Paper-ID: VGI_195214



Einige Bemerkungen zur Winkelmessung nach der Sektorenmethode

Max Kneißl 1

¹ München

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **40** (5, 6), S. 129–134, 161–169 1952

$\mathsf{BibT}_{\!\!E\!\!X}:$

```
CARTICLE{Kneissl_VGI_195214,
Title = {Einige Bemerkungen zur Winkelmessung nach der Sektorenmethode},
Author = {Knei{\ss}l, Max},
Journal = {{\"0}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {129--134, 161--169},
Number = {5, 6},
Year = {1952},
Volume = {40}
}
```



OSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppe Vermessungswesen), der Österreichischen Kommission für Internationale Erdmessung und der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

Hofrat Prof. Dr. h. c. mult. E. Doležal, Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. Lego und o.ö. Professor Dipl.-Ing. Dr. H. Rohrer

Nr. 5

Baden bei Wien, Ende November 1952

XL. Jq.

Einige Bemerkungen zur Winkelmessung nach der Sektorenmethode¹)

Von M. Kneißl, München

Allgemeines

Zu Beginn unseres Jahrhunderts wurde durch Heinrich Wild eine neue Methode für genaue Horizontalwinkelmessungen entwickelt, die unter der Bezeichnung Sektoren-Methode seit 1904 in der Schweiz in großem Umfang verwendet wurde. Die Sektoren-Methode verdient vor allem deshalb Beachtung, weil sie in sehr einfacher Weise gestattet, den Einfluß derjenigen Richtungen einer Station etwas zu kompensieren, die infolge besonderer topographischer und atmosphärischer Verhältnisse nur schlecht gemessen werden können. Sie hat zudem den Vorteil, daß sie an kein starr einzuhaltendes Beobachtungsschema — wie etwa die Schreibersche Methode der Winkelmessung in allen Kombinationen — gebunden ist. Bei der Sektorenmethode hat vielmehr der Beobachter in der Unterteilung der Richtungen einer Station und in der Beobachtungsanordnung größte Freiheit. Die Freizügigkeit in der Unterteilung der Richtungen und in der Anordnung der Messung verlangt aber andererseits vom Beobachter eine gewisse Erfahrung und eine sichere Beurteilung der Güte der einzelnen Ziele und Richtun-

Baes chlin, C. F.: "Compensation simplifiée d'une station observée d'après la méthode des secteurs."

Beide Aufsätze sind als "Tirage à part de la Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières" unter dem Titel "Communication sur la méthode des secteurs en triangulation" 1925 in einem Sonderheft erschienen.

Vgl. hiezu auch den Bericht des Verfassers "Betrachtungen zur Horizontalwinkelmessung unter besonderer Berücksichtigung der Sektorenmethode" in Nachrichten aus dem Reichs-Verm.-Dienst 1941, S. 249—266.

¹⁾ Zoelly, H.: "La méthode des secteurs en Triangulation." Baeschlin, C. F.: "Compensation simplifiée d'une station observée d'après

gen. Sie bricht damit bewußt mit dem Schematismus anderer Verfahren und macht damit die genaue Winkelmessung wieder zu einer besonderen Aufgabe des Vermessungsingenieurs. Sie verlangt neben einem gut erkundeten Netz, sorgfältig vermarkten und signalisierten Dreieckspunkten, leistungsfähigen Leuchtgeräten und einem vorzüglichen Instrument nicht zuletzt einen mit der geodätischen Beobachtungskunst gut vertrauten Ingenieur.

Beobachtungsanordnung

Bei der Sektoren-Methode werden auf jeder Station drei oder vier Richtungen I. O. als Hauptrichtungen ausgewählt, die den Horizont in ebensoviele Winkel oder Sektoren einteilen. Die Hauptrichtungen sollen gleichmäßig über den ganzen Horizont verteilt sein und möglichst mit den Bestimmungsrichtungen einer Station zusammenfallen. Sie sollen gute und einwandfreie Sichten bieten, die keine systematischen Fehler — etwa durch seitliche Strahlenbrechung — befürchten lassen. Kurze Netzlinien werden im allgemeinen nicht als Hauptrichtungen ausgewählt. Die Sektoren füllen als Nachbarwinkel den Horizont; ihre Summe muß also gleich vier Rechten sein. Sie werden als Einzelwinkel in verschiedenen Kreisstellungen mehrmals gemessen, wobei die Zahl der Wiederholungen von der Wichtigkeit oder der Ordnung der Station abhängt.

Die übrigen Richtungen einer Station werden als Zwischenrichtungen, ihre Winkel als Zwischenwinkel bezeichnet. Die Zwischenwinkel werden ebenfalls durch Einzelwinkelmessung beobachtet. Die Zwischenrichtungen müssen durch die Messung der Zwischenwinkel stets an die beiden sie einschließenden Hauptrichtungen angeschlossen werden, und zwar so, daß die Summen der Zwischenwinkel weitere Werte für die Sektorenwinkel ergeben. Eine Zwischenrichtung kann dabei immer nur in einer einzigen solchen Summe auftreten. Grundsätzlich darf ein Zwischenwinkel nicht von zwei Richtungen gebildet werden, die in zwei verschiedenen Sektoren liegen.

Liegen mehrere Zwischenrichtungen innerhalb eines Sektors, so kann der Sektor dadurch unterteilt werden, daß eine gut sichtbare Zwischenrichtung als Hauptzwischenrichtung ausgewählt wird, die innerhalb dieses Sektors wie eine Hauptrichtung zu behandeln ist.

Eine besondere Eigenart der Winkelmessung nach der Sektoren-Methode, die eine möglichst große Wirtschaftlichkeit des Verfahrens gewährleistet, besteht darin, daß zugleich mit den Richtungen I. O. auch die Richtungen II. O. und die wichtigeren Richtungen III. O. beobachtet und in die Stationsausgleichung mit einbezogen werden können.

