichungsglied zu erweitern. Wir legen zu diesem Zweck durch die physische Lotrichtung des Standpunktes P_1 eine Vertikalebene π senkrecht zur Visierebene nach dem Zielpunkt P_2, der in der Zenitdistanz z erscheine. Projiziert man die als Gerade vorausgesetzte Lotlinie von P_2 in die genannte Vertikalebene, so schneidet sie die Lotlinie des Standpunktes im Bildpunkt P_2' unter dem Winkel ζ', und zwar

[1]) „Zur Definition der Lotabweichungen und Laplaceschen Widersprüche", Österr. Zeitschrift f. Vermessungswesen, Heft 4, 1953.

[2]) Vening Meinesz: Physical Geodesy I and II, Koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen Amsterdam, Proceedings, Series B, 56, No. 1, 1953.

oberhalb von P_1, wenn $z < 90^0$ vorausgesetzt wird. Denkt man sich das Geoid durch die mittlere Schmiegungskugel ersetzt, so würden sich die beiden Lotrichtungen im Krümmungsmittelpunkt unter dem Winkel γ schneiden. Ist die Entfernung s der beiden Lotfußpunkte $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_2$ gleich 0.01 a oder rund 64 km, so ist $\gamma \doteq 34'.4$, cos $\gamma = 0{\cdot}999\,95$, also die Projektion $P_2'\ \overline{P}_2'$ mit weit ausreichender Genauigkeit identisch mit der Meereshöhe h_2 von P_2. In dem angenommenen Idealfalle wäre natürlich $\zeta' \doteq 0$ und der Projektionspunkt $\overline{P}_2'$ würde wegen sin $\frac{\gamma}{2} \doteq 0{\cdot}005$ rund 320 m vertikal unter $\overline{P}_1$ liegen. Der in der Zenitdistanz 90^0 erscheinende Punkt T der Lotlinie von



P_2, dessen Projektion mit dem Standpunkt P_1 zusammenfiele, hat eine Meereshöhe h_T von annähernd $h_T = h_1 + 320$ m. In Wirklichkeit liegt nun der Geoidpunkt $\overline{P}_2$ nicht in unserer Visierebene; sein Normalabstand e von dieser erscheint in der Projektionsebene π in natürlicher Größe und man liest an der Figur leicht ab:

$$e \doteq Q\overline{P}_2' \doteq h_2\,\zeta' = s\,d\,\alpha'\,, \qquad \ldots (2)$$

woraus für die Reduktion des astronomischen Azimutes wegen der Meereshöhe des Zielpunktes unmittelbar folgt:

$$d\,\alpha' = + \frac{h_2}{s}\,\zeta'. \qquad \ldots (3)$$

Nimmt man zunächst an, daß das Geoid mit einem Rotationsellipsoid zusammenfällt, so muß (3) mit (1) identisch sein. Man erkennt dann die merkwürdige Tatsache, daß der Normalabstand des Lotfußpunktes $\overline{P}_2$ von der Visierebene annähernd proportional der Seite s zunimmt, so daß $d\alpha'$ praktisch unabhängig ist von der Distanz $s = \overline{P}_1\,\overline{P}_2$. Nach (1) erreicht die Reduktion ihr Maximum im Azimut $\alpha_{12} = 45^0$ und ist für alle im ersten (nordöstlichen) Quadranten liegenden Visuren stets positiv. Diese Annahme liegt auch der Figur zugrunde; die Projektion $\overline{P}_2'$ fällt jetzt in den vorderen Teil der Vertikalebene π, d. h. in das Azimut $(90^0 + \alpha)$. Wie schon erwähnt, ist der Maximalwert der Reduktion für $h_2 = 1\ km$ $0''\!.1087$, woraus für eine Seite von $s = 100\ km$ der Maximalbetrag von $c = 5\ cm$ folgt.

