Zur Definition der Lotabweichungen und Laplaceschen Widersprüche

Karl Ledersteger [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **41** (4), S. 97–105

1953

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppe Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

Hofrat Prof. Dr. h. c. mult. E. Doležal,
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. Lego und o. ö. Professor Dipl.-Ing. Dr. H. Rohrer

Nr. 4 Baden bei Wien, Ende August 1953 XLI. Jg.

Zur Definition der Lotabweichungen und Laplaceschen Widersprüche

von K. Ledersteger, Wien

(Veröffentlichung der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung)

Zusammenfassung: Die verschiedenen theoretischen Laplaceschen Widersprüche werden sowohl für die Definitionen von Helmert und Pizzetti, wie auch für die relativen und absoluten Lotabweichungen aus den Reduktionen der astronomischen und ellipsoidischen Azimute entwickelt. Die theoretischen Widersprüche können nur bei Reduktion der astronomischen Beobachtungen auf das Geoid und nur für die absoluten Lotabweichungen exakt verschwinden. Der wesentliche Unterschied zwischen den absoluten und relativen Widersprüchen beruht in den Reduktionen $d_3\alpha$ der Azimute wegen des schrägen Abstandes der Zielpunkte auf dem Geoid von ihren korrespondierenden Bildpunkten auf dem Ellipsoid.

Summary: The different theoretical Laplace's discrepancies are developed from the reductions of the astronomical and ellipsoidal azimuts for the definitions by Helmert and Pizzetti as well as for the relative and absolute deflections of the vertical. The theoretical discrepancies only exactly disappear by the reduction of the astronomical observations to the geoid and only for absolute deflections of the vertical. The essential difference between the absolute and relative contradictions of Laplace equation lies on the reductions $d_3\alpha$ of azimuts because of the oblique distance of goals on geoid from their corresponding picture points on ellipsoid.

*

Vor einiger Zeit habe ich in dieser Zeitschrift unter dem Titel: „Projektion und Lotabweichung" (Heft 6/1952, Seite 174—187) eine Synthese der älteren

Helmertschen Auffassung der Lotabweichungen mit dem neuen Standpunkt von Vening-Meinesz versucht. Dabei handelte es sich in erster Linie um einige prinzipielle Fragen, deren restloser Klärung die folgenden Betrachtungen dienen sollen.

Die Definition der Lotabweichungen ist bis zu einem gewissen Grade Sache der Konvention. Doch bietet es ohne Zweifel große Vorteile sowohl in physikalischer wie auch in geometrischer Hinsicht, wenn dieser Definition eine exakte Gegenüberstellung von Geoid und mittlerem Erdellipsoid oder von Geoid und Referenzellipsoid zugrundeliegt, je nachdem es sich um absolute oder relative Lotabweichungen handelt. Jedenfalls war dieser Gedanke dafür mitbestimmend, daß an Stelle der älteren Helmertschen die Definition von Pizzetti übernommen wurde. Darnach werden den ellipsoidischen Elementen φ, λ, α streng geoidische Elemente φ', λ', α' gegenübergestellt und es müssen zu diesem Zwecke die in verschiedenen Niveauflächen angestellten astronomischen Beobachtungen von Länge und Breite wegen der Krümmung der Lotlinien auf das Geoid reduziert werden; ebenso muß das beobachtete astronomische Azimut der Vertikalebene nach einem benachbarten Dreieckspunkt eine Korrektion wegen der Meereshöhe des Zielpunktes erfahren, weil diese Vertikalebene bekanntlich im allgemeinen nicht die Lotlinie des Zielpunktes enthält. Diese Reduktionen sind nun leider infolge der mangelnden Kenntnis der Dichteverteilung in den oberen Schichten der Erdkruste nicht exakt ausführbar. Man legt ihnen daher die Hypothese des Rotationsellipsoides zugrunde, wobei die Längen überhaupt unverändert bleiben, während die stets negative Verbesserung der beobachteten Breiten