Die Einzelwinkel werden in der Schweiz nach dem Reiterationsverfahren beobachtet, wobei die Wiederholungszahlen so gewählt werden, daß den vorläufigen Werten der Winkel (allgemeine arithmetische Mittel) zwischen Richtungen I. O. ungefähr das Gewicht 10, zwischen Richtungen II. O. ungefähr das Gewicht 6 und zwischen Richtungen III. O. ungefähr das Gewicht 3 bis 4 zukommt, wenn der einmaligen Messung (1 Satz) das Gewicht 1 zukommt. Die Winkel erhalten durch die Aufteilung des Horizontschlußwiderspruchs noch kleine Gewichtsverbesserungen, die praktisch aber nicht ins Gewicht fallen und daher auch nicht

beachtet werden. Bei der Netzausgleichung werden alle Winkel gleicher Ordnung als gleichgewichtig betrachtet.

Die Winkelmessung nach der Sektoren-Methode kann als Nachbarwinkelmessung aufgefaßt werden. Dabei wird der Horizont doppelt, nämlich durch die Sektorenwinkel und dann durch die Zwischenwinkel überdeckt. Einzelne Sektoren können dabei auch mehrfach, gegebenenfalls unter Einschaltung von Hauptzwischenrichtungen, überdeckt werden.

Stationsausgleichung

Bei der Stationsausgleichung werden für die Sektoren und Hauptzwischenwinkel die allgemeinen arithmetischen Beobachtungsmittel aus den unmittelbar gemessenen Winkeln und aus den Summen ihrer Zwischenwinkel eingeführt, wobei die Gewichte der unmittelbar beobachteten Sektoren- und Zwischenwinkel der Zahl der jeweils gemessenen Sätze gleichgesetzt werden. Die so gefundenen vorläufigen Werte der Sektorenwinkel werden auf den Horizontschluß unter Beachtung der Gewichte abgeglichen. Dann werden vorläufige Werte für die Hauptzwischenwinkel aus den unmittelbaren Beobachtungen und den Summen der Zwischenwinkel, die sie überdecken, gebildet. Die Hauptzwischenwinkel und die Zwischenwinkel müssen wiederum unter Beachtung der Gewichte auf die abgeglichenen Sektorenwinkel abgestimmt werden.

Für die Gewichtsberechnungen und für die Stationsausgleichung sind die bekannten Merkregeln zu beachten:

- Das Gewicht eines direkt gemessenen Winkels ist gleich der Anzahl der gemessenen Sätze, wobei wie üblich unter einem Satz das Mittel aus Hin- und Rückgang verstanden wird.
- 2. Das Gewicht $\{p_{il}\}$ eines Winkels (Winkelsumme), der sich aus zwei oder mehreren Winkeln zusammensetzt, wobei den Einzelwinkeln die Gewichte p_{ik} , p_{kl} , zukommen, ist gleich 1 dividiert durch die Summe der reziproken Werte der Gewichte, also

$$\{p_{ii}\} = \frac{1}{\frac{1}{p_{ik}} + \frac{1}{p_{kl}}} = \frac{1}{\left[\frac{1}{p_{ik}}\right]}.$$

3. Das Gewicht $(p_{i.l})$ des allgemeinen arithmetischen Mittels eines Winkels aus der direkten Messung und der ihn zusammensetzenden Winkelsumme ist gleich der Summe aus dem Gewicht p_{il} der direkten Messung und dem Gewicht $\{p_{i.l}\}$ der Winkelsumme.

$$(p_{il}) = p_{il} + \{p_{il}\}$$

- 4. Werden auf diese Weise zunächst die Gewichte $(p_{i.l})$ der Sektorenwinkel und dann auch die Gewichte der Hauptzwischenwinkel gebildet, so sind der Reihe nach:
 - a) die Sektorenwinkel auf den Horizont,
 - b) die Hauptzwischenwinkel auf die stationsausgeglichenen Sektoren und
 - c) die Zwischenwinkel auf die stationsausgeglichenen Hauptzwischenwinkel abzugleichen.

Bei der Abstimmung der Sektorenwinkel auf den Horizontschluß und der Hauptzwischenwinkel und der Zwischenwinkel auf die ausgeglichenen Sektoren handelt es sich um die Ausgleichung von ungleichgewichtigen Beobachtungen, deren Summe ein Festwert ist. Wären die Beobachtungen gleichgewichtig, so wäre der Horizontwiderspruch gleichmäßig auf die Sektorenwinkel und die Widersprüche der Summe der Zwischenwinkel gegen die ausgeglichenen Sektoren gleichmäßig auf die Zwischenwinkel zu verteilen. Bei ungleichgewichtigen Beobachtungen dagegen erfolgt die Ausgleichung dadurch, daß die Widersprüche umgekehrt proportional zu den Gewichten auf die Winkel verteilt werden. Ein stationsausgeglichener Sektoren- oder Hauptzwischenwinkel [i.1] ergibt sich also —

stationsausgeglichener Sektoren- oder Hauptzwischenwinkel
$$[i.l]$$
 ergibt sich also — wie üblich — aus der Beobachtung $(i.l)$ und einer Verbesserung — $\frac{w}{(p_{i.l})\left[\frac{1}{(p_{il})}\right]}$,

wobei bei der Sektoren-Methode lediglich darauf zu achten ist, daß als beobachtete Werte für die Sektorenwinkel und die Hauptzwischenwinkel die allgemeinen arithmetischen Mittel aus der direkten Beobachtung und den Summen der sie bildenden Zwischenwinkel zu betrachten sind. Dementsprechend sind auch die Gewichte unter Beobachtung der Merkregeln 1. bis 3. festzusetzen.

Die Stationsausgleichung bei der Sektoren-Methode umfaßt also:

- 1. die Bildung des allgemeinen arithmetischen Mittels für die Sektorenwinkel.
- 2. die Abgleichung der Sektorenwinkel auf den Horizontschluß und
- die Berechnung und Abgleichung der Hauptzwischenwinkel und die Abgleichung der beobachteten Zwischenwinkel auf die ausgeglichenen Sektorenwinkel.

