

Paper-ID: VGI\_195307



## Beiträge zur Lösung der Einschneideaufgaben

Rudolf Guby <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **41** (2), S. 42–52

1953

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Guby_VGI_195307,  
Title = {Beitr{\a}ge zur L{\o}sung der Einschneideaufgaben},  
Author = {Guby, Rudolf},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {42--52},  
Number = {2},  
Year = {1953},  
Volume = {41}  
}
```



## Beiträge zur Lösung der Einschneideaufgaben

Von Rudolf G u b y, Wien

Im folgenden sollen mehrere Rechenverfahren erläutert werden, welche sich auf Gleichungen aufbauen, die den Zusammenhang zwischen orientierten Richtungen, Seitenlängen, Richtungsdifferenzen und den rechth. Standpunkts-, bzw. Zielpunktskoordinaten in einem Dreieck gleichzeitig zum Ausdruck bringen. Je nach der Art der Unbekannten sind daher mit Hilfe dieser Gleichungen die Aufgaben des Vorwärtseinschneidens, des Rückwärtseinschneidens und des Bogenschnittes durch entsprechende Gleichungsauflösung prinzipiell lösbar.

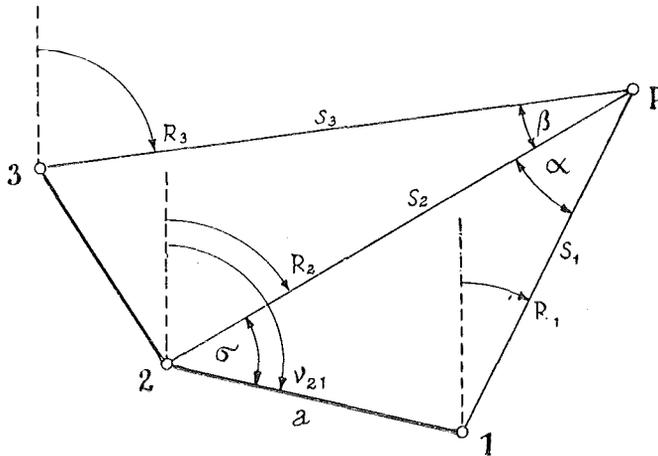


Fig. 1

Aus Fig. 1 ergibt sich nach dem Sinussatz

$$a \cdot \sin \sigma = s_1 \cdot \sin \alpha$$

Da aber  $\sigma = \nu_{21} - R_2$  ergibt sich weiter

$$a (\sin \nu_{21} \cdot \cos R_2 - \cos \nu_{21} \cdot \sin R_2) = s_1 \cdot \sin \alpha \quad \dots \quad (1)$$

Nun ist aber

$$\tan \nu_{21} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{und} \quad a = s_{21} = \frac{y_1 - y_2}{\sin \nu_{21}} = \frac{x_1 - x_2}{\cos \nu_{21}}$$

daher

$$\sin \nu_{21} = \frac{y_1 - y_2}{a} \quad \text{und} \quad \cos \nu_{21} = \frac{x_1 - x_2}{a}$$

Aus Gl. (1) wird daher

$$a \cdot \left( \frac{(y_1 - y_2)}{a} \cos R_2 - \frac{(x_1 - x_2)}{a} \sin R_2 \right) = s_1 \cdot \sin \alpha$$

Durch Kürzung von  $a$  auf der linken Seite der Gleichung und durch Vertauschung der Indices in den Zählern erhält man die endgültige Form der Gleichung (2) und durch zyklische Vertauschung die fünf weiteren:

$$(x_2 - x_1) \cdot \sin R_1 - (y_2 - y_1) \cdot \cos R_1 = s_2 \cdot \sin \alpha = s_2 \cdot \sin (R_2 - R_1) \quad (2)$$

$$(x_3 - x_2) \cdot \sin R_3 - (y_3 - y_2) \cdot \cos R_3 = s_2 \cdot \sin \beta = s_2 \cdot \sin (R_3 - R_2) \quad (3)$$

$$(x_3 - x_2) \cdot \sin R_2 - (y_3 - y_2) \cdot \cos R_2 = s_3 \cdot \sin \beta = s_3 \cdot \sin (R_3 - R_2) \quad (4)$$

$$(x_3 - x_1) \cdot \sin R_1 - (y_3 - y_1) \cdot \cos R_1 = s_3 \cdot \sin (\alpha + \beta) = s_3 \cdot \sin (R_3 - R_1) \quad (5)$$

$$(x_2 - x_1) \cdot \sin R_2 - (y_2 - y_1) \cdot \cos R_2 = s_1 \cdot \sin \alpha = s_1 \cdot \sin (R_2 - R_1) \quad (6)$$

$$(x_3 - x_1) \cdot \sin R_3 - (y_3 - y_1) \cdot \cos R_3 = s_1 \cdot \sin (\alpha + \beta) = s_1 \cdot \sin (R_3 - R_1) \quad (7)$$

### I. Punktbestimmung durch „Vorwärtseinschneiden“

Beim Vorwärtseinschneiden sind die Koordinaten der Standpunkte und die orientierten Richtungen zum Neupunkt gegeben. Werden diese Größen in die Gleichungen (2) und (7) eingesetzt, so bleiben die Seitenlängen  $s_1, s_2, s_3$  als Unbekannte über.