$$d\varphi' = -0\overset{''}{.}000171 \; H_m \sin 2\varphi \qquad \ldots 1)$$

erst für eine Seehöhe von 5840 m den maximalen Betrag von $1''$ erreicht. Die Drehung der Vertikalebene wegen der Meereshöhe des Zielpunktes wird unter der Voraussetzung gerader Lotlinien berechnet:

$$d\alpha' = +0\overset{''}{.}1087 \; H_{km} \cos^2 \varphi \sin 2\alpha, \qquad \ldots 2)$$

so daß die Höhe des Standpunktes dabei überhaupt keine Rolle spielt. Der Berechnung des numerischen Koeffizienten von 2) liegt das Internationale Ellipsoid zugrunde.

Werden nun die ellipsoidischen Koordinaten φ und λ der korrespondierenden Bildpunkte auf dem Referenzellipsoid durch die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes und die anschließende geodätische Übertragung vom Fundamentalpunkt her gewonnen, so steht der Bildung der meridionalen und longitudinalen Komponente der relativen Lotabweichung im Sinne Helmerts nichts mehr im Wege:

$$\xi_r = (\varphi' - \varphi); \quad \eta_r = (\lambda' - \lambda) \cos \varphi. \qquad \ldots 3)$$

Hingegen erfordert die azimutale Lotabweichungskomponente noch eine Klärung hinsichtlich des zu verwendenden Azimutes.

Für die Reduktion der im Zuge der Triangulierung beobachteten Dreieckswinkel und Richtungen bestehen keinerlei Zweifel. Weil die Stehachse des Theodolits nach der tatsächlichen Lotrichtung des Beobachtungspunktes orientiert ist, müßte zuerst eine Reduktion vom astronomischen auf das ellipsoidische Zenit oder die Reduktion wegen Lotabweichung erfolgen. Die Lotabweichung wirkt dabei wie ein Stehachsenfehler und daher ist die Reduktion für eine horizontale Visur Null. Für jede von Null verschiedene Zielhöhe ist sie aber theoretisch erforderlich, wenn sie auch praktisch bei der Berechnung einer Landesvermessung wegen der Unkenntnis der relativen Lotabweichung unterbleiben muß, solange man nicht an eine zweite Ausgleichung denkt und auch eine genäherte Berücksichtigung auf Grund provisorischer geodätischer Koordinaten ablehnt. Diese Vernachlässigung ist im Hinblick auf die geringen Zielhöhen der Winkelmessung 1. O. im allgemeinen durchaus tragbar. Die Reduktion wegen Lotabweichung ist nach Umkehrung des Vorzeichens mit der im eingangs zitierten Aufsatz an Hand der Figur 1 abgeleiteten Größe $\delta\alpha$ identisch:

$$d_1\alpha_{12} = - \operatorname{cotg} z_{12} \, (\xi_r \sin \alpha_{12} - \eta_r \cos \alpha_{12}). \qquad \ldots 4)$$

In der Figur wurde das ellipsoidische Zenit zum oberen Pol gewählt und dementsprechend gesagt, daß „das astronomische Azimut um den Winkel $\delta\alpha$ zu groß beobachtet" werde. Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei betont, daß dies nur relativ aufzufassen ist. In Wirklichkeit ist natürlich das astronomische Azimut unabhängig von jeglicher Beziehung zu einem Ellipsoid; vielmehr erfordert die bei der Triangulierung gemessene Richtung eine ellipsoidische Korrektur $-\delta\alpha$.

Als zweite ellipsoidische Azimutkorrektion tritt nach Helmert die Reduktion wegen der Höhe des Zielpunktes über dem Referenzellipsoid auf. Diese Bezeichnung erweckt aber den Anschein, daß es sich um eine direkte Projektion des auf der Erdoberfläche gelegenen Zielpunktes auf das Referenzellipsoid handelt, während die übliche Verarbeitung der Triangulierungsergebnisse nichts mit einer Projektion zu tun hat. Außerdem muß bei der Bildung der azimutalen Lotabweichungskomponente irgendwie die Reduktion 2) des astronomischen Azimutes wegen der Meereshöhe des Zielpunktes berücksichtigt werden. Aus diesen beiden Gründen dürfte es korrekter sein, die Helmertsche Reduktion in ihre beiden Bestandteile zu zerlegen. Der erste Teil ist wieder die Reduktion wegen der Meereshöhe des Zielpunktes P_2^H, also die Überführung des beobachteten Vertikalschnittes in den Vertikalschnitt nach einem Geoidpunkt P_2. Diese Reduktion ist somit gleicherweise dem astronomischen und dem ellipsoidischen Azimut eigen:

$$d_2\alpha_{12} = +0.''1087 \; H_{km} \cos^2\varphi \sin 2\alpha_{12} \qquad \ldots 5)$$

und fällt in der Differenz $(\alpha' - \alpha)$ aus. Der zweite Teil der genannten Helmert-Reduktion, also der Übergang vom Geoid auf das Referenzellipsoid, besteht in einer weiteren Drehung $d_3\alpha$ der Ebene des Vertikalschnittes wegen des Abstandes des Lot-Fußpunktes P_2 auf dem Geoid vom korrespondierenden Bildpunkt P_2' auf dem Ellipsoid. Dieser Abstand wird im allgemeinen weder in der normalen des Ellipsoidpunktes P_2' noch in der Lotlinie von P_2 liegen und ist vorerst vollständig unbekannt. Mangels der nötigen Elemente kann diese Reduktion bei der Berechnung der Landesvermessung nicht einmal näherungsweise berücksichtigt werden. Sicher aber beeinflußt sie wegen der geringen Seitenlängen der Hauptdreiecke und wegen der geringen relativen Höhenunterschiede von Geoid und Referenzellipsoid zwischen benachbarten Dreieckspunkten die gemessenen Winkel nur äußerst wenig.

Als vierte und letzte ellipsoidische Korrektion tritt schließlich die Reduktion vom Vertikalschnitt auf die geodätische Linie auf, die für mäßige Distanzen durch

$$d_4\alpha_{12} = -0''028 \cos^2 \varphi \sin 2\alpha_{12} \left(\frac{s \text{ in } km}{100}\right)^2 \quad \ldots 6)$$

gegeben ist. Sie beträgt für $s = 60$ *km* maximal erst $0''01$. Jedoch wächst sie bei größeren Distanzen rascher als mit dem Quadrat von s und erreicht bei $s = a$ bereits einen Maximalbetrag von etwa $2'$!

In der Praxis der Landesvermessung kann somit die 1. und 3. Azimutkorrektion überhaupt nicht berücksichtigt werden, während die 4. wegen ihrer Geringfügigkeit vernachlässigt wird. Somit wird für die Stationsausgleichungen 1. O. allein die Reduktion wegen der Meereshöhe der Zielpunkte durchgeführt. Trotzdem liefert — und dies ist von prinzipieller Wichtigkeit! — die Netzausgleichung und die geodätische Übertragung selbstverständlich streng ellipsoidische Azimute, so als ob die in die Ausgleichung eingeführten Dreieckswinkel alle angeführten theoretischen Korrektionen erfahren hätten.

Wird jetzt wie üblich die azimutale Lotabweichungskomponente $(\alpha'-\alpha)$ aus der Differenz des astronomischen und geodätischen Azimutes einer Dreiecksseite 1. O. gebildet und das beobachtete astronomische Azimut vorher im Sinne Pizzettis reduziert, so wird eigentlich das Azimut des astronomischen Vertikalschnittes nach einem benachbarten Geoidpunkt P_2 mit dem Azimut des ellipsoidischen Vertikalschnittes nach dem Bildpunkt P_2' verglichen. Hier erhebt sich die Frage, ob diese Differenz die Laplacesche Gleichung theoretisch hinreichend befriedigt oder nicht.