Ableitung der Ausdrücke für die Berechnung der Winkelverbesserung

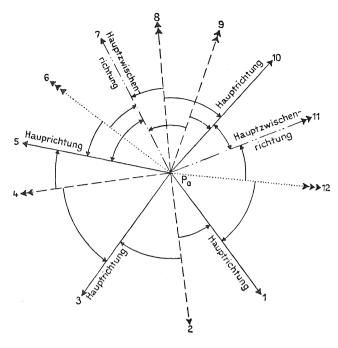
Im folgenden sollen die Ausdrücke für die Berechnung der Winkelverbesserungen durch eine Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen²) abgeleitet werden, weil hiebei immer nur die Verbesserungen der Sektorenwinkel für sich oder die Verbesserungen der Zwischenwinkel, die einen Sektor überdecken, je für sich in die einzelnen Fehler- und Korrelatengleichungen eingehen. Man erhält dadurch Normalgleichungen, die jeweils nur aus dem quadratischen Faktor und der zugehörigen Korrelate bestehen. Die Korrelaten können daher ohne Rechnung direkt von den Fehlergleichungen abgeschrieben werden.

Wir beziffern, wie üblich, die Richtungen einer Station durchlaufend im Uhrzeigersinn und benutzen für die Ableitung ein praktisches Beispiel (Abb.) ³).

Die Station P₀ umfaßt 6 Richtungen I. O. (Richtung 1, 2, 3, 5, 7, 10), 4 Richtungen II. O. (Richtung 4, 8, 9, 11) und 2 Richtungen III. O. (Richtung 6 und 12).

²) C. F. Baeschlin benutzte für diese Ableitung die Methode der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen zwischen den zu ermittelnden Unbekannten.

³⁾ Das Beispiel betrifft die Stationsausgleichung für Piz Michel, das H. Zoelly in "La méthode des secteurs en triangulation" benutzt hat.



Von diesen Richtungen werden die Richtungen 1, 3, 5 und 10 als Hauptrichtungen, die Richtungen 7 und 11 als Hauptzwischenrichtungen und die übrigen Richtungen (2, 4, 6, 8, 9, 12) als Zwischenrichtungen ausgewählt. Damit sind unmittelbar zu messen:

- a) die Sektorenwinkel [1.3], [3.5], [5.10] und [10.1]
- b) die Hauptzwischenwinkel [5.7], [7.10] und [11.1]
- c) die Zwischenwinkel [1.2], [2.3], [3.4], [4.5], [5.6], [6.7], [7.8], [7.9], [8.10], [9.10], [10.11], [11.12], [12.1], also insgesamt 20 Winkel.

Im übrigen bezeichnen wir nun:

Die Beobachtungsmittel für die Einzelwinkel mit
$$\widehat{i.l}$$
 und ihre Gewichte (Anzahl der gemessenen Sätze) mit $p_{i.l}$, die Winkelsummen für die Sektorenwinkel und für die Hauptzwischenwinkel mit $\{i.l\}$ und ihre Gewichte $\frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{p_{i.l}} \right\rfloor}$ mit $\{p_{i.l}\}$,

die allgemeinen arithmetischen Mittel für die Sektorenwinkel und für die Hauptzwischenwinkel aus der direkten Messung und den Sum-

men der eingeschlossenen Zwischenwinkel mit	(i . l)
und ihre Gewichte mit	$(p_{i,l})$
und schließlich die stationsausgeglichenen Winkel mit	(i.l)
und ihre Gewichte mit	$[p_{i.l}]$

Für die Abgleichung der Sektorenwinkel auf den Horizontschluß und der Hauptzwischenwinkel auf die Sektorenwinkel führt man ihre allgemeinen arithmetischen Mittel (i.l) als Beobachtungswerte ein und vergleicht diese mit den ausgeglichenen Werten [i.l]. Damit ergeben sich die Beobachtungsverbesserungen aus

$$v(i,l) = [i,l] - (i,l).$$

Bei der Abgleichung der Zwischenwinkel auf die Sektoren- oder Hauptzwischenwinkel dagegen erhält man die Verbesserungen

$$v_{i.k} = [i.k] - \widehat{i.k}.$$

Führt man die Stationsausgleichung nach bedingten Beobachtungen durch, so wird man zur Vereinfachung der Stationsausgleichung zuerst die Sektorenwinkel (i.k) auf 360° abgleichen und ihre endgültigen Werte sofort für die Berechnung der Widersprüche der Summen der Hauptzwischenwinkel und die Zwischenwinkel gegen die sie überdeckenden Sektorenwinkel benutzen. Diese Anordnung hat, wie schon oben erwähnt, den Vorteil, daß die Normalgleichungen jeweils nur eine Korrelate erhalten, so daß die Werte der Korrelaten unmittelbar aus den Korrelatengleichungen abgelesen werden können. (Fortsetzung folgt)

Die Steigerung der Bandmeßgenauigkeit mit einfachen Mitteln

Von Dipl.-Ing. Josef Mitter

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

(Schluß)

Eine vergleichende Aufstellung der einzelnen mittleren Fehler für die 50 m-Strecke, einmal mit dem 20 m-Band durch Anreihung und einmal direkt mit dem 50 m-Band gemessen, ergibt die folgenden Verhältnisse. (Die Wurzel \sqrt{n} geht hier wegen der halben Bandlänge im ersten Fall in \sqrt{p} bzw. \sqrt{p} über, worin für volle Bandlängen $l_{\rm B}$, p=1, für $\frac{l_{\rm B}}{2}$, $p=\frac{1}{2}$ ist.)

