Über die Grundfigur und den Längsfehler in Streckenketten

Günther Schelling [1]

[1] *TH Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **40** (5, 6), S. 140–146, 187–192

1952

Über die Grundfigur und den Längsfehler in Streckenketten

Von G. Schelling, T. H. Graz

Die „Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen" veröffentlichte bereits früher einen Beitrag [1] über die Ausgleichung von Dreiecksnetzen mit direkt gemessenen Seiten. Auf diese Arbeit aufbauend sollen hier einfach überbestimmte Zentralsysteme auf ihre Eignung als Grundfigur einer Streckenkette untersucht werden.

Die Untersuchung berücksichtigt die meßtechnischen Verhältnisse bei Anwendung des Radar-Prinzips oder bei der Distanzmessung mittels hochfrequent modulierten Lichtes (Bergstrand-Methode). Bei diesen Methoden ist der Meßfehler innerhalb des Meßbereiches im wesentlichen unabhängig von der Länge der zu messenden Strecke. Daher ist bei der Ausgleichung eines Systems sämtlichen gemessenen Seiten dasselbe Gewicht zuzuordnen.

Um einen Genauigkeitsvergleich verschiedener Einzelfiguren und Kettenformen zu ermöglichen, wird eine längste direkt meßbare Distanz „l" angenommen, welche der längsten direkt gemessenen Seite einer Einzelfigur gleichgesetzt wird.

Aus Raumersparnisgründen bringen wir die bei der Behandlung verschiedener Einzelsysteme und Kettenformen sich wiederholenden Ableitungen nur einmal ausführlich und beschränken uns im weiteren auf die Angabe der Resultate sowie deren Diskussion.

A. *Allgemeines*

Ein geschlossenes Zentralsystem, in dem sämtliche Seiten gemessen sind, ist einfach überbestimmt (Fig. 1). Wir formulieren die für dieses System bestehende Bedingung:

$$F = [\alpha_i]_{i=1}^{i=n} - 2\pi = 0. \tag{1a}$$

Mit $\alpha_i = \arc\cos \dfrac{r_{i-1}^2 + r_i^2 - s_i^2}{2\, r_{i-1}\, r_i}$ geht diese Bedingungsgleichung für die Winkel α_i in eine solche für die gemessenen Seiten r_i und s_i über:

$$F = \left[\operatorname{arc\,cos} \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2 - s_i^2}{2\, r_{i-1}\, r_i}\right]_{i=1}^{i=n} - 2\pi = 0. \tag{1 b}$$

Macht man die Bedingungsgleichung (1 b) linear, so erhält man die Koeffizienten der Verbesserungen $v_{r,\,i}$ und $v_{s,\,i}$ als die Differentialquotienten $\dfrac{\partial F}{\partial r_i}$ und $\dfrac{\partial F}{\partial s_i}$ in der Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r_i} &= a_{r,\,i} = \frac{r_{i-1} \cos \alpha_i - r_i}{r_{i-1}\, r_i \sin \alpha_i} + \frac{r_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - r_i}{r_i\, r_{i+1} \sin \alpha_{i+1}} \\ \frac{\partial F}{\partial s_i} &= a_{s,\,i} = \frac{s_i}{r_{i-1}\, r_i \sin \alpha_i}. \end{aligned} \tag{2a}$$

Der Nenner des ersten Terms von $a_{r,\,i}$ ist gleich dem mit dem Vorzeichen von $\sin \alpha_i$ bezeichneten doppelten Flächeninhalt des von den Seiten r_{i-1}, r_i und s_i gebildeten Dreieckes:

$$r_{i-1} \,.\, r_i \,.\, \sin \alpha_i = \operatorname{sign} \sin \alpha_i \, 2 \, J_i \quad \text{und analog}$$
$$r_i \,.\, r_{i+1} \,.\, \sin \alpha_{i+1} = \operatorname{sign} \sin \alpha_{i+1} \, 2 \, J_{i+1}.$$

Damit erhalten die Gleichungen (2a) die Form:

$$a_{r,\,i} = \frac{r_{i-1} \cos \alpha_i - r_i}{\operatorname{sign} \sin \alpha_i \, 2 \, J_i} + \frac{r_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - r_i}{\operatorname{sign} \sin \alpha_{i+1} \, 2 \, J_{i+1}}$$
$$a_{s,\,i} = \frac{s_i}{\operatorname{sign} \sin \alpha_i \, 2 \, J_i}. \tag{2b}$$

Für die allgemeine Behandlung symmetrischer Figuren sowie für die numerische Bearbeitung sämtlicher Zentralsysteme (Z. S.) ist es vorteilhaft, die geometrische Deutung der Koeffizienten auszuwerten. Wird der Richtung $\overrightarrow{P_i O}$ in Fig. 2 ein negativer Sinn zugeordnet, so ist neben dem absoluten Betrag auch das Vorzeichen der Koeffizienten bestimmt, da $\operatorname{sign} \sin \alpha \; 1 = \pm 1$ für $\alpha \lesseqgtr 180^0$ auch der Figur entnommen werden kann.