Bringt man in bekannter Weise Geoid und Referenzellipsoid in jene gegenseitige Lage, bei der der Hauptpunkt mit seinem Bildpunkt zusammenfällt und sowohl die physische Lotrichtung in diesem Punkte mit der Ellipsoidnormalen wie auch die beiden Meridianebenen zur Deckung gelangen, so liegt die Figurenachse des Ellipsoides der Rotationsachse der Erde parallel. In einem beliebigen Netzpunkt P_k auf dem Geoid und in seinem Bildpunkt P_k' auf dem Ellipsoid kann dann je eine Parallele zur Rotationsachse gelegt werden, wodurch die astronomische Meridianebene in P_k und die ellipsoidische Meridianebene in P_k' bestimmt sind. Läßt man jetzt durch eine Parallelverschiebung des Referenzellipsoides P_k' mit P_k zusammenfallen, so schließt die Lotrichtung mit der Ellipsoidnormalen den relativen Lotabweichungswinkel ϑ_r ein, während sich die beiden Meridianebenen in der Parallelen zur Rotationsachse schneiden und ihre Spuren in der Horizontalebene den Winkel $\varepsilon = \eta_r \, tg \, \varphi$ einschließen. Die Doppelbestimmung der η_r-Komponente

$$\eta_r = (\lambda'-\lambda) \cos \varphi = \varepsilon \operatorname{cotg} \varphi$$

liefert die Laplacesche Gleichung in der Form:

$$\varepsilon_k - (\lambda' - \lambda)_k \sin \varphi_k = 0. \quad \ldots 7)$$

In dieser Form gilt sie gleicherweise für absolute und relative Lotabweichungen, und zwar jeweils bis auf Größen 3. O. in ϑ, weil bei ihrer Herleitung jeder Sinus eines kleinen Winkels durch den Arcus ersetzt wurde. Für diese Betrachtungen darf nochmals auf die frühere Figur 1 verwiesen werden. Man sieht, daß der horizontale Schnittwinkel ε der beiden Meridianebenen nur dann durch die azimutale Lotabweichungskomponente $(\alpha' - \alpha)$ ersetzt werden darf, wenn sich die beiden Vertikalschnitte auf denselben Zielpunkt im Horizont beziehen. Befreit man die Differenz $(\alpha' - \alpha)$ durch entsprechende Berücksichtigung der Korrektion $d_1\alpha$ vom Einfluß der scheinbaren Zielhöhe und reduziert ferner das astronomische Azimut vorher wegen der Meereshöhe des Zielpunktes, so daß $d_2\alpha$ in der azimutalen Lotabweichungskomponente ausfällt, so bleibt noch immer die Tatsache, daß bei der obigen Parallelverschiebung des Ellipsoides nicht auch der bereits auf das Geoid reduzierte Zielpunkt P_2 mit seinem Bildpunkt zur Deckung gelangt.

Damit aber ist die oben aufgeworfene Frage nach der theoretischen Gültigkeit der üblichen Laplaceschen Gleichung

$$(\alpha' - \alpha)_k - (\lambda' - \lambda)_k \sin \varphi_k = 0 \qquad \ldots \; 8a)$$

auf die Frage zurückgeführt, ob die Reduktion $d_3\alpha$ die Größenordnung der in 7) begangenen Vernachlässigungen überschreiten kann. Dann aber liefert 8) auch bei vorausgesetzter astronomischer und geodätischer Fehlerfreiheit einen merkbaren Widerspruch

$$(\alpha' - \alpha)_k - (\lambda' - \lambda)_k \sin \varphi_k = w_{hk}; \qquad \ldots \; 8b)$$

er trägt einen Doppelindex, weil die in P_k gebildeten relativen Lotabweichungen natürlich von der Wahl des Hauptpunktes P_h abhängen, in dem per definitionem die geodätischen Ausgangswerte mit den reduzierten astronomischen Beobachtungsergebnissen zusammenfallen, also daselbst die relative Lotabweichung Null ist. In diesem Sinne dürfen wir w_{kh} als den „theoretischen Widerspruch" der Linie P_hP_k bezeichnen, welche Bezeichnung aber nicht zur irrigen Meinung verleiten darf, daß es sich im ersten Glied linkerhand um das astronomische und geodätische (ellipsoidische) Azimut einer beliebig langen geodätischen Linie handelt; das astronomische Azimut des Vertikalschnittes nach einem sehr entfernten Punkt entzieht sich der Beobachtung und die Reduktion $d_1\alpha$ könnte viel zu groß ausfallen.