Tabelle 2

	20-m-Band	50- <i>m</i> -Band
1. ± m _t	$\pm m_{\Delta t} \alpha 20 \sqrt{2.25} = \pm m_{\Delta t} \alpha 30$	$\pm m_{\Delta^{t}} \propto 50$
$2. \pm m_{\rm P}$	$\pm m_{\Delta P} \frac{1}{Eq} 20 \sqrt{2 \cdot 25} = \pm m_{\Delta P} \frac{1}{Eq} 30$	$\pm m_{\Delta P} \frac{1}{Eq} 50$
$3. \pm m_{\rm d}$	$\pm k \frac{m_{\Delta P}}{P}.2.20^3 \sqrt{2.016} = \pm k \frac{m_{\Delta P}}{P} 23.10^3$	$\pm k \frac{m_{\Delta P}}{P} 250.10^3$
4.	$\pm m_{\rm a} \sqrt{3} = \pm m_{\rm a} 1.73$	<u>+</u> m _a

(Werden die Temperaturverhältnisse während der Vergleichsmessungen als konstant angenommen, so nimmt $m_{\rm t}$ im ersten Fall den Charakter eines regelmäßigen Fehlers an und geht ebenfalls in die Form $\pm m_{\Delta^{\rm t}} \, \alpha \, 50\,$ über.)

OSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSØESEN

Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppe Vermessungswesen), der Österreichischen Kommission für Internationale Erdmessung und der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

Hofrat Prof. Dr. h. c. mult. E. Doležal, Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. Lego und o.ö. Professor Dipl.-Ing. Dr. H. Rohrer

Nr. 6

Baden bei Wien, Ende Dezember 1952

XL. Jg.

Einige Bemerkungen zur Winkelmessung nach der Sektorenmethode

Von M. Kneißl, München

(Schluß)

Damit ergeben sich für das gewählte Beispiel die folgenden Bedingungsund Fehlergleichungen.

1.
$$[1.3] + [3.5] + [5.10] + [10.1] - 4R = 0$$
 oder:
 $(1.3) + \nu_{(1.3)} + (3.5) + \nu_{(3.5)} + (5.10) + \nu_{(5.10)} + (10.1) + \nu_{(10.1)} - 4R = 0$ und mit:
 $(1.3) + (3.5) + (5.10) + (10.1) - 4R = \nu_1$
 $\nu_{(1.3)} + \nu_{(3.5)} + \nu_{(5.10)} + \nu_{(10.1)} + \nu_1 = 0$

2.
$$[1.2] + [2.3] - [1.3] = 0$$
 oder:
 $\widehat{1.2} + \nu_{1.2} + \widehat{2.3} + \nu_{2.8} - [1.3] = 0$ und mit:
 $\widehat{1.2} + \widehat{2.3} - [1.3] = (1.3) - [1.3] = \nu_2$
 $\nu_{1.2} + \nu_{2.3} + \nu_2 = 0$

3.
$$[3.4] + [4.5] - [3.5] = 0$$
 oder:
 $3.4 + \nu_{3.4} + 4.5 + \nu_{4.5} - [3.5] = 0$ und mit:
 $3.4 + 4.5 - [3.5] = \{3.5\} - [3.5] = \nu_3$
 $\nu_{3.4} + \nu_{4.5} + \nu_{3.5} = 0$

4.
$$[5.7] + [7.10] - [5.10] = 0$$
 oder:
 $(5.7) + \nu_{(5.7)} + (7.10) + \nu_{(7.10)} - [5.10] = 0$ und mit:
 $(5.7) + (7.10) - [5.10] = \{5.10\} - [5.10] = \nu_4$
 $\nu_{(5.7)} + \nu_{(7.10)} + \nu_4 = 0$

5.
$$[5.6] + [6.7] - [5.7] = 0$$
 oder:
 $5.6 + \nu_{5.6} + 6.7 + \nu_{6.7} - [5.7] = 0$ und mit:
 $5.6 + 6.7 - [5.7] = \{5.7\} - [5.7] = \nu_5$
 $\nu_{5.6} + \nu_{6.7} + \nu_{5} = 0$

6.
$$[7.8] + [8.10] - [7.10] = 0$$
 oder:
 $\widehat{7.8} + \nu_{7.8} + \widehat{8.10} + \nu_{8.10} - [7.10] = 0$ und mit
 $\widehat{7.8} + \widehat{8.10} - [7.10] = \{7.10\}^{\prime} - [7.10] = w_6$
 $\nu_{7.8} + \nu_{8.10} + w_6 = 0$

7.
$$[7.9] + [9.10] - [7.10] = 0$$
 oder:
 $\widehat{7.9} + \nu_{7.9} + \widehat{9.10} + \nu_{9.10} - [7.10] = 0$ und mit:
 $\widehat{7.9} + \widehat{9.10} - [7.10] = \{7.10\}^{\prime\prime\prime} - [7.10] = \nu_{7}$
 $\nu_{7.9} + \nu_{9.10} + \nu_{7} = 0$

8.
$$[10.11] + [11.1] - [10.1] - 0$$
 oder:
 $\widehat{10.11} + \nu_{10.11} + (11.1) + \nu_{(11.1)} - [10.1] = 0$ und mit
 $\widehat{10.11} + (11.1) - [10.1] = \{10.1\} - [10.1] = \nu_8$
 $\nu_{10.11} + \nu_{(11.1)} + \nu_8 = 0$

9.
$$[11.12] + [12.1] - [11.1] = 0$$
 oder:
 $\widehat{11.12} + \nu_{11.12} + \widehat{12.1} + \nu_{12.1} - [11.1] = 0$ und mit
 $\widehat{11.12} + \widehat{12.1} - [11.1] = \{11.1\} - [11.1] = \iota\nu_{9}$
 $\nu_{11.12} + \nu_{12.1} + \iota\nu_{9} = 0$

Schreibt man diesen Gleichungen die Korrelaten k_1 , k_2 bis k_9 zu, so ergibt sich folgendes Schema für die Herleitung der Korrelatengleichungen aus den Fehlerbedingungsgleichungen und für die Aufstellung der Normalgleichungen für die Korrelaten.