Nunmehr sei der Einfachheit halber in P_1 die Lotabweichung Null. Legt man dann in P_2 das astronomische Zenit relativ zum ellipsoidischen Zenit durch die Polarkoordinaten ϑ und A fest, so sind wie üblich die Komponenten der relativen Lotabweichung durch

$$\xi = \vartheta \cos A \quad ; \quad \eta = \vartheta \sin A \qquad \ldots (4)$$

gegeben. Demnach hat der astronomische Nadirpunkt das Azimut $(A + 180^0)$ und seine Projektion auf die ellipsoidische Vertikalebene des Azimutes $(90^0 + \alpha)$ wird

$$\vartheta \cos (180^0 + A - 90^0 - \alpha) = \vartheta \sin (\alpha - A) = \xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha. \quad \ldots (5)$$

Hier erhebt sich vorerst die Frage, in welchem Größenverhältnis der Einfluß der Lotabweichung zur rein ellipsoidischen Azimutreduktion steht. Erreicht z. B. der Ausdruck (5) den Betrag von $10''$, so resultiert daraus bei einer Meereshöhe von $h_2 = 1000\, m$ bereits ein zusätzlicher Normalabstand des Lotfußpunktes von der Visierebene im Betrage von $5\, cm$, was bei einer Distanz $s = 100\ km$ abermals eine Drehung der Vertikalschnittsebene von $0''\!.1$ bedingt. Da aber die Dreiecksseiten 1. O. meist beträchtlich kleiner sind, kann der Einfluß der Lotabweichung den ellipsoidischen Effekt um ein Mehrfaches übertreffen.

Die Ellipsoidnormale von P_2 durchstoße das Geoid im Punkte R, dessen Projektion R' auf die Ebene π die Strecke c unterteile:

$$c = c_E + c_L . \qquad \ldots (6)$$

Der Abschnitt c_E, der dem streng ellipsoidischen Winkel ζ entspricht, repräsentiert die H e l m e r t sche Reduktion (1) und die strichlierte Linie $P_2'\, R'$ stellt die Projektion der ellipsoidischen Nadirrichtung von P_2 dar. Hingegen bedingt $c_L = R'\, \overline{P}_2'$ die zusätzliche Korrektion des Azimutes wegen der relativen Lotabweichung ξ_2, η_2. Die Drehung des astronomischen Vertikalschnittes wegen der Meereshöhe des Zielpunktes muß aber natürlich vollständig unabhängig von jeglicher Beziehung zu einem Referenzellipsoid sein. Tatsächlich ändert sich die relative Lotabweichung zwischen benachbarten Dreieckspunkten bei einer differentiellen Verschiebung des Netzes auf dem Referenzellipsoid oder bei einem Ellipsoidübergang nur um Größen höherer Ordnung. Mithin können wir die obige Voraussetzung fallen lassen, daß in P_1 die relative Lotabweichung verschwindet, und gewinnen die Formel von V e n i n g M e i n e s z:

$$d\alpha' = \frac{h_2}{s}\Big[(\xi_2 - \xi_1) \sin \alpha_{12} - (\eta_2 - \eta_1) \cos \alpha_{12}\Big] + \frac{h_2\, e^2}{2a}\, \rho'' \cos^2 \varphi_1 \sin 2\alpha_{12}. \qquad (7)$$

Daß in dieser rein astronomischen Korrektion überhaupt die relative Lotabweichungsdifferenz auftritt, ist lediglich darauf zurückzuführen, daß der Winkel ζ' anders gar nicht zu erfassen wäre und auch im Hinblick auf den späteren Vergleich mit dem ellipsoidischen Azimut in eine reine ellipsoidische und eine Lotabweichungskomponente zerlegt werden muß.

In der Figur ist der in Formel (7) angenommene Allgemeinfall dargestellt, bei dem in P_1 eine relative Lotabweichung vorhanden ist. Projiziert man die Ellipsoidnormale von P_1 in die Ebene π und zieht durch P_2' eine Parallele zu dieser Projektion, so wird:

$$c_L(P_1) = S'Q \quad ; \quad c_L(P_2) = R'\bar{P}_2' \quad ; \quad c_E = S'R' \quad ; \quad c(\zeta') = Q\bar{P}_2'$$

und:
$$c = c_E + c_L(P_2) - c_L(P_1). \qquad \ldots (7a)$$

Will man in Fortsetzung dieses Gedankens die entsprechende Reduktion des ellipsoidischen Azimutes ableiten, so hat man zu beachten, daß nur die senkrecht zur Visierebene liegende und somit in die Ebene π fallende Komponente der Lotabweichung des Standpunktes zur Wirkung gelangt. Wir können mithin unsere Projektionsebene beibehalten. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Lotlinie von P_2 durch den Punkt T unterteilt, der von P_1 aus unter der Zenitdistanz 90° erscheint. Dann haben wir zuerst die astronomische Vertikalschnittsebene und die dazu senkrechte Ebene π gemäß (7) um den Winkel