$$s_1 = \frac{(x_2 - x_1) \sin R_2 - (y_2 - y_1) \cos R_2}{\sin (R_2 - R_1)} \quad \dots \quad (8)$$

$$= \frac{(x_3 - x_1) \sin R_3 - (y_3 - y_1) \cos R_3}{\sin (R_3 - R_1)} \quad \dots \quad (9)$$

$$s_2 = \frac{(x_2 - x_1) \sin R_1 - (y_2 - y_1) \cos R_1}{\sin (R_2 - R_1)} \quad \dots \quad (10)$$

$$= \frac{(x_3 - x_2) \sin R_3 - (y_3 - y_2) \cos R_3}{\sin (R_3 - R_2)} \quad \dots \quad (11)$$

$$s_3 = \frac{(x_3 - x_2) \sin R_2 - (y_3 - y_2) \cos R_2}{\sin (R_3 - R_2)} \quad \dots \quad (12)$$

$$= \frac{(x_3 - x_1) \sin R_1 - (y_3 - y_1) \cos R_1}{\sin (R_3 - R_1)} \quad \dots \quad (13)$$

Damit sind die unbekanntenen Seitenlängen berechnet und der Neupunkt ist nach Polarkoordinaten bestimmt. Die Ermittlung der rechth. Koordinaten kann somit nach irgendeinem der bekannten Verfahren vor sich gehen. Da sich jede Seite aus zwei Schnitten berechnen läßt, ergeben sich bei einem durch drei (äußere) Richtungen gegebenen Vorwärtseinschnitt sechs Lösungen. Ganz allgemein ist die Anzahl  $z$  der theoretisch möglichen Lösungen eines durch  $n$  (äußere) Richtungen gegebenem Vorwärtseinschnittes

$$z = n \cdot (n - 1) \quad \dots \quad (14)$$

Beispielsweise wäre bei  $n = 6$   $z = 30$  (!), womit aber nicht gesagt sein soll, daß alle Lösungen fehlertheoretisch brauchbar sind.

a) *Der allgemeine Vorwärtseinschnitt*

Werden in die bekannte Formel zur Umwandlung der Polarkoordinaten in rechtw. Koordinaten

$$\gamma_N = \gamma_i + s_i \cdot \sin R_i \quad \text{und} \quad x_N = x_i + s_i \cdot \cos R_i$$

die vorhin nach Gl. (8) bis Gl. (13) erhaltenen Seiten eingesetzt, so erhält man als erste Lösung

$$\gamma_N = \gamma_1 + \sin R_1 \frac{(x_2 - x_1) \sin R_2 - (\gamma_2 - \gamma_1) \cos R_2}{\sin R_2 \cos R_1 - \sin R_2 \cos R_1} \quad \text{und} \quad \dots \quad (15)$$

$$x_N = x_1 + \cos R_1 \frac{(x_2 - x_1) \sin R_2 - (\gamma_2 - \gamma_1) \cos R_2}{\sin R_2 \cos R_1 - \sin R_2 \cos R_1} \quad \dots \quad (16)$$

Im folgenden sei nun eine Symbolik eingeführt, deren Zweckmäßigkeit sich insbesondere im zweiten Teil dieses Aufsatzes zeigen wird. Es bedeuten

$$S_i = k_i \cdot \sin R_i \quad \text{und} \quad C_i = k_i \cdot \cos R_i$$

Die Werte  $S_i$  und  $C_i$  bedeuten also im allgemeinen Sinus-, bzw. Cosinusprodukte, nur im speziellen Fall, bei  $k = 1$  sind  $S_i$  und  $C_i$  mit der Sinus-, bzw. Cosinusfunktion der entsprechenden Richtung identisch.