Die azimutale Lotabweichungskomponente und damit der theoretische Widerspruch hängt davon ab, ob und wie die genannten Reduktionen berücksichtigt werden. Um dies eingehender zu untersuchen, gehen wir am besten vom beobachteten astronomischen Azimut α_b' nach einem benachbarten Dreieckspunkt aus, der eine bestimmte Höhe über dem Horizont des Standpunktes haben kann. Es erfordert nach Pizzetti die Reduktion wegen der Meereshöhe des Zielpunktes:

$$\alpha' = \alpha_b' + d\alpha' = \alpha_b' + d_2\alpha.$$

Das ellipsoidische Azimut ist überhaupt nicht unmittelbar der Messung zugänglich. Man kann aber ein gleichsam beobachtetes und bereits auf das ellipsoidische Zenit bezogenes Azimut annehmen, indem man das um $d_1\alpha$ korrigierte astronomisch beobachtete Azimut um den Winkel ε vermindert:

$$\alpha_b = \alpha_b' + d_1\alpha - \varepsilon;$$

dieses Azimut bezieht sich also noch auf den tatsächlichen Zielpunkt. Vernachlässigt man die 4. Reduktion, so findet man das definitive ellipsoidische Azimut

$$\alpha = \alpha_b' - \varepsilon + d_1\alpha + d_2\alpha + d_3\alpha.$$

Daraus folgt

$$(\alpha' - \alpha)_k = + \varepsilon - d_1\alpha - d_3\alpha$$

und zusammen mit 7) und 8b)

$$w_{hk} = - d_1\alpha - d_3\alpha. \qquad \ldots 9)$$

Denkt man sich mit Helmert das astronomische Azimut wegen der Höhe des Zielpunktes über dem Referenzellipsoid, exakter gesprochen von P_2^H auf P_2' reduziert, dann entfällt natürlich $d_3\alpha$ in der azimutalen Lotabweichungskomponente genau so wie $d_2\alpha$ und es bleibt allein:

$$w_{hk} = - d_1\alpha; \qquad \ldots 9a)$$

bleibt man umgekehrt beim unmittelbaren astronomischen Beobachtungsergebnis α_b' stehen, so wird:

$$w_{hk} = (\alpha_b' - \alpha)_k - (\lambda' - \lambda)_k \sin \varphi_k = - d_1\alpha - d_2\alpha - d_3\alpha. \qquad \ldots 9b)$$

Aus der Gegenüberstellung von 9) und 9a) geht der Unterschied in der Auffassung der Lotabweichungen bei Pizzetti und Helmert klar hervor. Pizzetti will aus den astronomischen Beobachtungen exakt geoidische Elemente ableiten; er berücksichtigt daher die Lotkrümmung und reduziert die Azimute wegen der Meereshöhe des Zielpunktes. Helmert hingegen operiert durchwegs mit geradlinigen Lotlinien und will das astronomische Azimut direkt auf das Referenzellipsoid reduzieren. Da aber für diese Reduktion praktisch wieder nur die Meereshöhe des Zielpunktes verwendet wird, fällt bei ihm $d_3\alpha$ nur scheinbar im theoretischen Widerspruch aus; das eigentliche Problem ist damit noch nicht gelöst.

Die erste Reduktion $d_1\alpha$ ist recht harmlos. Sie kann entweder durch Wahl einer möglichst horizontalen Visur von vornherein beliebig klein gehalten werden, oder aus dem theoretischen Widerspruch eliminiert werden, indem man sie ebenso wie $d_2\alpha$ an das beobachtete astronomische Azimut anbringt :

$$\alpha' = \alpha_b' + d_1\alpha + d_2\alpha.$$

Die erste Lösung ist vorzuziehen, weil die zweite die Exaktheit der Pizzettischen Definition stört.