$$(d\alpha')_T = \frac{(h_2 - h_T)}{s}\left[(\xi_2 - \xi_1)\sin\alpha_{12} - (\eta_2 - \eta_1)\cos\alpha_{12}\right] + \\ + \frac{(h_2 - h_T)\cdot e^2}{2a}\rho''\cos^2\varphi_1\sin 2\alpha_{12}$$

zu drehen. Nunmehr fällt die Projektion von T in den Punkt P_1; die Visur ist horizontal und wir können die Visierebene ohne Einfluß auf das Azimut um die zu π senkrechte Achse $P_1 T$ soweit drehen, daß sie π in der ellipsoidischen Normalen von P_1 schneidet. Die weitere Drehung dieser ellipsoidischen Vertikalebene wegen der Meereshöhe h_T des Zielpunktes T wird in leicht ersichtlicher Weise:

$$(d_2\alpha)_T = \frac{h_T}{s}(\xi_2\sin\alpha - \eta_2\cos\alpha) + \frac{h_T e^2}{2a}\rho''\cos^2\varphi_1\sin 2\alpha.$$

Die Summe der beiden letzten Ausdrücke gibt die gesamte Reduktion des ellipsoidischen Azimutes auf den geoidischen Zielpunkt $\bar{P}_2$, in der die Reduktion wegen der Meereshöhe des Zielpunktes mit der Reduktion $d_1\alpha$ vom astronomischen auf das ellipsoidische Zenit vereinigt ist:

$$d_1\alpha + d_2\alpha = \frac{h_2}{s}\left[(\xi_2 - \xi_1)\sin\alpha_{12} - (\eta_2 - \eta_1)\cos\alpha_{12}\right] + \\ + \frac{h_T}{s}(\xi_1\sin\alpha - \eta_1\cos\alpha) + \frac{h_2 e^2}{2a}\rho''\cos^2\varphi_1\sin 2\alpha_{12}. \qquad \ldots (8)$$

Diese Summe kann natürlich auch direkt gewonnen werden. Nach H e l m e r t ist die Reduktion vom astronomischen auf das ellipsoidische Zenit für den tatsächlichen Zielpunkt P_2:

$$d_1 \alpha = -\operatorname{cotg} z \, (\xi_1 \sin \alpha - \eta_1 \cos \alpha). \qquad \ldots (9)$$

Eine vereinfachte Ableitung dieser Formel wurde vor einem Jahr in dieser Zeitschrift [3]) gebracht. Es dürfte nicht überflüssig sein zu bemerken, daß bei dieser Ableitung die Zenitdistanz z als refraktionsfrei vorausgesetzt ist. Geometrisch kann $d_1\alpha$ auch als Folge einer Drehung der Visierebene um die Achse $P_1 P_2$ in die Ellipsoidnormale von P_1 gedeutet werden, die eine kleine negative Drehung der zur Visierebene normalen Projektionsebene π zur Folge hat, wodurch der Bildpunkt P_2' in die Ellipsoidnormale von P_1 wandert.

Zur Elimination von z aus Gleichung (9) findet man an Hand der Nebenfigur leicht:

$$\operatorname{cotg} z = \frac{(h_2 - h_T) \cos \gamma}{s' \cos \frac{\gamma}{2}} \text{ mit } s' = s \left(1 + \frac{h_2}{R}\right)$$

und man erhält mit hinreichender Genauigkeit

$$d_1\alpha = -\frac{(h_2 - h_T)}{s} (\xi_1 \sin \alpha - \eta_1 \cos \alpha). \qquad \ldots (9a)$$

Die weitere ellipsoidische Reduktion wegen der Meereshöhe h_2 des Zielpunktes besteht jetzt in einer Drehung der Vertikalschnittsebene um die Gerade $P_1 Q_1$ und es folgt in sinngemäßer Anwendung von (7):

$$d_2\alpha = \frac{h_2}{s} (\xi_2 \sin \alpha - \eta_2 \cos \alpha) + \frac{h_2 e^2}{2a} \rho'' \cos^2 \varphi_1 \sin 2\alpha. \qquad \ldots (10)$$

Die Summe von (9a) und (10) ist aber identisch mit (8), wie es sein muß.