Die sechs Lösungen des durch drei Richtungen gegebenen Vorwärtseinschnittes lauten in der neuen Symbolik:

$\gamma_N = \gamma_1 + S_1 \frac{(x_2 - x_1) S_2 - (\gamma_2 - \gamma_1) C_2}{S_2 C_1 - C_2 S_1} = \gamma_1 + S_1 \frac{\text{I}}{\text{III}},$	$x_N = x_1 + C_1 \cdot \frac{\text{I}}{\text{III}} \dots \dots (17)$
$= \gamma_1 + S_1 \frac{(x_3 - x_1) S_3 - (\gamma_3 - \gamma_1) C_3}{S_3 C_1 - C_3 S_1} = \gamma_1 + S_1 \frac{\text{IV}}{\text{VI}},$	$= x_1 + C_1 \cdot \frac{\text{IV}}{\text{VI}} \dots \dots (18)$
$= \gamma_2 + S_2 \frac{(x_2 - x_1) S_1 - (\gamma_2 - \gamma_1) C_1}{S_2 C_1 - C_2 S_1} = \gamma_2 + S_2 \frac{\text{II}}{\text{III}},$	$= x_2 + C_2 \cdot \frac{\text{II}}{\text{III}} \dots \dots (19)$
$= \gamma_2 + S_2 \frac{(x_3 - x_2) S_3 - (\gamma_3 - \gamma_2) C_3}{S_3 C_2 - C_3 S_2} = \gamma_2 + S_2 \frac{\text{VII}}{\text{IX}},$	$= x_2 + C_2 \cdot \frac{\text{VII}}{\text{IX}} \dots \dots (20)$
$= \gamma_3 + S_3 \frac{(x_3 - x_1) S_1 - (\gamma_3 - \gamma_1) C_1}{S_3 C_1 - C_3 S_1} = \gamma_3 + S_3 \frac{\text{VIII}}{\text{VI}},$	$= x_3 + C_3 \cdot \frac{\text{VIII}}{\text{VI}} \dots \dots (21)$
$= \gamma_3 + S_3 \frac{(x_3 - x_2) S_2 - (\gamma_3 - \gamma_2) C_2}{S_3 C_2 - C_3 S_2} = \gamma_3 + S_3 \frac{\text{V}}{\text{IX}},$	$= x_3 + C_3 \cdot \frac{\text{V}}{\text{IX}} \dots \dots (22)$

b) *Die Sinusform des Vorwärtseinschnittes*

Für den speziellen Fall, daß  $S_i = \sin R_i$  und  $C_i = \cos R_i$  haben wir es mit der Sinusform des Vorwärtseinschnittes zu tun. Es ist dann zweckmäßig, für den Nenner den Sinus der Richtungsdifferenz zu nehmen. Die speziellen Eigenschaften der Sinusform werden zum Abschluß dieses Abschnittes noch erwähnt werden.

## c) Die Tangentenform des Vorwärtseinschnittes

Nimmt man für  $S_i = \tan R_i$  und  $C_i = 1$ , so wird aus Gl. (17)

$$x - x_1 = \frac{(x_2 - x_1) \tan R_2 - (y_2 - y_1)}{\tan R_2 - \tan R_1} \quad \dots (23)$$

und da  $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \tan R_1$  ist  $y - y_1 = (x - x_1) \tan R_1 \quad \dots (24)$

## d) Die Cotangentenform des Vorwärtseinschnittes

Ebenso wird aus Gl. (17) wenn  $C_i = \cot R_i$  und  $S_i = 1$

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1) \cot R_2 - (x_2 - x_1)}{\cot R_2 - \cot R_1} \quad \dots (25)$$

und da  $\frac{x - x_1}{y - y_1} = \cot R_1$  ist  $x - x_1 = (y - y_1) \cot R_1 \quad \dots (26)$

Heute wird allgemein die Tangenten- und Cotangentenform des Vorwärtseinschnittes angewendet. Als „Schnittmethoden“ wurden sowohl für Einfach- als auch Doppelrechenmaschinen rechenökonomisch vorzüglich arbeitende Rechenverfahren ausgearbeitet (Heckmann, Morpurgo usw.). Trotz der rechenökonomischen Vorzüge ist jedoch zu beachten, daß alle Rechenverfahren, die mit Tangenten, bzw. Cotangenten arbeiten, versagen, wenn die Funktionswerte gegen  $\infty$  gehen. Es besteht also eine Abhängigkeit von der Lage des Koordinatensystems. Glücklicherweise sind nun die Fälle, wo diese Verfahren versagen, sehr selten, trotzdem ist die Abhängigkeit vom Koordinatensystem ein theoretischer Mangel. Es ist daher durchaus möglich, daß mit zunehmender Weiterentwicklung der Rechenbehelfe zur Berechnung von Vorwärtsschnitten die Sinusform herangezogen werden wird. Unter anderem seien hier erwähnt Rechenggeräte nach dem Koorsystem von A v a n c i n i und die Funktionsrechenmaschinen von R a m s a y e r.

Im folgenden Rechenschema für Doppelrechenmaschine soll nun gezeigt werden, daß auch schon mit den heute zur Verfügung stehenden Rechenmaschinen p r i n z i p i e l l die Sinusform der Schnittmethode anwendbar ist und die Koordinaten des Neupunktes ohne zusätzliche Schreibaarbeit erhalten werden können wie bei den bekannten Verfahren von Heckmann und Morpurgo.