Im Falle der absoluten Lotabweichungen, d. h. wenn man das Dreiecksnetz durch eine Projektion der Geoidpunkte auf das mittlere Erdellipsoid ersetzt, bietet auch die Reduktion $d_3\alpha$ keine Schwierigkeiten. Hier liegen nämlich die Bildpunkte und ihre Urbilder auf dem Geoid vertikal übereinander und ihre Abstände sind mit den Undulationen N des Geoides identisch. Daher ist die Reduktion $d_3\alpha$ formal gleich mit 2) oder 5):

$$d_3\alpha = + 0''\!.000\ 109\ N_m \cos^2 \varphi \sin 2\alpha \qquad \ldots 10)$$

und man erkennt, daß diese Reduktion selbst für eine Undulation von 100 m genau so vernachlässigt werden darf wie $d_4\alpha$ für alle Seiten I. O. Setzt man also noch horizontale Visuren für die Azimute voraus, so sind die absoluten Lotabweichungen bis auf kleine Größen 3. O. in ϑ streng widerspruchsfrei, wie wir es in dem früheren Aufsatz unter dem Gesichtspunkt der vollständigen Unabhängigkeit der Projektion von einem Fundamentalpunkt zeigen konnten. Für absolute Lotabweichungen darf mithin in 9) und 9b) die Reduktion $d_3\alpha$ als geringfügig unterdrückt werden. Namentlich 9b) wird dadurch identisch mit der Gleichung III, die jüngst Baeschlin*) entwickelt hat: sie gilt unter der Voraussetzung unreduzierter astronomischer Azimute strenge für die zugehörigen absoluten Lotabweichungen.

Wesentlich schwieriger sind aber die Reduktionen $d_3\alpha$ im Falle der relativen Lotabweichungen zu gewinnen. Hier muß zunächst genau festgelegt werden, was wir unter der für die theoretischen Widersprüche notwendig vorauszusetzenden astronomischen und geodätischen Fehlerfreiheit zu verstehen haben. Bei den astronomischen Komponenten ist dies eindeutig: es handelt sich einfach um Freiheit von Beobachtungsfehlern, wenn man von dem Einfluß der notwendigerweise unzulänglichen hypothetischen Annahmen bei den Reduktionen absieht. Ganz anders liegen aber die Verhältnisse bei einem aus einer Triangulierung durch Netzausgleichung und geodätische Übertragung hervorgegangenen Dreiecksnetz. Dieses ist auf jeden Fall geometrisch widerspruchsfrei, auch wenn seine Punktkonfiguration von der Wirklichkeit mehr oder minder abweicht. Es liegt nun nahe, ein Dreiecksnetz dann als geodätisch fehlerfrei zu bezeichnen, wenn es in seiner „absoluten Lage" auf dem mittleren Erdellipsoid mit der Punktkonfiguration der reinen Projektion der Geoidpunkte zusammenfällt. Breitet man also das ausgeglichene Netz zunächst unter Festhaltung des willkürlichen Fundamentalpunktes auf dem mittleren Erdellipsoid als Referenzfläche aus, dann muß es durch eine differentielle Verschiebung und Verdrehung des Netzes möglich sein, sämtliche Dreieckpunkte mit den Lotfußpunkten der entsprechenden Geoidpunkte zur Deckung zu bringen. Die so definierte geodätische Fehlerfreiheit macht auch die hohe Bedeutung der Laplaceschen Gleichung für die Netzausgleichung verständlich. Denn nur diese Gleichung gewährleistet streng genommen die Naturtreue des berechneten Netzes, während die Winkel-, Seiten- und Basisgleichungen dank des Ausganges von den Beobachtungsdaten zwar eine mehr oder minder gute Näherung vermitteln, ansonst aber lediglich die geometrische Möglichkeit des Netzes garantieren.