Korrelatengleichungen

$p_i v_i$	$= a_i k_i$	+- b:	k,	+			
Lil	1	1 1	, · · · · ·	- 1	•	•	•

Gewicht	k_i	k_1	k_{2}	k_3	k_{i}	k_{z}	k_6	k_7	k_3	k_{9}
Gewiene	v_{ik}	ai	b_i	c_i	di	e _i	f_i	gi	11;	Ĵi
$(p_{1.8})$	l ^y (1.3)	+1								
$(p_{3.5})$	1'(3.5)	+1								
$(p_{5.10})$	ν _(5.10)	+1								
$(p_{10.1})$	ν _(10.1)	+1								
p _{1.2}	ν ₁₂		+1	,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,						
p _{2.3}	$\nu_{2.3}$		+1	 	······································					
P _{3.4}	$v_{3.4} = v_{4.5}$			$\begin{vmatrix} +1 \\ +1 \end{vmatrix}$				***************************************		
$(p_{5.7})$	V _(5.7)				+1					
$(p_{7 \ 10})$	ν _(7.10)				+1					
p _{5.6}	$v_{5.6}$					+1				
p _{6.7}	ν _{6.7}					+1				
p 1. 8	ν _{7.8}		*** ********				+1			
p _{8.10}	v _{8.10}					***************************************	+1			
P7.9	17.9							+1		
P9.10	<i>v</i> _{9.10}							+1	1 1	
$p_{10.11}$	ν.0.11								$\begin{vmatrix} +1 \\ +1 \end{vmatrix}$	
$(p_{11,1})$ $p_{11,12}$	$v_{(11.1)} = v_{11.12}$				***************************************					+1
P _{12.1}	$v_{12.1}$							***************************************		+1
<u>*</u>		$+1v_1=0$	$+i\nu_2=0$	$+1\nu_3=0$	$+ i \nu_4 = 0$	+ 105=0	$+\iota\nu_6=0$	$+iv_7 = 0$	$+ w_8 = 0$	

Normalgleichungen

I.
$$\left(\frac{1}{(p_{1.3})} + \frac{1}{(p_{3.5})} + \frac{1}{(p_{5.10})} + \frac{1}{(p_{10.1})}\right) k_1 + w_1 = 0$$

$$\operatorname{oder} k_1 = -\frac{v_1}{\left(\frac{1}{(p_{1.3})} + \frac{1}{(p_{3.5})} + \frac{1}{(p_{5.10})} + \frac{1}{(p_{10.1})}\right)} = -\{p_{1.1}\}.w_1$$

wobei $\{p_{1,1}\}$ das Gewicht der Summe der Sektorenwinkel ist.

II.
$$\left(\frac{1}{p_{1.2}} + \frac{1}{p_{2.3}}\right) \cdot k_2 + \nu_2 = 0$$
; oder: $k_2 = -\frac{\nu_2}{\frac{1}{p_{1.2}} + \frac{1}{p_{2.3}}} = -\{p_{1.3}\} \cdot \nu_2$

III. $\left(\frac{1}{p_{3.4}} + \frac{1}{p_{4.5}}\right) \cdot k_3 + \nu_3 = 0$; oder: $k_3 = -\frac{\nu_3}{\frac{1}{p_{3.4}} + \frac{1}{p_{4.5}}} = -\{p_{3.5}\} \cdot \nu_3$

$$\begin{aligned} &\text{IV.} \quad \left(\frac{1}{(p_{5.7})} + \frac{1}{(p_{7.10})}\right), k_4 + w_4 = 0; \text{ oder}; k_4 = -\frac{w_4}{\frac{1}{(p_{5.7})}} + \frac{1}{(p_{7.10})} = -\{p_{5.10}\}, w_4 \\ &\text{V.} \quad \left(\frac{1}{p_{5.6}} + \frac{1}{p_{6.7}}\right), k_5 + w_5 = 0; \text{ oder}; k_5 = -\frac{w_5}{\frac{1}{p_{5.6}}} + \frac{1}{p_{5.7}} = -\{p_{5.7}\}, w_5 \\ &\text{VI.} \quad \left(\frac{1}{p_{7.8}} + \frac{1}{p_{8.10}}\right), k_6 + w_6 = 0; \text{ oder}; k_6 = -\frac{w_6}{\frac{1}{p_{7.8}}} + \frac{1}{p_{8.10}} = -\{p_{7.10}\}, w_6 \\ &\text{VII.} \quad \left(\frac{1}{p_{7.9}} + \frac{1}{p_{9.10}}\right), k_7 + w_7 = 0; \text{ oder}; k_7 = -\frac{w_7}{\frac{1}{p_{7.9}}} + \frac{1}{p_{9.10}} = -\{p_{7.10}\}, w_7 \\ &\text{VIII.} \quad \left(\frac{1}{p_{10.11}} + \frac{1}{(p_{11.7})}\right), k_8 + w_8 = 0; \text{ oder}; k_8 = -\frac{w_8}{\frac{1}{p_{10.11}}} + \frac{1}{p_{9.10}} = -\{p_{10.1}\}, w_8 \\ &\text{IX.} \quad \left(\frac{1}{p_{11.12}} + \frac{1}{p_{12.1}}\right), k_9 + w_9 = 0; \text{ oder}; k_9 = -\frac{w_9}{\frac{1}{p_{11.12}}} + \frac{1}{p_{12.1}} = -\{p_{11.1}\}, w_9 \\ &\text{Damit werden die Verbesserungen}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &p_{(1.8)} &= -\frac{k_1}{(p_{1.8})} - \frac{(p_{1.1}) \cdot w_1}{(p_{1.8})}; & v_{3.6} &= -\frac{k_5}{p_{3.6}} = -\frac{(p_{7.7}) \cdot w_5}{p_{7.8}}; \\ &p_{(3.5)} &= -\frac{k_1}{(p_{3.6})} - \frac{(p_{1.1}) \cdot w_1}{(p_{5.10})}; & v_{7.8} &= -\frac{k_5}{p_{8.7}} = -\frac{(p_{7.7}) \cdot w_5}{p_{7.8}}; \\ &p_{(6.10)} &= -\frac{k_1}{(p_{5.10})} = -\frac{(p_{1.1}) \cdot w_1}{(p_{5.10})}; & v_{7.8} &= -\frac{k_6}{p_{7.8}} = -\frac{(p_{7.10})^2 \cdot w_6}{p_{7.8}}; \\ &p_{(1.2)} &= -\frac{k_2}{p_{1.2}} = -\frac{(p_{1.3}) \cdot w_1}{(p_{10.1})}; & v_{8.10} &= -\frac{k_6}{p_{8.10}} = -\frac{(p_{7.10})^2 \cdot w_7}{p_{7.9}}; \\ &p_{2.3} &= -\frac{k_2}{p_{1.2}} = -\frac{(p_{1.3}) \cdot w_2}{p_{2.3}}; & v_{9.10} &= -\frac{k_7}{p_{7.10}} = -\frac{(p_{7.10})^2 \cdot w_7}{p_{9.10}}; \\ &p_{3.4} &= -\frac{k_8}{p_{3.4}} &= -\frac{(p_{3.5}) \cdot w_3}{p_{3.4}}; & v_{10.11} &= -\frac{k_8}{p_{9.10}} &= -\frac{(p_{1.1}) \cdot w_9}{(p_{1.11})}; \\ &p_{(6.7)} &= -\frac{k_4}{(p_{3.5})} &= -\frac{(p_{3.5}) \cdot w_3}{(p_{3.5})}; & v_{11.12} &= -\frac{k_9}{p_{9.10}} &= -\frac{(p_{11.1}) \cdot w_9}{(p_{11.12})}; \\ &p_{(7.10)} &= -\frac{k_4}{(p_{7.10})} &= -\frac{(p_{7.10}) \cdot w_4}{(p_{7.10})}; & v_{11.12} &= -\frac{k_9}{p_{9.10}} &= -\frac{(p_{11.1}) \cdot w_9}{(p_{11.12})}; \\ &p_{(7.10)} &= -\frac{k_4}{(p_{7.10})} &= -\frac{(p_{7.10}) \cdot w_4}{(p_{7.10})};$$

Zur Auswertung der vorstehenden Ausdrücke müssen noch die allgemeinen arithmetischen Mittel für die Sektoren und für die Hauptzwischenwinkel und ihre Gewichte (i.k) sowie die Widersprüche wi berechnet werden. An Hand der Abbildung findet man hiefür folgende Ausdrücke:

 $v_{12.1} = -\frac{k_9}{p_{12.1}} = -\frac{\{p_{11.1}\} \cdot w_9}{p_{12.1}}$

Winkel	Sektoi	Beobachtung	Gewicht p	$\frac{1}{p}$
[1.2]		1.2	P _{1.2}	$\frac{1}{p_{1.2}}$
[2.3]		$\widehat{2.3}$	p _{2.3}	$\frac{1}{p_{2.8}}$
[1.3] über 2	1.3	$\{1.3\} = \widehat{1.2} + \widehat{2.3}$	$\{p_{1.3}\} = \frac{1}{\frac{1}{p_{1.2}} + \frac{1}{p_{2.3}}}$	$\left[\begin{array}{c} 1 \\ p_{ik} \end{array}\right]$
[1.3] unmittelbar		1.3	$p_{1 \ 3}$	
[1.3] allg. arith. Mittel		$(1.3) = \frac{p_{1.3}.\widehat{1.3} + \{p_{1.3}\}\{1.3\}}{p_{1.3} + p_{\{1.3\}}}$	$(p_{1.8}) = p_{1.8} + \{p_{1.8}\}$	$\frac{1}{(p_{1})}$
[3.4]		3.4	P3.4	$\frac{1}{p_{3.4}}$
[4.5]		$\widehat{4.5}$	P4.5	$\frac{1}{p_{4.5}}$
[3.5] über 4	3.5	$\{3.5\} = \widehat{3.4} + \widehat{4.5}$	$\{p_{3.5}\} = \frac{1}{\frac{1}{p_{3.4}} + \frac{1}{p_{4.5}}}$	$\left[\frac{1}{p_{ik}}\right]$
[3.5] unmittelbar		$\widehat{3.5}$	$p_{3.5}$	
[3.5] allg. arith. Mittel		$(3.5) = \frac{p_{3.5}.\widehat{3.5} + \{p_{3.5}\}\{3.5\}}{p_{3.5} + \{p_{3.5}\}}$	$(p_{3.5}) = p_{3.5} + \{p_{3.5}\}$	$\frac{1}{(p_{3.5})}$
[5.6]		5.6	P5.6	$\frac{1}{p_{5.6}}$
[6.7]		6.7	P6.7	$\frac{1}{p_{6.7}}$
[5.7] über 6		$(5.7) = \widehat{5.6} + \widehat{6.7}$	$\{p_{5.7}\} = \frac{1}{\frac{1}{p_{5.6}} + \frac{1}{p_{6.7}}}$	$\left[\frac{1}{p_{ik}}\right]$
[5.7] unmittelbar		5.7	$\frac{p_{5.6}}{p_{5.7}} + \frac{1}{p_{6.7}}$	
[5.7] allg. arith. Mittel		$(5.7) = \frac{p_{5.7}.\widehat{5.7} + \{p_{5.7}\}.\{5.7\}}{p_{5.7} + \{p_{5.7}\}}$	$(p_{5.7}) = p_{5.7} + \{p_{5.7}\}$	$\frac{1}{(p_{5.7})}$
[7.8]	5.10	7.8	P7.8	$\frac{1}{p_{7.8}}$
[8.10]		8.10	P8.10	$\frac{1}{p_{8.10}}$
[7.10] über 8		$\{7.10\}' = \widehat{7.8} + \widehat{8.10}$	$\{p_{7.10}\}' = \frac{1}{1}$	$\left[\frac{1}{p_{ik}}\right]$
			$p_{7.8} + p_{8.10}$	
[7.9]		7.9	P7.9	$\frac{1}{p_{7.9}}$
[9.10]		9.10	P9.10	$\frac{1}{p_{9.10}}$

Winkel	Sektoi	Beobachtung	Gewicht p	$\frac{1}{p}$
[7.10] über 9		$\{7.10\}$ " = $\widehat{7.9}$ + $\widehat{9.10}$	$\{p_{7.10}\}'' = \frac{1}{\frac{1}{p_{7.9}} + \frac{1}{p_{9.10}}}$	$\left[\frac{1}{p_{ik}}\right]$
[7.10] über 8		{7.10}'	$\{p_{7.10}\}'$,
[7.10] über 9		{7.10}"	$\{p_{7.10}\}''$	•
[7.10] unmittelbar		7.10	P7.10	
[7.10] allg. arith. Mittel		$(7.10) = \frac{p_{7.10} \cdot 7.10 + (p_{7.10})' \{7\}}{p_{7.10} + (p_{7.10})' + (p_{7.10})''}$	$(.10)' + \{p_{7.10}\}'' \{7.10\}''$ $(p_{7.10}) = p_{7.10} + \{p_{7.10}\}' + \{p_{7.10}\}''$	1 (p _{7.10})
[5.7] allg. arith. Mittel	5.10	(5.7)	(P5.7)	$\frac{1}{(p_{5.7})}$
[7.10] allg. arith.Mittel		(7.10)	(p _{7.10})	$\frac{1}{(p_{7.10})}$
[5.10] kombiniert		$\{5.10\} = (5.7) + (7.10)$	$\{p_{5,10}\} = \frac{1}{\frac{1}{(p_{5,7})} + \frac{1}{(p_{7,10})}}$	$\left[\frac{1}{p_{ik}} \right]$
[5.10] unmittelbar		5.10	(P5.7) (P7.10) P5.10	
[5.10] allg. arith.Mittel		$(5.10) = \frac{p_{5.10}.\widehat{5.10} + \{p_{5.10}\} \{5.10\}}{p_{5.10} + \{p_{5.10}\}}$	$(p_{5.10}) = p_{5.10} + \{p_{5.10}\}$	$\frac{1}{(p_{5.10})}$
[11.12]		$\widehat{11.12}$	P _{11.12}	$\frac{1}{p_{11.12}}$
[12.1]		$\widehat{12.1}$	P12.1	$\frac{1}{p_{12,1}}$
[11.1] über 12		$\{11.1\} = \widehat{11.12} + \widehat{12.1}$	$\{p_{11,1}\} = \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}$	$\left[\frac{1}{p_{ik}}\right]$
[11.1] unmittelbar		$\widehat{11.1}$	$p_{11.12}$ $p_{12.1}$ $p_{11.1}$	
[11.1] allg. arith.Mittel	10.1	$(11.1) = \frac{p_{11.1} \cdot \widehat{11.1} + \{p_{11.1}\} \cdot \{11.1\}}{p_{11.1} + \{p_{11.1}\}}$	$(p_{11.1}) = p_{11.1} + \{p_{11.1}\}$	$\frac{1}{(p_{11.1})}$
[10.11]		10.11	P10.11	$\frac{1}{p_{10.11}}$
[11.1] allg. arith. Mittel		(11.1)	(<i>p</i> _{11.1})	$\frac{1}{(p_{11.1})}$
[10.1] kombiniert		$\{10.1\} = \widehat{10.11} + (11.1)$	$\{p_{10.1}\} = \frac{1}{\frac{1}{p_{10.11}} + \frac{1}{(p_{11.1})}}$	$\left[\frac{1}{p_{ik}} \right]$
[10.1] unmittelbar		10.1	P _{10.1}	
[10.1] allg. arith. Mittel		$(10.1) = \frac{p_{10.1} \cdot \widehat{10.1} + \{p_{10.1}\} \cdot \{10.1\}}{p_{10.1} + \{p_{10.1}\}}$	$(p_{10.1}) = p_{10.1} + \{p_{10.1}\}$	$\frac{1}{(p_{10.1})}$

Damit können nun der Reihe nach

- 1. die vorläufigen Sektorenwinkel und Hauptzwischenwinkel und der Widerspruch w_1 ,
- 2. die endgültigen Sektorenwinkel,
- 3. die Widersprüche w_2 bis w_9 und
- 4. mit den Verbesserungen $\nu_{(i.k)}$, bzw. $\nu_{i.k}$ die übrigen endgültigen Winkel berechnet werden.

Tabelle 1: Stationsausgleichung bei der Sektorenmethode

Winkel	Sektor	Beobachtung	Gewicht p	$\frac{1}{p}$	Verbes- serung	Stations- ausgegl. Winkel
[1.2] [2.3] [1.3] über 2 [1.3] unmittelbar [1.3] allg. arith. Mittel	1.3	41 23 20,05 61 38 26,00 103 01 46,05 103 01 45,73 103 01 45,88	$ \begin{array}{c c} 11 \\ 12 \\ \hline 5,7 \\ 6,0 \\ \hline 11,7 \end{array} $	0,09 0,08 0,17	-0,05 -0,05 -0,10 +0,07	20,00 25,95 45,95 45,95
[3.4] [4.5] [3.5] über 4 [3.5] unmittelbar [3.5] allg. arith. Mittel	3.5	19 02 21,88 16 56 52,66 35 59 14,54 35 59 14,46 35 59 14,47	$ \begin{array}{c c} 3 \\ \hline 3 \\ \hline 1,5 \\ 8 \\ \hline 9,5 \end{array} $	0,33 0,33 0,66	+0,01 -0,00 +0,01 0,08	21,89 52,66 14,55
[5.6] [6.7] [5.7] über 6 [5.7] unmittelbar [5.7] allg. arith. Mittel [7.8] [8.10] [7.10] über 8 [7.9] [9.10]	5.10	45 56 31,94 9 47 16,49 55 43 48,43 55 43 49,10 55 43 49,01 35 50 20,12 46 26 04,60 82 16 24,72 12 58 12,09 69 18 11,16	2 4 1,3 8 9,3 5 5 2,5 4 7	0,50 0,25 0,11 0,20 0,20 0,40 0,25 0,14	$\begin{array}{r} +0.29 \\ +0.14 \\ \hline +0.43 \\ \hline -0.15 \\ -0.34 \\ -0.33 \\ \hline -0.67 \\ +0.51 \\ +0.29 \\ \end{array}$	32,23 16,63 48,86 19,78 4,27 24,05 12,60 11,45

[7.10] über 9 [7.10] über 8 [7.10] über 9 [7.10] unmittelbar [7.10] allg. arith. Mittel [5.7] allg. arith. Mittel [7.10] allg. arith. Mittel [5.10] kombiniert [5.10] unmittelbar	5.10	82 16 23,25 82 16 24,72 82 16 23,25 82 16 24,32 82 16 24,17 55 43 49,01 82 16 24,17 138 00 13,18 138 00 12,40	2,5 2,5 2,5 6,0 11,0 9,3 11,0 5,0 4,0	0,39	+0,80	24,05
[5.10] allg. arith. Mittel	1	138 00 12,83	9,0	0,11	+0,08	12,91
[11.12] [12.1] [11.1] über 12		33 01 22,77 21 38 22,85 54 39 45,62	4 4 2	0,25 0,25 0,50	$ \begin{array}{c c} -0.58 \\ -0.59 \\ -1.17 \end{array} $	22,19 22,26 44,45
[11.1] unmittelbar [11.1] allg. arith. Mittel [10.11]	10.1	54 39 43,79 54 39 44,40 28 19 02,08	4 6 5	0,17 0,20	+0,06	2,14
[10.1] kombiniert [10.1] unmittelbar [10.1] allg. arith. Mittel		82 58 46,48 82 58 46,53 82 58 46,52	2,7 8 10,7	0,37	+0,07	45,59

Tabelle 2: Horizontschluß und Abgleichung der Sektorenwinkel

Vorläufige Sek nach Ta Winkel		p	$\frac{1}{p}$	Ver- besserung	Stations- ausgegl. Winkel
(3.5) (5.10) (3.5)	03 01 45,88 05 59 14,47 08 00 12,83 02 58 46,52	11,7 9,5 9,0 10,7	0,09 0,10 0,11 0,09	+0,07 +0,08 +0,08 +0,07	45,95 14,55 12,91 46,59
$\begin{array}{ccc} \text{Ist:} & \Sigma &=& 38 \\ \text{Soll:} & \Sigma &=& 38 \\ \hline w_1 &=& \end{array}$	•		0,39	+0,30	60,00

Für die Fehlerrechnung können nach dem Vorschlag von Zoelly die Unterschiede ν zwischen den stationsausgeglichenen Winkeln und den Einzelsätzen verwendet werden. Wenn für insgesamt d verschiedene Winkel von denen n=1 Winkel für die Festlegung sämtlicher Richtungen notwendig sind, im ganzen t Sätze gemessen wurden, dann erhält man den mittleren Fehler der Gewichtseinheit, also des in einem Satz gemessenen Winkels aus

$$m_1 = \pm \sqrt[n]{\frac{\lceil \nu \nu \rceil}{t - n}}$$

Der mittlere Fehler des Satzmittels, bzw. eines ausgeglichenen Winkels für ein durchschnittliches Gewicht von $\frac{t}{d}$, bzw. $\frac{t}{u}$ wird dann

$$\mu_m = \pm m_1 \sqrt{\frac{d}{t}}$$
, bzw. $\mu_{m'} = \pm m_1 \sqrt{\frac{n}{t}}$.

Da nach der Ausgleichung alle Winkel gleicher Ordnung als gleichgewichtig betrachtet werden, verzichtet man darauf, die mittleren Fehler der Einzelwinkel streng vorzurechnen und begnügt sich mit den angegebenen Durchschnittswerten.

Baeschlin zieht es vor, die Fehlerrechnung mit Hilfe der Verbesserungen ν' durchzuführen, die sich aus den Unterschieden zwischen den ausgeglichenen Winkeln und den Satzmitteln der d verschiedenen Winkel ergeben. Damit wird der mittlere Fehler der Gewichtseinheit

$$m_2 = \pm \sqrt{\frac{[p \ v' \ v']}{d-n}}.$$

Da in den Satzmitteln die Kreisteilungsfehler fast vollständig getilgt sind, ist der Wert m_2 gegenüber m_1 frei vom Einfluß der periodischen Kreisteilungsfehler. Der Einfluß der Kreisteilungsfehler auf einen Winkel kann daher aus

$$\delta_w = \pm \sqrt{m_1^2 - m_2^2}$$

oder für Kreisdurchmesser aus

$$\delta_d = \pm \frac{\delta w}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{m_1^2 - m_2^2}{2}}$$

berechnet werden.

Zur Reduktion der kürzesten Weglänge in die geodätische Bezugsfläche

Von K. Hubeny, Graz

I.

Soll eine durch Funkmessung oder mit hochfrequent moduliertem Licht gemessene Strecke — eine Kürzeste im Sinne des Fermatschen Satzes — zu geodätischen Operationen verwendet werden, so ist diese Strecke auf das Rotationsellipsoid zu reduzieren. Nachstehend soll eine derartige Reduktion angegeben werden (siehe auch [1]).