*Schnittmethode nach der Sinusform für Doppelrechenmaschine*

Geg.:  $P_1 (y_1, x_1), P_2 (y_2, x_2), R_1, R_2$

Ges.:  $P_N (y_N, x_N)$

Formeln:  $y_N = y_1 + s_1 \cdot \sin R_1$

$x_N = x_1 + s_1 \cdot \cos R_1$

$$s_1 = \frac{(x_2 - x_1) \sin R_2 + (y_1 - y_2) \cos R_2}{\sin (R_2 - R_1)}$$

Folge	Zählwerk	Einstellwerk		Resultatwerk
		links	rechts	
1	$x_2$ einkurbeln	0	0	0
2		sin $R_2$ einstellen		
3	bis $x_1$ kurbeln			erscheint $(x_2 - x_1) \sin R_2$
4		löschen		
5	$y_1$ einkurbeln			
6		cos $R_2$ einstellen		
7	bis $y_2$ kurbeln			erscheint $(x_2 - x_1) \sin R_2$ + $(y_1 - y_2) \cos R_2$
8	löschen	löschen, sin $(R_2 - R_1)$ einst.		erscheint $(x_2 - x_1) \sin R_2$ + $(y_1 - y_2) \cos R_2$
9	erscheint $s_1$			leer kurbeln
10	bleibt	löschen		links $y_1$ , rechts $x_1$ cindreuen
11	bleibt	sin $R_1$	cos $R_1$ einst.	
12	leer kurbeln			erscheint $y_N$ und $x_N$

## II. Punktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden

Sind die Koordinaten von drei Festpunkten  $P_1, P_2$  und  $P_3$  bekannt sowie die Differenzen  $(\alpha, \beta)$  der Richtungen vom Neupunkt  $P$  zu diesen drei Punkten, so lassen sich die Neupunktkoordinaten durch „Rückwärtseinschneiden“ berechnen.

Auf die Gleichungen (2) bis (7) zurückgreifend, handelt es sich jetzt darum, die Unbekannten  $R_1, R_2$  und  $R_3$  aus den gegebenen Größen  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$  und  $\alpha, \beta, (\alpha + \beta)$  zu berechnen. Wenn dies gelingt, so kann die weitere Berechnung der Neupunktkoordinaten nach irgendeinem der bekannten Verfahren des „Vorwärtseinschneidens“ durchgeführt werden.

Und nun zur Berechnung von  $R_1$ :

Da  $(R_2 - R_1) = \alpha$  und  $(R_3 - R_2) = \beta$  ist nach Gl. (10) und (11)

$$s_2 = \frac{(x_2 - x_1) \sin R_1 - (y_2 - y_1) \cos R_1}{\sin \alpha} = \frac{(x_3 - x_2) \sin R_3 - (y_3 - y_2) \cos R_3}{\sin \beta}$$

$$\text{und} \quad \underbrace{(x_2 - x_1) \sin \beta}_{a} \sin R_1 - \underbrace{(y_2 - y_1) \sin \beta}_{b} \cos R_1 = \dots (27a)$$

$$= \underbrace{(x_3 - x_2) \sin \alpha}_{c} \sin R_3 - \underbrace{(y_3 - y_2) \sin \alpha}_{d} \cos R_3$$

Wenn  $a = m \cdot \cos \varphi$ ,  $b = m \cdot \sin \varphi$ ,  $c = n \cdot \cos \psi$  und  $d = n \cdot \sin \psi$

$$\text{so ist} \quad m = \sin \beta \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sin \beta \cdot s_{12}$$

$$n = \sin \alpha \cdot s_{23}$$

$$\cos \varphi = \frac{(x_2 - x_1)}{s_{12}} \quad \sin \varphi = \frac{(y_2 - y_1)}{s_{12}}$$

$$\cos \psi = \frac{(x_3 - x_2)}{s_{23}} \quad \sin \psi = \frac{(\gamma_3 - \gamma_2)}{s_{23}}$$

$$\frac{m}{n} = \lambda = \frac{s_{12} \sin \beta}{s_{23} \sin \alpha}$$

Gl. (27a) geht dann über in

$$m \cdot \sin (R_1 - \varphi) = n \cdot \sin (R_3 - \psi) \quad \text{und}$$

$$\frac{\sin (R_3 - \psi)}{\sin (R_1 - \varphi)} = \frac{m}{n} = \lambda$$

nun ist aber  $R_3 = R_1 + (\alpha + \beta)$

$$R_3 - \psi = R_1 + (\alpha + \beta) - \psi = R_1 - [\psi - (\alpha + \beta)] = R_1 - \mu, \quad \mu = \psi - (\alpha + \beta) = \psi - \varepsilon$$

$$\frac{\sin (R_3 - \psi)}{\sin (R_1 - \varphi)} = \frac{\sin (R_1 - \mu)}{\sin (R_1 - \varphi)} = \lambda = \frac{\sin R_1 \cos \mu - \cos R_1 \sin \mu}{\sin R_1 \cos \varphi - \cos R_1 \sin \varphi}$$

Zähler und Nenner durch  $\sin R_1$  durchdividiert ergibt

$$\lambda = \frac{\cos \mu - \cot R_1 \sin \mu}{\cos \varphi - \cot R_1 \sin \varphi}, \quad \lambda \cos \varphi - \lambda \cot R_1 \sin \varphi = \cos \mu - \cot R_1 \sin \mu$$