Setzen wir wieder horizontale Visuren für die Azimutmessungen voraus, so reduzieren sich im Falle der relativen Lotabweichungen die theoretischen Widersprüche 9) auf die negativen Korrektionen $d_3\alpha$. Um die nötige geodätische Fehlerfreiheit verbürgen zu können, gehen wir von einem Dreiecksnetz auf dem mittleren Erdellipsoid aus, das durch eine Projektion von Geoidpunkten mittels ihrer Lotlinien entstanden sein soll. Wählt man einen beliebigen dieser Projektionspunkte zum Fundamentalpunkt des Netzes, so muß dieses auf dem Erdellipsoid so verschoben werden, daß im Fundamentalpunkt die widerspruchsfreie, relative Lotabweichung Null entsteht. Diese Verschiebung ist mithin nicht willkürlich, sondern muß der Bedingung $d\alpha_h = d\lambda_h \sin \varphi_h$ genügen, d. h. sie muß eine Parallelver-

*) C. F. Baeschlin: Communication on Laplace's Equation, Bulletin Géodésique, Nr. 24, 1952.

schiebung sein. Bei einer derartigen Parallelverschiebung auf dem Ellipsoid wird aber mit wachsendem Abstand vom Fundamentalpunkt $d\alpha_k$ allmählich merkbar verschieden von $d\lambda_k \sin \varphi_k$ werden.

Bringt man nun durch eine entgegengesetzt gleiche Parallelverschiebung des Ellipsoides den Bildpunkt P_h' des Hauptpunktes wieder an dieselbe Stelle in der Lotlinie des Geoidpunktes P_h, so werden dennoch die übrigen Bildpunkte P_k' nicht wieder in die Lotlinien ihrer Urbilder fallen, weil die Identität der Parallelverschiebung des Netzes auf der Referenzfläche und der Verschiebung des Ellipsoides im Einbettungsraum nur für den Hauptpunkt gilt. Projiziert man jetzt abermals die Geoidpunkte auf das verschobene Erdellipsoid, so entsteht eine neue Punktkonfiguration, die das Dreiecksnetz im Sinne von Vening-Meinesz darstellt. Die neuen Bildpunkte weichen von den alten in ihrer Lage nur um Größen 3. O. ab, wie aus den Formeln 25) der früheren Arbeit hervorgeht. An diesen Überlegungen ändert sich prinzipiell nichts, wenn noch der weitere Übergang auf ein anderes Referenzellipsoid vorgenommen wird.

Mit der geringfügigen Lagenänderung bei der neuerlichen Projektion sind aber nichtsdestoweniger Azimutänderungen 2. O. verbunden, wie man leicht erkennt. Denkt man sich nämlich das Ellipsoid parallel so verschoben, daß der Bildpunkt P_k' mit seinem Urbild P_k auf dem Geoid zur Deckung kommt, so wird infolge des sehr flachen Verlaufes der Geoidwellen in den benachbarten Dreieckspunkten der Höhenunterschied von Geoid und Ellipsoid höchstens von der Größenordnung 1 *m* sein. Doch werden die Geoidpunkte und ihre Bildpunkte nicht mehr vertikal übereinanderliegen, sondern derart seitlich verschoben sein, daß

$$(d_3\alpha)_k = d\alpha_k - d\lambda_k \sin \varphi_k \qquad \ldots 11)$$

entsteht. Diese Beträge sind aber nach Formel 11) von „Projektion und Lotabweichung" von 2. Ordnung!

Theoretisch würden nun die Reduktionen $d_3\alpha$ verschwinden, wenn man den Gedanken einer reinen Projektion im Sinne von Vening-Meinesz auf beliebige Referenzellipsoide ausdehnt. Doch scheitert die praktische Durchführung schon an der relativ großen Lageunsicherheit der astronomischen Ortsbestimmung, ganz abgesehen davon, daß die Bestimmung der relativen Lotabweichungen in diesem Falle noch ein offenes Problem ist. Wenn man aber um die Triangulierung nicht herumkommt, so muß man auch die Reduktionen $d_3\alpha$ in Kauf nehmen. Das eigentliche Problem besteht dann darin, diese Reduktionen möglichst exakt zu bestimmen. Dies scheint aber nur auf dem schon in der früheren Arbeit vorgeschlagenen Wege durchführbar zu sein: man postuliert für die absolute Lage des Netzes auf dem mittleren Erdellipsoid die ideale Projektion und verarbeitet hierzu die Beobachtungsergebnisse auf diesem Ellipsoid als Referenzfläche unter wesentlicher Berücksichtigung der Laplaceschen Kontrollgleichung, wobei die absolute Lotabweichung im Fundamentalpunkt bereits bekannt sein muß. Denn die bisherige Anwendung der erweiterten Laplaceschen Gleichung auf die „Minimallage" des Netzes, d. h. auf das Minimalsystem der Lotabweichungen, enthält einen inneren Widerspruch. Es ist also unbedingt erforderlich, die absolute Lotabweichung im Fundamentalpunkt aus den Undulationen des Geoides abzuleiten oder durch exakte Auswertung der Integrale von Vening-Meinesz zu bestimmen.