B. *Einzelfiguren*

Um die Auswahl einer Grundfigur zu ermöglichen und die günstigste Art der Aneinanderreihung derselben zu einer Kette zu finden, wird vorerst das Gewicht P verschiedener Seiten mehrerer Einzelfiguren nach der Ausgleichung bestimmt.

Für eine Funktion der nach bedingten Beobachtungen ausgeglichenen Meßgrößen gleichen Gewichtes gilt unter Verweis auf [2] die Gleichung:

$$\frac{1}{P} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf.\,1]^2}{[bb.\,1]} - \frac{[cf.\,2]^2}{[cc.\,2]} - \dots \quad . \tag{3}$$

a) *Regelmäßige Zentralsysteme*

Als regelmäßiges Zentralsystem Z_n wird hier ein in sich geschlossenes und um einen Zentralpunkt angeordnetes System von n gleichschenkligen Dreiecken verstanden. In ihm gelten folgende Beziehungen:

$$s_i = s \qquad r_i = r = \frac{s\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\cos\alpha}} \qquad \alpha_i = \alpha = \frac{2\,\pi}{n}$$
$$J_i = J \qquad \operatorname{sign}\sin\alpha = + \text{ für } n > 2.$$

Mit diesen Vereinfachungen bilden wir die Koeffizienten nach den Gleichungen (2b) und unter Benützung von Fig. 2:

$$a_{r,\,i} = \frac{r\,(\cos\alpha - 1)}{\operatorname{sign}\sin\alpha \; J} = -\frac{s\sqrt{2}\;\sqrt{1-\cos\alpha}}{\operatorname{sign}\sin\alpha \; 2J}$$
$$a_{s,\,i} = \frac{s}{\operatorname{sign}\sin\alpha \, 2 \, J}. \tag{4}$$

Die Koeffizientensummen lauten dann:

$$[a_r\, a_r] = \frac{n\, s^2}{2\, J^2}(1 - \cos\alpha) \qquad [a_s\, a_s] = \frac{n\, s^2}{4\, J^2}$$

$$[a\, a] = [a_r\, a_r] + [a_s\, a_s] = \frac{n\, s^2}{4\, J^2}(3 - 2\cos\alpha).$$

Nun bestimmen wir das Gewicht einer Außenseite s und einer Radialseite r des regelmäßigen Zentralsystems Z_n nach Gleichung (3).

$F = s \qquad [ff] = 1 \qquad [af] = a_s \qquad [af]^2 = a_s^2$

$$\frac{1}{P(s)} = 1 - \frac{s^2}{4\, J^2} \cdot \frac{4\, J^2}{n\, s^2 (3 - 2\cos\alpha)} = 1 - \frac{1}{n\left(3 - 2\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)} \tag{5}$$

$F = r \qquad [ff] = 1 \qquad [af] = a_r \qquad [af]^2 = a_r^2$

$$\frac{1}{P(r)} = 1 - \frac{s^2 (1 - \cos\alpha)}{2\, J^2} \cdot \frac{4\, J^2}{n s^2 (3 - 2\cos\alpha)} = 1 - \frac{2\left(1 - \cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}{n\left(3 - 2\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}. \tag{6}$$

Wegen $J = 0$ für $n \leq 2$, gelten die Gleichungen (5) und (6) nur für $n \geq 3$.

Nun fragen wir nach jenem regelmäßigen Zentralsystem, in welchem das Gewicht einer Außenseite s oder das Gewicht einer Radialseite r ein Maximum wird. Damit $P(s)$ und $P(r)$ ein Maximum bilden, müssen zufolge der Gleichungen (5) und (6) die Ausdrücke

$$n\left(3 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\right) \equiv x(n) \quad \text{und}$$

$$\frac{n\left(3 - 2\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}{2\left(1 - \cos\dfrac{2\pi}{n}\right)} \equiv \frac{x(n)}{y(n)}$$ zu einem Minimum werden, wobei der

Wert von n ganzzahlig, positiv und ≥ 3 sein muß. In Tabelle 1 sind für eine Anzahl von Zentralsystemen Z_n die Zahlenwerte der Funktionen $x(n)$, $\dfrac{x(n)}{y(n)}$ und die dazugehörigen reziproken Gewichtszahlen $\dfrac{1}{P(s)}$ und $\dfrac{1}{P(r)}$ angegeben.

Für die praktische Verwendung können wir n nach oben mit 6 beschränken. In dem verbleibenden Bereich mit $3 \leq n \leq 6$ bleibt das Gewicht einer Außenseite nach der Ausgleichung praktisch konstant, während das Gewicht der Radialseiten mit wachsendem n kleiner wird. Zudem ist beinahe im ganzen betrachteten Bereich das Gewicht der Radialseiten größer als das Gewicht der Außenseiten.

n	x	$\frac{1}{P(s)}$	y	$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{P(r)}$
3	12.00	0.916	3.00	4.00	0.75
4	12.00	0.916	2.00	6.00	0.83
5	11.91	0.916	1.38	8.63	0.88
6	12.00	0.916	1.00	12.00	0.92
10	13.80	0.927	0.36	38.3	0.97

Tabelle 1

Bei den regelmäßigen Zentralsystemen Z_n mit geradzahligem n kann auch die Funktion $r_i + r_j$ von Bedeutung sein, da je zwei Radialseiten in einer Richtung liegen.

$$F = r_i + r_j \qquad [ff] = 2 \qquad [af] = 2\, a_r \qquad [af]^2 = 4\, a_r{}^2$$

$$\frac{1}{P(F)} = 2 - 4\,\frac{y}{x} = 2 - \frac{8\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right)}{n\left(3 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

$\frac{1}{P(F)}$ nimmt im Z_4 den Wert 1.33 und im Z_6 den Wert 1.68 an; dies bedeutet — zumal im Z_4 — eine beträchtliche Gewichtserhöhung.

b) *Das Zentralsystem nach Figur 5*

Wir bestimmen sogleich das Gewicht der Funktion $F = s_5 + s_{12}$.