$$\cot R_1 (\lambda \sin \varphi - \sin \mu) = \lambda \cos \varphi - \cos \mu \quad \text{und}$$

$$\cot R_1 = \frac{\lambda \cos \varphi - \cos \mu}{\lambda \sin \varphi - \sin \mu} \quad \dots (27b)$$

$$\cos \mu = \cos (\psi - \varepsilon) = \cos \psi \cos \varepsilon + \sin \psi \sin \varepsilon = \frac{(x_3 - x_2)}{s_{23}} \cos \varepsilon + \frac{(\gamma_3 - \gamma_2)}{s_{23}} \sin \varepsilon$$

$$\sin \mu = \sin (\psi - \varepsilon) = \sin \psi \cos \varepsilon - \cos \psi \sin \varepsilon = \frac{(\gamma_3 - \gamma_2)}{s_{23}} \cos \varepsilon - \frac{(x_3 - x_2)}{s_{23}} \sin \varepsilon$$

$$\cot R_1 = \frac{\frac{s_{12}}{s_{23}} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \frac{(x_2 - x_1)}{s_{12}} - \frac{(x_3 - x_2)}{s_{23}} \cos \varepsilon - \frac{(\gamma_3 - \gamma_2)}{s_{23}} \sin \varepsilon}{\frac{s_{12}}{s_{23}} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)}{s_{12}} - \frac{(\gamma_3 - \gamma_2)}{s_{23}} \cos \varepsilon + \frac{(x_3 - x_2)}{s_{23}} \sin \varepsilon} =$$

$$\frac{(x_2 - x_1) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin \varepsilon} - (x_3 - x_2) \cot \varepsilon - (\gamma_3 - \gamma_2)}{(\gamma_2 - \gamma_1) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin \varepsilon} - (\gamma_3 - \gamma_2) \cot \varepsilon + (x_3 - x_2)}$$

da  $\varepsilon = \alpha + \beta$  und  $\beta = \varepsilon - \alpha$  ist

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin \varepsilon} = \frac{\sin (\varepsilon - \alpha)}{\sin \alpha \sin \varepsilon} = \frac{\sin \varepsilon \cos \alpha - \cos \varepsilon \sin \alpha}{\sin \alpha \sin \varepsilon} = (\cot \alpha - \cot \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \cot R_1 &= \frac{(x_2 - x_1) \cot \alpha - (x_2 - x_1) \cot \varepsilon - (x_3 - x_2) \cot \varepsilon - (y_3 - y_2)}{(y_2 - y_1) \cot \alpha - (y_2 - y_1) \cot \varepsilon - (y_3 - y_2) \cot \varepsilon + (x_3 - x_2)} \\ &= \frac{(x_2 - x_1) \cot \alpha - (x_2 - x_1 + x_3 - x_2) \cot \varepsilon - (y_3 - y_2)}{(y_2 - y_1) \cot \alpha - (y_2 - y_1 + y_3 - y_2) \cot \varepsilon + (x_3 - x_2)} \\ &= \frac{(x_2 - x_1) \cot \alpha - (x_3 - x_1) \cot \varepsilon - (y_3 - y_2)}{(y_2 - y_1) \cot \alpha - (y_3 - y_1) \cot \varepsilon + (x_3 - x_2)} \end{aligned}$$

In analoger Weise ließen sich nun auch  $\cot R_2$  und  $\cot R_3$  berechnen. Eleganter kommt man aber durch zyklische Vertauschung der Indices zum Ziel, wobei es notwendig ist,  $\gamma = 400^\circ - (\alpha + \beta) = 400^\circ - \varepsilon$  und  $\cot \gamma = -\cot \varepsilon$  einzuführen. Man erhält dann als endgültige Gleichungen:

$$\cot R_1 = \frac{(x_2 - x_1) \cot \alpha + (x_3 - x_1) \cot \gamma - (y_3 - y_2)}{(y_2 - y_1) \cot \alpha + (y_3 - y_1) \cot \gamma + (x_3 - x_2)} = \frac{C_1}{S_1} \quad \dots (28)$$

$$\cot R_2 = \frac{-(x_3 - x_2) \cot \beta + (x_2 - x_1) \cot \alpha - (y_3 - y_1)}{-(y_3 - y_2) \cot \beta + (y_2 - y_1) \cot \alpha + (x_3 - x_1)} = \frac{C_2}{S_2} \quad \dots (29)$$

$$\cot R_3 = \frac{-(x_3 - x_1) \cot \gamma - (x_3 - x_2) \cot \beta - (y_2 - y_1)}{-(y_3 - y_1) \cot \gamma - (y_3 - y_2) \cot \beta + (x_2 - x_1)} = \frac{C_3}{S_3} \quad \dots (30)$$

Damit ist die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens prinzipiell gelöst, denn mit Hilfe der nun bekannten  $\cot$ -Werte lassen sich die Neupunktkoordinaten nach einem beliebigen Verfahren des Vorwärtseinschneidens (Heckmann, Morpurgo usw.) berechnen.