Geht man von dem beobachteten astronomischen Azimut α_b' des Punktes P_2 aus, so wird das astronomische Azimut des Geoidpunktes $\overline{P}_2$:

$$\alpha' = \alpha_b' + d\alpha'.$$

Das gleichsam unmittelbar beobachtete ellipsoidische Azimut von P_2 wird:

$$\alpha_b = \alpha_b' - \varepsilon + d_1\alpha$$

unter ε den Winkel zwischen der astronomischen und ellipsoidischen Mittagslinie verstanden. Somit ergibt sich als definitives ellipsoidisches Azimut des Geoidpunktes $\overline{P}_2$

$$\alpha = \alpha_b' - \varepsilon + d_1\alpha + d_2\alpha$$

und schließlich für die azimutale Lotabweichungskomponente:

$$(\alpha' - \alpha) = + \varepsilon + d\alpha' - d_1\alpha - d_2\alpha$$

---

[3]) K. L e d e r s t e g e r: Projektion und Lotabweichung, Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, XL. Jg., 1952, Seite 177.

oder im Hinblick auf (7) und (8):

$$(\alpha' - \alpha) = + \varepsilon - \frac{h_T}{s} (\xi_1 \sin \alpha - \eta_1 \cos \alpha) \quad . . . (11)$$

mit $$h_T = h_1 + s \, . \sin \frac{s}{2R}.$$

Diese Gleichung hätte man auch direkt hinschreiben können. Denn ist der Geoidpunkt $\overline{P}_2$ unmittelbar der Zielpunkt, also $h_2 = 0$, so verschwinden $d\alpha'$ und $d_2\alpha$ und das letzte Glied der Gleichung (11) stellt die zugehörige negative Reduktion (9a) dar. Es kommt aber nicht bloß auf die Differenz $(\alpha' - \alpha)$, sondern auf die beiden Reduktionen (7) und (8) selbst an!
In der Differenz (11) bezieht sich sowohl das astronomische wie das ellipsoidische Azimut auf den Geoidpunkt $\overline{P}_2$ und es ist eigentlich a priori einzusehen, daß diese Differenz weder von der Meereshöhe noch von der Lotabweichung des Punktes P_2 abhängen darf. Wenn dies bisher infolge der fälschlichen Gleichsetzung von $d\alpha'$ und $d_2\alpha$ übersehen wurde, so liegt dies hauptsächlich an der Helmert schen Form (9) der Reduktion $d_1\alpha$. Besonders bemerkenswert ist noch, daß auch nicht die Seehöhe des Standpunktes in die Differenz eingeht, sondern an ihrer Stelle die zur jeweiligen Distanz gehörige Seehöhe eines im Horizont liegenden Zielpunktes T.

Der zweite Term der Gleichung (11) stellt eine erste Komponente des theoretischen Laplace schen Widerspruches dar; man erhält sie, wenn man in der negativ genommenen Korrektion $d_1\alpha$, Gleichung (9a), einfach $h_2 = 0$ setzt. Damit aber kann diese Komponente nicht wie bisher angenommen beliebig klein gehalten werden; sie verschwindet nicht für streng horizontale Visur, sondern nur mehr dann, wenn $\xi_1 = \eta_1 = 0$ oder wenn die Azimutmessung im Azimut der Lotabweichung erfolgt. Demnach darf jetzt das Zusatzglied von (11) nicht ohneweiters vernachlässigt werden. Doch ist die Sache nicht schlimm; denn auch bei systematischem Verhalten der Lotabweichungen werden die Azimute der astronomischen Messungen stark variieren und dadurch einem systematischen Einfluß dieses Gliedes entgegenwirken. Als zweite Komponente des theoretischen Widerspruches tritt die Reduktion $d_3\alpha$ vom geoidischen auf den ellipsoidischen Zielpunkt hinzu. Diese Betrachtungen gelten für die übliche Netzausgleichung. Auf den in der Praxis noch nie verwirklichten Fall der Projektion gehen wir hier nicht ein.

Somit hat sich der scharfsinnige Gedanke von Vening Meinesz und seine Formel (7) als sehr bedeutsam und fruchtbringend erwiesen. Wir haben diese Formel eingangs als zweite Näherung für die Reduktion des astronomischen Azimutes wegen der Meereshöhe des Zielpunktes bezeichnet. Es darf aber nicht verschwiegen werden, daß diese zweite Näherung rein zahlenmäßig nicht unbedingt eine Verbesserung bedeuten muß; denn nach wie vor wird die Lotkrümmung vernachlässigt, deren quantitative Auswirkung noch einer eingehenden Diskussion bedarf.