Zusammenfassend darf festgestellt werden, daß der wesentliche Unterschied zwischen den absoluten und relativen theoretischen Laplaceschen Widersprüchen in den Reduktionen $d_3\alpha$ beruht. Die Beseitigung ist nur auf dem Wege einer idealen Projektion der Geoidpunkte mittels ihrer Lotlinien denkbar. Da dieser Gedanke aber nicht in voller Allgemeinheit durchführbar ist, muß er auf die absolute Lage der Triangulierungsnetze auf dem Normalsphäroid der Erde beschränkt werden, womit nicht nur die geodätische Fehlerfreiheit der Netze eindeutig definierbar ist, sondern auch eine einwandfreie Verwendung der Laplaceschen Kontrollgleichung ermöglicht wird.

Die frühgeschichtlichen Wehranlagen von Stillfried und ihre geodätische Darstellung

(Mit einer Kartenbeilage)

Von Dr. Hans P. Schad'n

Vor einigen Jahren habe ich in dieser Zeitschrift darauf hingewiesen[1]), daß der Geodäsie und den verwandten technischen Zweigen eine wichtige Rolle in der wissenschaftlichen Erschließung des Landes zukommt und daß eine ihrer Aufgaben die Vermessung und Darstellung der urgeschichtlichen und mittelalterlichen Erdfestungen ist.

Ein treffliches Beweisstück hiefür bildet der Plan der Wehranlagen von Stillfried, der diesem Hefte beigegeben ist, nicht nur weil Stillfried unter diesen Denkmälern die erste Stelle einnimmt, sondern auch deshalb, weil die Arbeit eine ausgezeichnete geodätische Leistung vorstellt und in jeder Hinsicht ganz besonders gelungen ist. Im Folgenden wird eine Beschreibung der Anlagen gegeben, soweit dies zum Verständnis des Planes notwendig ist, und zugleich die Geschichte des Platzes und seine Bedeutung in großen Zügen umrissen[2]).

Der Ort liegt an der Stelle, wo die Lößhügel des Weinviertels bis an die March vorstoßen und hier gegen zwanzig Meter tief fast senkrecht abstürzen. Durch Seitentäler, die von Westen hereinschneiden, ist ein gewaltiger Block herausgeschnitten, so daß der Platz von Natur aus auf drei Seiten geschützt war und sich daher zur Anlage einer befestigten Siedlung vorzüglich eignete. Hiezu kamen noch weitere günstige Umstände, die schon in den ältesten Zeiten die Menschen lockten, sich auf dem Plateau niederzulassen. Längs der March zog sich die sogenannte Bernsteinstraße hin, der wichtigste Verbindungsweg von Norden nach Süden, auf dem der Bernstein von der Ostsee in die südlichen Länder gebracht wurde. Ferner boten der Fischreichtum der March und der ausgedehnte Wald mit seinem

---

[1]) Geodäsie und Landeskunde. Österr. Zeitschrift f. Verm.Wesen XXXVII. Jg. (1949), Nr. 4—6, S. 92 f.

[2]) Nach einem Vortrag des Verfassers, gehalten am 17. März 1953 im Österr. Verein für Vermessungswesen und der Österr. Gesellschaft für Photogrammetrie.