Man kann aber das Verfahren konsequent weiterführen und erhält, da entsprechend

$$\cot R_i = \frac{C_i}{S_i}$$

nun auch die  $C$ - und  $S$ -Werte bekannt sind, die sechs Lösungen des durch drei (innere) Richtungen gegebenen Rückwärtseinschnitts *identisch* den Gleichungen (17) bis (22).

$$y = y_1 + S_1 \frac{(x_2 - x_1) S_2 - (y_2 - y_1) C_2}{S_2 C_1 - C_2 S_1} = y_1 + S_1 \frac{\text{I}}{\text{III}}, \quad \left. \begin{array}{l} x_N = x_1 + C_1 \frac{\text{I}}{\text{III}} \dots (17) \end{array} \right\}$$

$$= y_1 + S_1 \frac{(x_3 - x_1) S_3 - (y_3 - y_1) C_3}{S_3 C_1 - C_3 S_1} = y_1 + S_1 \frac{\text{IV}}{\text{VI}}, \quad \left. \begin{array}{l} = x_1 + C_1 \frac{\text{IV}}{\text{VI}} \dots (18) \end{array} \right\}$$

$$= y_2 + S_2 \frac{(x_2 - x_1) S_1 - (y_2 - y_1) C_1}{S_2 C_1 - C_2 S_1} = y_2 + S_2 \frac{\text{II}}{\text{III}}, \quad \left. \begin{array}{l} = x_2 + C_2 \frac{\text{II}}{\text{III}} \dots (19) \end{array} \right\}$$

$$= y_2 + S_2 \frac{(x_3 - x_2) S_3 - (y_3 - y_2) C_3}{S_3 C_2 - C_3 S_2} = y_2 + S_2 \frac{\text{VII}}{\text{IX}}, \quad \left. \begin{array}{l} = x_2 + C_2 \frac{\text{VII}}{\text{IX}} \dots (20) \end{array} \right\}$$

$$= y_3 + S_3 \frac{(x_3 - x_1) S_1 - (y_3 - y_1) C_1}{S_3 C_1 - C_3 S_1} = y_3 + S_3 \frac{\text{VIII}}{\text{VI}}, \quad \left. \begin{array}{l} = x_3 + C_3 \frac{\text{VIII}}{\text{VI}} \dots (21) \end{array} \right\}$$

$$= y_3 + S_3 \frac{(x_3 - x_2) S_2 - (y_3 - y_2) C_2}{S_3 C_2 - C_3 S_2} = y_3 + S_3 \frac{\text{V}}{\text{IX}}, \quad \left. \begin{array}{l} = x_3 + C_3 \frac{\text{V}}{\text{IX}} \dots (22) \end{array} \right\}$$

Jetzt wird also der große Vorteil der vorhin eingeführten Symbolik besonders augenfällig. Rechenökonomisch wäre es nun nicht zweckmäßig, die  $C$ - und  $S$ -Werte der Cotangenten der gegebenen drei (inneren) Richtungen voneinander unabhängig nach Gl. (28), (29) und (30) zu berechnen. Vielmehr ist der Gedanke naheliegend, die  $C$ -, bzw.  $S$ -Werte nur für eine Richtung zu berechnen und die übrigen in Anwendung der Beziehungen

$$R_2 - R_1 = \alpha \quad \text{und} \quad R_3 - R_2 = \beta$$

zu ermitteln.

$$\text{Da } R_1 = R_2 - \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{ist } \cot R_1 &= \cot (R_2 - \alpha) = \frac{\cot R_2 \cot \alpha + 1}{\cot \alpha - \cot R_2} = \\ &= \frac{\frac{C_2}{S_2} \cot \alpha + 1}{\cot \alpha - \frac{C_2}{S_2}} = \frac{C_2 \cot \alpha + S_2}{S_2 \cot \alpha - C_2} = \frac{C_1}{S_1} \dots (31) \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise erhält man

$$\begin{aligned} \cot R_3 &= \cot (R_2 + \beta) = \frac{\cot R_2 \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot R_2} = \frac{\frac{C_2}{S_2} \cot \beta - 1}{\cot \beta + \frac{C_2}{S_2}} \\ &= \frac{C_2 \cot \beta - S_2}{S_2 \cot \beta + C_2} = \frac{C_3}{S_3} \dots (32) \end{aligned}$$

Wenn man von der Herleitung absieht, lehnt sich das angegebene Verfahren eng an die sogenannte Cassini-Methode an, besonders wenn man noch die Produktdifferenz III =  $S_2 C_1 - C_2 S_1$  aus Gl. (17) und (19) durch die rechenökonomisch vorteilhaftere Quadratsumme  $S_2^2 + C_2^2$  ersetzt, da nach Gl. (31) und (32)

$$C_1 = C_2 \cot \alpha + S_2 \quad \text{und} \quad S_1 = S_2 \cot \alpha - C_2 \quad \text{ist}$$

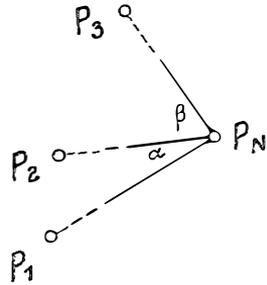
$$\begin{aligned} S_2 C_1 - C_2 S_1 &= S_2 (C_2 \cot \alpha + S_2) - C_2 (S_2 \cot \alpha - C_2) = \\ &= S_2 C_2 \cot \alpha + S_2^2 - S_2 C_2 \cot \alpha + C_2^2 = S_2^2 + C_2^2 \dots (33) \end{aligned}$$

In der Praxis wird man natürlich niemals alle theoretisch möglichen sechs Lösungen des einfachen Rückwärtsschnittes berechnen. Ein zweites Resultat wird jedoch, wenn es nicht einem erheblich größeren Rechenaufwand verbunden ist, für Kontrollzwecke von großem Vorteil sein. Aus diesem Beweggrund wurde daher nachstehendes Rechenschema entworfen, in dem die Gl. (17) und (19) mit der Abänderung des Nenners nach Gl. (33) Anwendung finden.