Die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_i &= +\frac{s}{2\,J} \quad \text{für } i = 1,\ 2,\ 10,\ 11; \\ &= -\frac{s}{2\,J} \quad \text{für } i = 3,\ 4,\ 8,\ 9; \\ &= +\frac{s\sqrt{2}}{2\,J} \quad \text{für } i = 6,\ 7; \\ &= -\frac{s\sqrt{2}}{2\,J} \quad \text{für } i = 5,\ 12. \end{aligned} \tag{7}$$

Damit berechnen wir die Gewichtsfunktion:

$$\frac{1}{P(F)} = 2 - \frac{2\,s^2}{J^2} \cdot \frac{J^2}{4\,s^2} = \frac{3}{2}.$$

c) *Der Rhombus mit Diagonalen (Figur 6)*

Wir stellen die Bedingungsgleichung für dieses einfach überbestimmte System im Punkte 0 auf und ermitteln die Koeffizienten als Funktion der Diagonale d_1 und des Winkels α_1.

Allgemein gilt:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha,\ \ \alpha_3 = 360^0 - 2\alpha;\ \ J_1 = J_2 = J_3 = J;$$

$$r_1 = d_1,\ r_2 = r_3 = s_1 = s_2 = \frac{d_1}{2\cos\alpha},\ \ s_3 = d_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Die Koeffizienten bestimmen wir nach der graphischen Methode (Fig. 2) und erhalten:

$$a_{r,1} = -\frac{d_1}{2\,J}\quad,\quad a_{r,2} = \frac{d_1}{4\cos\alpha\,J}\quad,\quad a_{r,3} = \frac{d_1}{4\cos\alpha\,J}$$

$$a_{s,1} = \frac{d_1}{4\cos\alpha\,J}\,,\quad a_{s,2} = \frac{d_1}{4\cos\alpha\,J}\quad,\quad a_{s,3} = -\frac{d_1\operatorname{tg}\alpha}{2\,J}.$$

Nunmehr bezeichnen wir Koeffizienten gleichen numerischen Wertes mit einem gemeinsamen Index:

$$\begin{aligned} a_{r,2} = a_{r,3} = a_{s,1} = a_{s,2} = a_s &= \frac{d_1}{4\cos\alpha\,J} \\ a_{r,1} = a_{d,1} &= -\frac{d_1}{2\,J} \\ a_{s,3} = a_{d,2} &= -\frac{d_1\operatorname{tg}\alpha}{2\,J}. \end{aligned} \tag{8}$$

Für das Gewicht der einzelnen Strecken des Rhombus erhalten wir:

$$F = d_1 \qquad \frac{1}{P(d_1)} = 1 - \frac{d_1^2}{4\,J^2}\cdot\frac{2\cos^2\alpha\,J^2}{d_1^2} = 1 - \frac{\cos^2\alpha}{2}$$

$$F = d_2 \qquad \frac{1}{P(d_2)} = 1 - \frac{d_1^2\operatorname{tg}^2\alpha}{4\,J^2}\cdot\frac{2\cos^2\alpha\,J^2}{d_1^2} = 1 - \frac{\sin^2\alpha}{2}$$

$$F = s \qquad \frac{1}{P(s)} = 1 - \frac{d_1^2}{16\cos^2\alpha\,J^2}\cdot\frac{2\cos^2\alpha\,J^2}{d_1^2} = \frac{7}{8}.$$

Erwähnenswert ist noch die Beziehung:

$$\frac{1}{P(d_1)} + \frac{1}{P(d_2)} = 1 - \frac{\cos^2\alpha}{2} + 1 - \frac{\sin^2\alpha}{2} = \frac{3}{2}.$$

Zwischen den Seiten und Diagonalen des Rhombus sowie deren Gewichte nach der Ausgleichung bestehen folgende Zusammenhänge:

1. Die Summe der reziproken Gewichte der beiden Diagonalen des Rhombus ist konstant.
2. Das Gewicht einer Seite ist unabhängig vom Winkel α. Daher ist auch die Summe der reziproken Gewichte sämtlicher Strecken unabhängig von der Gestalt des Rhombus.
3. Mit $\alpha = 45^0$ geht der Rhombus in eine spezielle Form über: Das Quadrat mit Diagonalen (Figur 7). Die Gewichte der Diagonalen sind bestimmt aus:

$$\frac{1}{P(d_1)} = \frac{1}{P(d_2)} = \frac{3}{4}.$$

4. Mit $\alpha = 0^0$ artet der Rhombus mit Diagonalen in eine Strecke aus, die in ihren Hälften doppelt und im ganzen einfach gemessen wurde. Die dadurch leicht kontrollierbare Gewichtsfunktion ergibt:

$$\frac{1}{P(d_1)} = \frac{1}{2}\quad,\quad \frac{1}{P(d_2)} = 1.$$

Für $\alpha = 90^0$ vertauschen gegenüber dem obigen Fall lediglich d_1 und d_2 ihre Bedeutung; es ist also

$$\frac{1}{P(d_1)} = 1 \quad , \quad \frac{1}{P(d_2)} = \frac{1}{2} .$$

d) *Das Quadrat mit Diagonalen (Figur 7)*

Wegen der besonderen Bedeutung dieses oben unter 3. behandelten Spezialfalles des Rhombus mit Diagonalen, schreiben wir die Koeffizienten eigens an. Es ist

$$a_d = -\frac{s\sqrt{2}}{2J} \quad , \quad a_s = \frac{s}{2J} \tag{9}$$

$$F = d \quad \frac{1}{P(d)} = 1 - \frac{s^2}{2J^2} \cdot \frac{J^2}{2s^2} = \frac{3}{4} \quad ; \quad F = s \quad \frac{1}{P(s)} = \frac{7}{8} .$$

e) *Beurteilung der Einzelfiguren*

Der Vergleich der behandelten Einzelfiguren erfolgt im Hinblick auf ihre Verwendbarkeit als Grundfigur einer Streckenkette oder eines Streckennetzes. Es ist daher zu berücksichtigen:

1. Die Anzahl der zu messenden Seiten,
2. die Gewichtsverteilung nach der Ausgleichung und besonders der Umstand, ob das größte Gewicht der längsten Seite der Einzelfigur zukommt,
3. die Möglichkeit einer günstigen Aneinanderreihung von Einzelfiguren zu einer Kette oder zu einem Netz.

Die wesentlichen, für eine solche Beurteilung erforderlichen Daten sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Das Quadrat mit Diagonalen erfüllt die gestellten Forderungen in hohem Maße. Bei der für ein einfach überbestimmtes Z. S. minimalen Seitenzahl 6 erhalten die beiden längsten Seiten des Systems, die Diagonalen, nach der Ausgleichung das größere Gewicht als die anderen Seiten. Seine Form läßt auch die Aneinanderreihung von Einzelfiguren in befriedigender Weise zu.

Betrachtet man dagegen einen Rhombus mit ungleich langen Diagonalen, so ist bei gleicher Seitenzahl das Gewicht der längeren Diagonale wohl größer als bei der zuvor besprochenen Figur. Der Übergang vom Quadrat mit Diagonalen zu dem eben besprochenen Rhombus führt aber schließlich zu der auf Seite 144 unter 4. erwähnten Art von Doppelmessung einer Strecke. Diese doppelt gemessene Strecke kommt als Einzelfigur nicht in Betracht, da keine Richtungsübertragung möglich ist. Deshalb kann man auch feststellen, daß hinsichtlich der Richtungsübertragung das Quadrat mit Diagonalen günstiger ist als ein Rhombus mit einem Winkel α unter 45^0.

Das Zentralsystem nach Fig. 5 steht dem Quadrat mit Diagonalen in bezug auf die Gewichtsverteilung kaum nach. Da auch die Aneinanderreihung keine Schwierigkeiten bereitet, ist es wohl verwendbar.

Von den regelmäßigen Zentralsystemen besitzt Z_3 zu wenig Symmetrie, um eine zweckvolle Kettenbildung zu ermöglichen. Das Zentralsystem Z_4 zeigt zwar ungünstigere Gewichtsverhältnisse, kann jedoch wegen seines symmetrischen

Baues mit anderen Einzelfiguren, wie dem Quadrat mit Diagonalen, in Streckenketten Verwendung finden.

System	Fig.	Seitenzahl	Seite	Länge	Gewichtsreziproke
r. Z. S. Z_3	3	6	s	l	$\frac{11}{12} \doteq 0.92$
			r	$\frac{l\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3}{4} = 0.75$
r. Z. S. Z_4	4	8	s	l	$\frac{11}{12} \doteq 0.92$
			r	$\frac{l\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5}{6} \doteq 0.83$
	5	12	s	$\frac{l\sqrt{2}}{2}$	$\frac{15}{16} \doteq 0.94$
			d	l	$\frac{7}{8} \doteq 0.87$
			$d_i + d_j$	$2\,l$	$\frac{3}{2} = 1.50$
Rhombus mit Diagonalen $\alpha = 30^0$	6	6	s	$\frac{l\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7}{8} \doteq 0.87$
			d_1	l	$\frac{5}{8} \doteq 0.63$
			d_2	$\frac{l\sqrt{3}}{3}$	$\frac{7}{8} \doteq 0.87$
Quadrat mit Diagonalen	7	6	s	$\frac{l\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7}{8} \doteq 0.87$
			d	l	$\frac{3}{4} = 0.75$

Tabelle 2

(Fortsetzung folgt)

Eine Weisertafel zur Ermittlung der Meridiankorrektion bei der Polhöhenbestimmung aus Zirkummeridianzenitdistanzen

Von M. Kölbl

Villarceau hat sich bei der Polhöhenbestimmung aus Meridianzenitdistanzen der Beziehung

$$z_M = \pm (\varphi - \delta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

bedient, welche hauptsächlich von Sterneck verwendet worden ist. Somit kann man die geographische Breite aus Sternen, deren Deklination bekannt ist, und deren Meridianzenitdistanz gemessen wurde, bestimmen. Wurden aber die Beobachtungen bei kleinen Stundenwinkeln, die nur einige Minuten betragen, Einzig und allein die wechselnde Neigung der Geoides gegenüber dem Erdellipsoid kann bei diesem Verfahren nicht berücksichtigt werden. Wirklich gefährlich ist dabei nur ein von Null verschiedener Mittelwert dieser Neigung; denn er erzeugt gegenüber der idealen Projektion, wie wir in obigem Beispiel gesehen haben, einen mit wachsendem Abstand vom Fundamentalpunkt linear zunehmenden Maßstabfehler k. Doch wird die mittlere Neigung bei wirklich kontinentaler Ausdehnung des Netzes (z. B. über Amerika oder Eurasien) höchstwahrscheinlich verschwinden. Eine örtlich oder regional wechselnde Neigung verursacht bei der strengen Projektion einen variablen Maßstab, dessen notwendige Vernachlässigung bei der Netzausgleichung jedoch sicherlich nur sehr geringe Fehler zur Folge hat.

Eine voll befriedigende Lösung des Problems der Großraumvermessung und der Lotabweichungen ist somit an eine hinreichende Kenntnis der Geoidundulationen gebunden, wie sie auf Grund eines symmetrisch über die ganze Erde verteilten Materiales repräsentativer Schwerewerte in absehbarer Zeit zu erwarten ist.

Über die Grundfigur und den Längsfehler in Streckenketten

Von G. Schelling, T. H. Graz

(Schluß)

C. *Kettenformen*

Es liegt nun nahe, Ketten zu untersuchen, die sich aus Einzelsystemen nach Figur 7 und Figur 5 zusammensetzen. Dabei ergeben sich als zweckmäßig erscheinende Formen die Ketten nach Figur 8 und Figur 9. Zu Vergleichszwecken wurden noch zwei weitere Kettenformen bearbeitet.

Wir untersuchen in diesem Abschnitt den zu erwartenden Längsfehler jeder Kette und bestimmen dazu das Gewicht einer Funktion, die annähernd die Längserstreckung der Kette darstellt.

a) *Die Kette nach Figur 8*

Für die Zusammensetzung dieser Figur war ausschlaggebend, daß im Quadrat mit Diagonalen nach Figur 7 die Diagonale das größte Gewicht nach der Ausgleichung besitzt. Um den Längsfehler einer Kette klein zu halten, muß daher eine Diagonale des Quadrates in der Längsrichtung der Kette liegen. Da durch Aneinanderreihen von Quadraten mit Diagonalen in der gewünschten Art jedoch keine Kette gebildet werden kann, wurden je zwei benachbarte Systeme durch zwei Strecken miteinander verbunden; in Figur 8 sind dies die Seiten 7, 8; 15, 16 usw. Dadurch entsteht für je zwei aufeinanderfolgende Einzelfiguren eine weitere Überbestimmung.

Neben den n Bedingungsgleichungen für die n einfach überbestimmten Quadrate mit Diagonalen sind deshalb $(n-1)$ weitere Bedingungsgleichungen anzusetzen. Dies erfolgt zweckmäßig für die $(n-1)$ regelmäßigen Zentralsysteme Z_4, deren Zentralpunkte die gemeinsamen Eckpunkte der Quadrate mit Diagonalen sind.

Für die Quadrate mit Diagonalen gilt

$$\text{laut Gleichung (9): } a_d = -\frac{s\sqrt{2}}{2\,J}\,(o), \quad a_s = +\frac{s}{2\,J}\,(.)$$

Für die regelmäßigen Zentralsysteme Z_4 gilt unter Berücksichtigung des Überganges von r in s und von s in $d = s\sqrt{2}$ (10)

$$\text{laut Gleichung (4): } a_d = +\frac{s\sqrt{2}}{2\,J}\,(x), \quad a_s = -\frac{s}{J}\,(+).$$

Wegen der Symmetrie der Kette lassen sich die Koeffizienten bei entsprechender Bezifferung der Seiten in eine gesetzmäßige Anordnung bringen. Wir bezeichnen die Koeffizienten aus den Bedingungsgleichungen der Quadrate mit Diagonalen mit $a, b, \ldots\ldots x$, diejenigen aus den Bedingungsgleichungen der Z_4 mit $\bar{a}, \bar{b}, \ldots\ldots \bar{w}$. Das folgende Koeffizientenschema ist entsprechend den zwei Gruppen gleichartiger Einzelfiguren und Bedingungsgleichungen geteilt; in ihm sind die Koeffizienten durch die in den Gleichungen (10) angeführten Symbole kenntlich gemacht.

Koeffizientenschema:

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24...
I			a									b								c				
	.	.	.	.	o	o			.	.	.	.	o	o			.	.	.	.	o	o		
II			+	+		×	×	×	+	+				×					+	+		×	×	×
											+	+		×	×	×	+	+				×		
									$\bar{a}$								$\bar{b}$							$\bar{c}$

Wir bestimmen das Gewicht der Funktion

$$F = s_5 + s_{13} + s_{21} + s_{29} + \ldots\,.$$

Das Gewicht dieser Funktion erhalten wir nach Gleichung (3) aus:

$$\frac{1}{P\,(nd)} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cf.2]^2}{[cc.2]} - \ldots\ldots - \frac{[xf.n-1]^2}{[xx.n-1]} -$$
$$- \frac{[\bar{a}f.n]^2}{[\bar{a}\bar{a}.n]} - \frac{[\bar{b}f.n+1]^2}{[\bar{b}\bar{b}.n+1]} - \ldots\ldots - \frac{[\bar{w}f.2n-2]^2}{[\bar{w}\bar{w}.2n-2]}. \tag{11}$$

Wegen der Unabhängigkeit der n Quadrate mit Diagonalen gilt für den ersten Teil der Gewichtsgleichung (11)

$$\frac{[af]^2}{[aa]} = \frac{[bf.1]^2}{[bb.1]} = \frac{[cf.2]^2}{[cc.2]} = \ldots\ldots = \frac{[xf.n-1]^2}{[xx.n-1]}.$$

Im zweiten Teil der Gewichtsgleichung, der den Zusammenhang der $(n-1)$ regelmäßigen Zentralsysteme Z_4 untereinander und mit den n-Quadraten mit

Diagonalen berücksichtigt, bildet jeder Term in den ersten $(n-1)$ Reduktionsstufen nur zwei voneinander verschiedene Formen. Es gilt:

$$[\bar a\bar a.1] = [\bar b\bar b.2] = [\bar c\bar c.3] = \ldots = [\bar w\bar w.n-1] = [\bar a\bar a] - \frac{[a\bar a]\,[a\bar a]}{[aa]}$$

$$[\bar a\bar a.2] = [\bar b\bar b.3] = [\bar c\bar c.4] = \ldots = [\bar w\bar w.n] = [\bar a\bar a] - 2\,\frac{[a\bar a]\,[a\bar a]}{[aa]}$$

$$[\bar a\bar b.2] = [\bar b\bar c.3] = [\bar c\bar d.4] = \ldots = [\bar v\bar w.n-1] = [\bar a\bar b] - \frac{[a\bar a]\,[a\bar a]}{[aa]}$$

$$[\bar af.1] = [\bar bf.2] = [\bar cf.3] = \ldots = [\bar wf.n-1] = \quad - \frac{[a\bar a]\,[af]}{[aa]}$$

$$[\bar af.2] = [\bar bf.3] = [\bar cf.4] = \ldots = [\bar wf.n] = \quad - 2\,\frac{[a\bar a]\,[af]}{[aa]}.$$

Für die verbleibenden $(n-1)$ Reduktionsstufen im zweiten Teil der Gewichtsgleichung zeigen wir den gesetzmäßigen Zusammenhang auf.

Wir bezeichnen die Ausdrücke im Nenner, nämlich $[\bar a\bar a.n]$, $[\bar b\bar b.n+1]$ usw. mit A_1, A_2, allgemein mit A_i und die linearen Ausdrücke im Zähler, also $[\bar af.n]$, $[\bar bf.n+1]$ usw. mit B_1, B_2, allgemein mit B_i. Die Terme im zweiten Teil der Gewichtsgleichung (11) kann man somit durch die Ausdrücke $\frac{B_i^2}{A_i}$ ersetzen. Man findet nun leicht das Bildungsgesetz der Größen A_i und B_i:

$$A_i = A_1 - \frac{K^2}{A_{i-1}} \qquad\qquad B_i = B_1\left(1 - \frac{K}{A_{i-1}}\right).$$

Dabei ist $K = [\bar a\bar b] - \dfrac{[a\bar a]\,[a\bar a]}{[aa]} = \text{const.}$

$$A_1 = [\bar a\bar a.n] = [\bar a\bar a.2] = [\bar a\bar a] - 2\,\frac{[a\bar a]\,[a\bar a]}{[aa]}, \quad A_0 = \infty$$

$$B_1 = [\bar af.n] = [\bar af.2] = -\,2\,\frac{[a\bar a]\,[af]}{[aa]}.$$

Man kann jetzt leicht zeigen, daß die Folge der A_i und damit auch die Folge der Terme im zweiten Teil der Gewichtsgleichung (11) konvergiert, womit sich die Gleichung (11) wesentlich vereinfacht. Für die Konvergenz der Folge A_i ist notwendig und hinreichend, daß $K^2 \leq \frac{A_1^2}{4}$.

Zur Bestimmung dieser Werte bilden wir mit Hilfe des Koeffizientenschemas und der Gleichung (10)

$$[aa] = 2\,\frac{s^2}{J^2},\ [a\bar a] = -\frac{3}{2}\,\frac{s^2}{J^2},\ [\bar a\bar a] = 6\,\frac{s^2}{J^2},\ [\bar a\bar b] = \frac{1}{2}\,\frac{s^2}{J^2},\ [af] = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{s}{J}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die obigen Bestimmungsgleichungen erhalten wir

$$A_1 = \frac{15}{4}\cdot\frac{s^2}{J^2} \qquad K = -\,\frac{5}{8}\,\frac{s^2}{J^2} \qquad B_1 = -\,\frac{3\sqrt{2}}{4}\,\frac{s}{J}.$$

Die Anwendung des Konvergenzkriteriums gibt $K^2 = \frac{A_1^2}{36} < \frac{A_1^2}{4}$. Die betrachteten Folgen werden daher sehr rasch konvergieren. Die ersten drei Elemente jeder Folge sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

i	A_i	B_i^2	$\frac{B_i^2}{A_i}$
1	$\frac{15}{4}\,\frac{s^2}{J^2} = 3.75\,\frac{s^2}{J^2}$	$\frac{9}{8}\,\frac{s^2}{J^2} \doteq 1.13\,\frac{s^2}{J^2}$	$\frac{3}{10} = 0.30$
2	$\frac{175}{48}\,\frac{s^2}{J^2} \doteq 3.65\,\frac{s^2}{J^2}$	$\frac{49}{32}\,\frac{s^2}{J^2} \doteq 1.53\,\frac{s^2}{J^2}$	$\frac{294}{700} = 0.42$
3	$\frac{51}{14}\,\frac{s^2}{J^2} \doteq 3.64\,\frac{s^2}{J^2}$	$-\frac{151}{98}\,\frac{s^2}{J^2} \doteq 1.54\,\frac{s^2}{J^2}$	$\frac{1059}{2499} \doteq 0.42$

Tabelle 3

Der erste Teil der Gewichtsgleichung (11) ist bestimmt durch die Terme

$$\frac{[af]^2}{[aa]} = \frac{[bf.1]^2}{[bb.1]} = \frac{[cf.2]^2}{[cc.2]} = \ldots\ldots = \frac{[xf.n-1]^2}{[xx.n-1]} = \frac{s^2}{2J^2}\cdot\frac{J^2}{2s^2} = \frac{1}{4}.$$

Unter bewußter Vernachlässigung des durch das Abbrechen der Folge $\frac{B_i^2}{A_i}$ verursachten Fehlers erhält man das Gewicht der Funktion $F = s_5 + s_{13} + \ldots$ mit

$$\frac{1}{P\,(nd)} \doteq n - n\,\frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[\bar{a}f.n]^2}{[\bar{a}\bar{a}.n]} - (n-2)\,\frac{[\bar{b}f.n+1]^2}{[\bar{b}\bar{b}.n+1]}$$

$$\frac{1}{P(nd)} \doteq n - 0.25\,n - 0.30 - (n-2)\,(0.42)$$

$$\frac{1}{P(nd)} \doteq 0.33\,n + 0.54 \qquad (\text{für } n \geq 2).$$

b) *Die Kette nach Figur 9*

Diese Kette besteht aus sich teilweise überdeckenden Einzelfiguren nach Figur 5. Die Längserstreckung der Kette wird durch die Funktion $F = s_5 + s_{12} + s_{19} + \ldots$ annähernd bestimmt.

Zur Ermittlung des Gewichtes dieser Funktion bilden wir mit Hilfe von Gleichung (7) die Koeffizientensummen und erhalten damit die rasch konvergierenden Terme der Gewichtsfunktion.

$$\frac{[af]^2}{[aa]} = 0.50,\ \frac{[bf.1]^2}{[bb.1]} \doteq 0.64,\ \frac{[cf.2]^2}{[cc.2]} \doteq 0.66,\ \frac{[df.3]^2}{[dd.3]} \doteq 0.66.$$

Wird die Länge der Kette mit $l = n.d$ angesetzt, so sind dazu $(n-1)$ Einzelsysteme aneinander zu fügen. Deswegen wird

$$\frac{1}{P(nd)} \doteq n - 0.50 - 0.64 - (n-3)\,(0.66)$$

$$\frac{1}{P(nd)} \doteq 0.34\, n + 0.84 \quad (\text{für } n \geq 2).$$

c) *Die Kette nach Figur 10*

Die Kette setzt sich aus n Quadraten mit Diagonalen zusammen, von denen je zwei benachbarte eine Seite gemeinsam haben. Wir ermitteln das Gewicht der Funktion $F = s_2 + s_7 + s_{12} + \ldots$.

Die Koeffizientensummen bilden wir aus Gleichung (9) und gewinnen daraus die Summanden der Gewichtsfunktion:

$$\frac{[af]^2}{[aa]} = \frac{1}{8}, \quad \frac{[bf.1]^2}{[bb.1]} \doteq \frac{1}{10}, \quad \frac{[cf.2]^2}{[cc.2]} \doteq \frac{1}{10}.$$

$$\frac{1}{P(ns)} \doteq n - \frac{1}{8} - (n-1)\,(0.10).$$

$$\frac{1}{P(ns)} \doteq 0.9\, n.$$

d) *Die Kette nach Figur 11*

Diese Kette wird aus n regelmäßigen Zentralsystemen Z_4 gebildet. Zwei aufeinanderfolgende Einzelsysteme haben eine gemeinsame Außenseite.

Wir bestimmen das Gewicht der Funktion $F = s_2 + s_9 + s_{16} + \ldots$

Die Koeffizientensummen haben wir aus Gleichung (4) zu entnehmen und erhalten als Summanden der Gewichtsfunktion die Größen

$$\frac{[af]^2}{[aa]} \doteq 0.083, \quad \frac{[bf.1]^2}{[bb.1]} \doteq 0.071, \quad \frac{[cf.2]^2}{[cc.2]} \doteq 0.071.$$

$$\frac{1}{P(ns)} \doteq 0.93\, n.$$

e) *Diskussion der Kettenformen*

Der Vergleich der einzelnen Kettenformen erfolgt mittels einer Vergleichsstrecke l. Dabei interessiert das Gewicht der untersuchten Funktionen, durch welche die Längserstreckung der Kette annähernd bestimmt wird; ferner der für die jeweilige Kette erforderliche Arbeitsaufwand, charakterisiert durch die Zahl der zu messenden Seiten.

Die entsprechenden Zahlenwerte sind für die behandelten Ketten in Tabelle 4 zusammengefaßt.

Kettenform	Zahl der Einzelfiguren	$\frac{1}{P(F)}$	Zahl der Seiten
Fig. 8	n	$0.33\, n + 0.54$	$8n - 2$
Fig. 9	n	$0.34\, n + 0.84$	$7n - 2$
Fig. 10	$n \sqrt{2}$	$1.27\, n$	$7.1\, n + 1$
Fig. 11	n	$0.93\, n$	$7n + 1$

Tabelle 4

Das größte Gewicht für die Längserstreckung der Kette wird in der Kettenform nach Figur 8 erzielt, ohne daß dabei ein wesentlich größerer Arbeitsaufwand als bei den anderen untersuchten Kettenformen erforderlich ist. Mehrere Ketten dieser Art lassen sich leicht zu einem Streckennetz vereinigen, wie es z. B. in Figur 12 dargestellt ist.

Ein nur unwesentlich kleineres Gewicht für die Längserstreckung zeigt die Kette nach Figur 9, für die aber auch ein etwas geringerer Arbeitsaufwand erforderlich ist. Obwohl diese Kette aus den selbständig behandelten Einzelfiguren nach Figur 5 gebildet wurde, geht sie als Ganzes aus der zuerst behandelten Kette nach Figur 8 hervor, wenn man in dieser die Querverbindungen (6, 14, 22 usw.) entfernt; das heißt aber, daß es für den Längsfehler der Kette ohne Bedeutung ist, wenn in der Kette nach Figur 8 die eine oder andere Querverbindung ausfällt.

Die beiden anderen Kettenformen zeigen bei annähernd gleichem Arbeitsaufwand ein beträchtlich geringeres Gewicht für die Längserstreckung.

Zusammenfassung

Die Untersuchung hat ergeben, daß weder das regelmäßige Zentralsystem Z_4 in der Anordnung von Figur 10 noch das Quadrat mit Diagonalen (Figur 9) das beste Ergebnis — den kleinsten Längsfehler — zeitigen. Vielmehr ist es eine Zusammensetzung beider Einzelsysteme (Fig. 8) oder eine Modifikation dieser Kettenform (Fig. 9), die bezüglich des Längsfehlers und der praktischen Verwendbarkeit den gestellten Forderungen am meisten entspricht.

Es kann deshalb kein einzelnes einfach überbestimmtes Zentralsystem als prädestinierte Grundfigur von Streckenketten oder Streckennetzen bezeichnet werden.

L i t e r a t u r:

[1] *K. Hubeny* Die Ausgleichung von Dreiecksnetzen mit direkt gemessenen Seiten. Österr. Z. f. V.W., Heft Nr. 5/6/1950.

[2] *Jordan-Eggert* Handbuch der Vermessungskunde, 1. Band.

Kleine Mitteilungen

Emer. o. Professor Dr. E. Harbert — 70 Jahre

Der erste Vorsitzende des Deutschen Vereines für Vermessungswesen, Dr. Egbert H a r b e r t, vollendete am 25. November 1952 sein 70. Lebensjahr. Seine Heimat ist Arnsberg, die Hauptstadt des gleichnamigen Regierungsbezirkes in Westfalen. Nach Absolvierung der geodätischen Studien an der Landwirtschaftlichen Hochschule in Berlin erweiterte er seine Kenntnisse als Assistent am dortigen geodätischen Institut und habilitierte sich als Privatdozent. Praktische Kenntnisse erwarb er sich als Kulturamtslandmesser in Enskirchen (Rheinprovinz). Im Jahre 1922 wurde er als ord. Professor und Vorstand des Institutes für Vermessungswesen an die Technische Hochschule in Braunschweig berufen, wo er bis zu seinem Übertritt in den Ruhestand wirkte. Mit seinem Scheiden aus dem Lehramt zog er sich jedoch nicht ins Privatleben zurück; denn er wirkte als 1. Vorsitzender des DVW im Dienste des Vermessungswesens weiter.

Den österreichischen Vermessungsingenieuren ist Prof. H a r b e r t durch seine 1939 und 1942 erschienene „Vermessungskunde", durch seine Veröffentlichungen in der