**Rückwärtseinschneiden:**

P<sub>1</sub>: ..... P<sub>2</sub>: .....

P<sub>3</sub>: ..... P<sub>N</sub>: .....



$\alpha$	39° 3667	$\cot \alpha$	+	1·405 576
$\beta$	12° 9438	$\cot \beta$	+	4·850 377

$Y_N$	-	222·16	$X_N$	-	332·62
-------	---	--------	-------	---	--------

$S_1 \cdot I/III$	+	338·60	$C_1 \cdot I/III$	-	34·48
$Y_1$	-	560·76	$X_1$	-	298·14
$Y_3$	-	432·50	$X_3$	-	54·56
$Y_2$	-	426·48	$X_2$	-	153·47

$S_2 \cdot II/III$	+	204·32	$C_2 \cdot II/III$	-	179·15
--------------------	---	--------	--------------------	---	--------

$Y_N$	-	222·16	$X_N$	-	332·62
-------	---	--------	-------	---	--------

$\gamma_1 \cdot \cot \alpha$	+	188·741	$x_1 \cdot \cot \alpha$	+	203·345
$-\gamma_3 \cdot \cot \beta$	+	29·199	$-\gamma_3 \cdot \cot \beta$	-	479·751
$\Sigma$			$\Sigma$	-	276·406
$+x_2$	+	243·580	$-\gamma_2$	-	128·260
$S_2$	+	461·520	$C_2$	-	404·666
$C_2 \cdot \cot \alpha$	-	568·789	$S_2 \cdot \cot \alpha$	+	648·701
$C_1 = C_2 \cot \alpha + S_2$	-	107·269	$S_1 = S_2 \cdot \cot \alpha - C_2$	+	1053·367
$x_1 \cdot S_2$	+	66·768·1	$x_1 \cdot S_1$	+	152·390·6
$-\gamma_1 \cdot C_2$	+	54·338·6	$-\gamma_1 \cdot C_1$	+	14·404·1
I	+	121·106·7	II	+	166·794·7

$\gamma_1 = Y_2 - Y_1$	+	134·28	$x_1 = X_2 - X_1$	+	144·67
$\gamma_2 = Y_3 - Y_1$	+	128·26	$x_2 = X_3 - X_1$	+	243·58
$\gamma_3 = Y_3 - Y_2$	+	6·02	$x_3 = X_3 - X_2$	+	98·91

$S_2^2$	+	163·754·6	I : III	+	0·321 447
$+ C_2^2$	+	213·000·7	II : III	+	0·442 714
III	+	376·755·3	$S_i : C_i = \tan u_i$		

*Zusammenstellung*

Gemeinsame Formeln:

$$\gamma_N = \gamma_1 + S_1 \frac{\Delta x S_2 - \Delta y C_2}{S_2 C_1 - C_2 S_1}, \quad x_N = x_1 + C_1 \frac{\Delta x S_2 - \Delta y C_2}{S_2 C_1 - C_2 S_1} \dots \dots \dots (17)$$

Im speziellen Fall haben  $S_i$  und  $C_i$  nachstehend angeführte Bedeutung:

	<i>Allgem. Vorwärtseinschnitt</i>			<i>Rückwärtseinschnitt</i>
	Sinusform	Tangensform Heckmann,	Cotangentenform Morpurgo	$Y_2 - Y_1 = \gamma_1, \quad X_2 - X_1 = x_1$ $Y_3 - Y_1 = \gamma_2, \quad X_3 - X_1 = x_2$ $Y_3 - Y_2 = \gamma_3, \quad X_3 - X_2 = x_3$
<b>S<sub>1</sub></b> =	sin R <sub>1</sub>	tan R <sub>1</sub>	1	$S_2 \cot \alpha - C_2$
<b>C<sub>1</sub></b> =	cos R <sub>1</sub>	1	cot R <sub>1</sub>	$C_2 \cot \alpha + S_2$
<b>S<sub>2</sub></b> =	sin R <sub>2</sub>	tan R <sub>2</sub>	1	$\gamma_1 \cot \alpha - \gamma_3 \cot \beta + x_2$
<b>C<sub>2</sub></b> =	cos R <sub>2</sub>	1	cot R <sub>2</sub>	$x_1 \cot \alpha - x_3 \cot \beta - \gamma_2$
Anmerkg.	$S_2 C_1 - C_2 S_1 =$ $= \sin (R_2 - R_1)$	$x_N - x_1 =$ $\frac{(x_2 - x_1) \tan R_2 - (\gamma_2 - \gamma_1)}{\tan R_2 - \tan R_1}$ $\gamma_N - \gamma_1 = (x_N - x_1) \tan R_1$	$\gamma_N - \gamma_1 =$ $\frac{(\gamma_2 - \gamma_1) \cot R_2 - (x_2 - x_1)}{\cot R_2 - \cot R_1}$ $x_N - x_1 = (\gamma_N - \gamma_1) \cot R_1$	$(S_2 C_1 - C_2 S_1)$ kann auch durch $(S_2^2 + C_2^2)$ ersetzt werden.

### III. Zusammenfassung

Vorliegender Aufsatz ist ein Auszug aus einer umfangreicheren Arbeit, betitelt „Vorschläge zur Koordinatenrechnung“, die im August 1950 eingereicht wurde.

Vom Sinussatz ausgehend wurden zunächst lediglich durch goniometrische Umformungen die einzelnen Formen des Vorwärtseinschneidens (Sinus-, Tangens- und Cotangensform) abgeleitet. Dabei wurde auf den theoretischen Vorzug der Sinusform zufolge deren *U n a b h ä n g i g k e i t v o m K o o r d i n a t e n - s y s t e m* hingewiesen. Durch Rückführung des Rückwärtseinschneidens auf das Vorwärtseinschneiden wurde es möglich, die gleichen Endformeln für beide Einschneidemethoden zu verwenden. Durch die Einführung einer besonderen Symbolik (*S*- und *C*-Werte) wurde der Vergleich der verschiedenen Rechenverfahren wesentlich erleichtert und durch die zyklische Anordnung der abgeleiteten Formeln Formeln das Vorhandensein von  $n \cdot (n - 1)$  Lösungen für jeden durch  $n$  Richtungen gegebenen Vorwärts- u n d Rückwärtseinschnitt vor Augen geführt.

Die Besprechung des in diesem Auszug nicht enthaltenen Abschnitts über die Ermittlung der Rechtwinkelkoordinaten aus Polarkoordinaten sowie die Ableitung des Bogenschnitts soll einem späteren Artikel vorbehalten sein.

## Festschrift Eduard Doležal

*zum neunzigsten Geburtstag*

Um ihrem berühmten ehemaligen Lehrer Hofrat Dr. mult. h. c. E. Doležal zuseinem 90. Geburtsfest am 2. Mai 1952 eine besondere Ehrung zu bereiten, die ihn nicht aus dem Gleichmaß seines gewohnten Lebens bringen sollte, beschloß eine Gruppe seiner Schüler und Freunde die Herausgabe einer Festschrift, begleitet von einem ausführlichen Lebensbild des geliebten Lehrers.

Es bildete sich ein Komitee aus ihrem Kreise, das die Verwirklichung dieses Wunsches in die Tat umsetzte. Diesem Komitee gehörten an: Dipl.-Ing. Dr. H. R o h r e r, o. Professor der Technischen Hochschule Wien, als Vorsitzender; Dipl.-Ing. Dr. A. B a r v i r, Oberrat, Abteilungsleiter im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen; Dipl.-Ing. L. C a n d i d o, Senatsrat, Leiter der Vermessungsabteilung des Wiener Stadtbauamtes; Dipl.-Ing. Dr. F. H a u e r, o. Professor der Technischen Hochschule Wien, Ingenieurkonsulent; Dip.-Ing. Dr. K. H u b e n y, Professor der Technischen Hochschule Graz; Dr. K. L e d e r s t e g e r, Oberrat im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Privatdozent der Technischen Hochschule Wien; Dipl.-Ing. K. L e g o, Präsident des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen i. R., Präsident der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung; Dipl.-Ing. Dr. F. M e i x n e r, Ingenieurkonsulent; Ing. K. N e u m a i e r, w. Hofrat, Hauptabteilungsleiter im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen; Dipl.-Ing. Dr. F. P o n g r a t z, o. Professor der Technischen Hochschule Wien, Präsident der Ingenieurkammer für Wien, Niederösterreich und das Burgenland; Dipl.-Ing. Dr. jur. F. S c h i f f m a n n, w. Hofrat, Hauptabteilungsleiter im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen;