Paper-ID: VGI_195208

Fehlertheoretische Untersuchungen der neueren Verfahren zur gegenseitigen Orientierung von Luftbildern

Hans Schmid [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **40** (2, 3, 4), S. 39–48, 75–82, 108–116

1952

BibTEX:

```
@ARTICLE{Schmid_VGI_195208,
Title = {Fehlertheoretische Untersuchungen der neueren Verfahren zur
    gegenseitigen Orientierung von Luftbildern},
Author = {Schmid, Hans},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {39--48, 75--82, 108--116},
Number = {2, 3, 4},
Year = {1952},
Volume = {40}
}
```

Fehlertheoretische Untersuchungen der neueren Verfahren zur gegenseitigen Orientierung von Luftbildern

Von H. Schmid, Wien

(18 Textfiguren)

A. EINLEITUNG

Zum Problem der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern sind in den letzten Jahren eine Anzahl von neuen Lösungen angegeben worden. Da die fehlertheoretische Untersuchung für einige dieser Verfahren noch aussteht, scheint es nützlich, diese nachzuholen und dabei die jeweils zu erwartende wahrscheinliche Genauigkeit mit der des numerischen Formalverfahrens zu vergleichen.

Allen Methoden sind dieselben Voraussetzungen wie Auswertehöhe ($h = -340$ *mm*), Modellbasis ($b = 110$ *mm*), Modellordinate der Randpunkte ($a = 110$ *mm*) und derselbe mittlere Fehler einer y-Parallaxenbeobachtung ($\mu = \pm 0{,}014$ *mm*) zu Grunde gelegt. Die Untersuchungen werden für ebenes Gelände bei Verwendung der sechs charakteristischen Punkte durchgeführt. Auswertehöhe, Modellbasis, Modellordinate der Randpunkte und der mittlere Fehler einer y-Parallaxenbeobachtung bleiben für alle Untersuchungen unverändert. An Hand der Veröffentlichung „Am Wildautographen A 5 ausgeführte Versuche ....“ von H. Kasper, Heerbrugg [1], ergeben sich für einige theoretisch erhaltene Resultate die praktischen Vergleichswerte. Die Übereinstimmung ist i. a. sehr gut.

Für folgende Orientierungsverfahren wurden die fehlertheoretischen Untersuchungen durchgeführt oder die Ergebnisse von bereits veröffentlichten Untersuchungen ähnlicher Art herangezogen:

1. Das numerische Formalverfahren (nach Hallert und Brandenberger).
2. Eine neue Variante des numerischen Punktgitterverfahrens nach Schmid.
3. Das numerische Verfahren für gebirgiges Gelände von Kasper.
4. Die optisch-mechanischen Verfahren (zwei verschiedene Varianten).
5. Das Verfahren von Bachmann.
6. Das Verfahren von Poivilliers.
7. Das graphische Verfahren von Krames.
8. Das Verfahren von Pauwen.

Die Grundgedanken dieser Untersuchungen sind zum Teil nicht neu, doch wurden sie anscheinend noch nirgends in gleicher Folgerichtigkeit verwirklicht. Die nachstehende fehlertheoretische Untersuchung der optisch-mechanischen Verfahren beruht auf einer neuen Art der **Fehleranalyse.** (H. Kasper [12] hat für die beim Bachmann'schen Verfahren auftretenden Restparallaxen bereits eine ähnliche Fehlerbetrachtung durchgeführt.)

Diese Analyse wurde zum erstenmal auch zur Berechnung mittlerer Fehler der Orientierungselemente bei verschiedenen optisch-mechanischen Verfahren angewendet. Für diese würde eine Berechnung nach den üblichen Methoden der

Ausgleichsrechnung aus den im folgenden Abschnitt B dargelegten Gründen zu unrichtigen Ergebnissen führen. Bei den anderen untersuchten Verfahren wurde die Fehlerrechnung ebenfalls den ausgeführten Operationen genau angepaßt, wonach die theoretisch gewonnenen Ergebnisse weitgehendst mit praktisch gefundenen Werten übereinstimmen. Beim graphischen Verfahren von K r a m e s wurden für die Orientierungselemente auf den Fall eines Widerspruches $w \neq 0$ erweiterte Formeln angegeben, die zu fehlertheoretisch weitaus günstigeren Ergebnissen führen, während für die bisherigen Formeln $w = 0$ vorausgesetzt war. In den Tabellen III und IV am Schluß der Arbeit werden die gewonnenen Ergebnisse in übersichtlicher Form zusammengestellt.

B. GRUNDSÄTZLICHE BETRACHTUNGEN

Wie von zahlreichen Autoren immer wieder festgestellt wurde, muß die fehlertheoretische Untersuchung eines Orientierungsvorganges möglichst alle Operationen, die zur Herstellung eines stereoskopischen Modelles nötig sind, in der tatsächlich durchgeführten Reihenfolge beachten. Wird diese Reihenfolge nicht beachtet, so werden die theoretisch erhaltenen Werte nicht mit den aus praktischen Messungen sich ergebenden Werten übereinstimmen, oder mathematisch ausgedrückt: es werden die Korrelationskoeffizienten $Q_{\alpha\beta}$ der theoretischen und praktischen Untersuchungen nicht gleich groß sein. Die Korrelationskoeffizienten sind bekanntlich Abhängigkeitszahlen. Wird die **Reihenfolge** der Beobachtungen bei der Fehleruntersuchung nicht streng eingehalten, so ändern sich die Abhängigkeiten der Orientierungselemente und damit auch die Korrelationskoeffizienten.

Diese wichtige Tatsache wurde bei früheren Untersuchungen oft außer Acht gelassen, wodurch größere Differenzen zwischen praktisch erhaltenen und theoretisch ermittelten Werten entstanden. W. K. B a c h m a n n und W. S c h e r m e r h o r n haben auf diese notwendige Voraussetzung für alle fehlertheoretischen Untersuchungen wiederholt hingewiesen [2], [3].

C. DIE FEHLERUNTERSUCHUNG

1. *Das numerische Formalverfahren (nach Hallert und Brandenberger* [4], [5])

Bekanntlich sind die Gleichungen für die Orientierungselemente und deren mittlere Fehler die folgenden:

$$d\omega = -\frac{h}{4a^2}(-2\,p_1 - 2\,p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) \qquad m_\omega = \pm\,\mu\,\frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$dby = -h\,.\,d\omega - \frac{b}{2}\,d\varkappa - \frac{1}{2}\,(p_1 + p_2) \qquad m_{by} = \pm\,\mu\sqrt{\frac{9h^4 + 12h^2a^2 + 8a^4}{12\,a^4}}$$

$$(1{,}1)\quad d\varkappa = \frac{1}{3b}(-p_1 - p_3 - p_5 + p_2 + p_4 + p_6) \qquad (1{,}1\,a)\quad m_\varkappa = \pm\,\mu\,\frac{1}{b}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$dbz = \frac{h}{2a}(-p_4 + p_6) \qquad m_{bz} = \pm\,\mu\,\frac{h}{2a}\sqrt{2}$$

$$d\varphi = \frac{h}{2\,ab}(-p_3 + p_4 + p_5 - p_6) \qquad m_\varphi = \pm\,\mu\,\frac{h}{ab}$$

Für die Restparallaxen erhält man in den Randpunkten

$$\mp \frac{1}{6}(p_1 - p_2) \pm \frac{1}{12}(p_3 - p_4 + p_5 - p_6) = \mp \frac{1}{12} \cdot w$$

wobei die oberen Vorzeichen für die Punkte 3 und 5 und die unteren für die Punkte 4 und 6 gelten. In den Nadirpunkten 1 und 2 erhält man doppelt so große Restparallaxen, wobei die oberen Vorzeichen für den Punkt 2 und die unteren für den Punkt 1 gelten. Die mittleren Restparallaxen sind demnach in den Randpunkten $\pm \mu \sqrt{\frac{1}{12}}$ und in den Nadirpunkten $\pm \mu \sqrt{\frac{1}{3}}$. Die Punktbezeichnung zeigt die Fig. 1.

2. *Das numerische Verfahren nach H. Schmid*

Der Verfasser hat im 1. Teil seiner Dissertation [6] eine neue Variante des numerischen Formalverfahrens entwickelt und hieraus Bestimmungsgleichungen für die Orientierungselemente, deren mittlere Fehler und die mittleren Restparallaxen abgeleitet. Der Grundgedanke bei diesem Verfahren ist folgender: Da die allgemeine Formel für den mittleren Fehler eines Orientierungselementes $m_\alpha = \pm \mu \sqrt{Q_{\alpha\alpha}}$ lautet, kann der mittlere Fehler eines Elementes nur kleiner werden, wenn entweder a) μ oder b) $Q_{\alpha\alpha}$ kleiner wird. Da μ, der mittlere Fehler einer y-Parallaxenbeobachtung, eine gewisse untere Grenze aus optisch-mechanischen Gründen nicht unterschreiten kann, bleibt nur noch die Möglichkeit $Q_{\alpha\alpha}$ zu verkleinern. Zu diesem Zweck wird an Stelle der sechs charakteristischen Punkte ein **„Punktgitter“** eingeführt, in dem die Punkte so angeordnet sind, daß in jeder der zur x-Achse normalen R Punktreihen $(2R-1)$ Orientierungspunkte liegen (vgl. Fig. 1a).

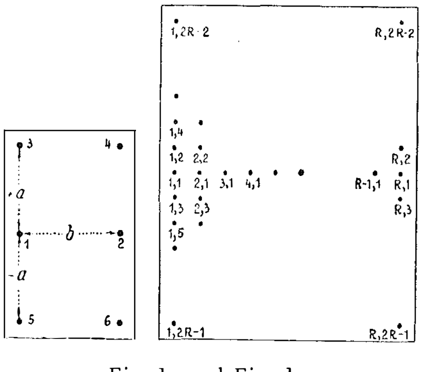


Fig. 1 und Fig. 1a

Führt man nun mit diesen $R(2R-1)$ Orientierungspunkten eine formale Ausgleichung nach vermittelten Beobachtungen durch, so ergeben sich beim Folgebildanschluß für die Orientierungselemente folgende Werte [1]).

[1]) Die Doppelsummen der Gleichungen (2, 1) sind in einer vorhergehenden Arbeit des Verfassers [6] in einfache Summen aufgelöst worden.

$$d\omega = \frac{15\,h\,(R-1)}{a^2\,.\,R^2\,(4\,R^2-1)\,(2\,R-3)} \sum_{j=1}^{R} \left\{ \sum_{k=1}^{2R-1} p_{jk}\,.\,R\,(R-1) - 3\,.\,\sum_{k=1}^{R-1} (p_{j2k} - p_{j2k-1})\,k^2 \right\}$$

(2,1)

$$d\varkappa = -\,\frac{6}{b\,.\,R\,(2\,R-1\,(R+1)} \sum_{k=1}^{2R-1} \sum_{j=1}^{R-1} p_{jk}[R-(2\,j-1)]$$

$$d\varphi = -\,\frac{18\,h}{a\,b\,.\,R^2\,(2\,R-1)\,(R+1)} \left\{ k[R-(2\,j-1)] \sum_{j=1}^{R} \sum_{k=1}^{R-1} (p_{j2k} - p_{j2k+1}) \right\}$$

$$dbz = -\,\frac{6\,h}{a\,R^2\,(2\,R-1)\,(R+1)} \left\{ k\,[(3\,j-1)-R] \sum_{j=1}^{R} \sum_{k=1}^{R-1} (p_{j2k} - p_{j2k+1}) \right\}$$

$$dby = -\,h\,.\,d\omega - \frac{b}{2}\,.\,d\varkappa - \frac{3\,.\,(3\,R^2-3\,R-1)}{R\,(4\,R^2-1)\,(2\,R-3)} \sum_{j=1}^{R} \sum_{k=1}^{2R-1} p_{jk} +$$

$$+\,\frac{15}{R\,(4\,R^2-1)\,(2\,R-3)} \sum_{j=1}^{R} \sum_{k=1}^{R-1} (p_{j2k} + p_{j2k+1})\,.\,k^2$$

Als mittlere Fehler der Orientierungselemente ergeben sich:

$$m_{\omega} = \pm\,\mu\,\frac{h}{a^2}\,.\,\frac{3\,(R-1)}{R} \sqrt{\frac{5\,(R-1)}{(4\,R^2-1)\,(2\,R-3)}} \qquad m_{bz} = \pm\,\mu\,\frac{h}{a}\,.\,\frac{1}{R} \sqrt{\frac{6\,(R-1)}{R+1}}$$

$$m_{\varkappa} = \pm\,\mu\,\frac{2}{b}\,.\,\sqrt{\frac{3\,(R-1)}{R\,(2\,R-1)\,(R+1)}}$$

(2,1 a)

$$m_{by} = \pm\,\mu \sqrt{\frac{2}{R\,(R+1)} + \frac{5\,(R-1)\,[3\,h^2\,(R-1)+a^2\,R]^2}{R^2\,(4\,R^2-1)\,(2\,R-3)\,.\,a^4}}$$

$$m_{\varphi} = \pm\,\mu\,\frac{h}{a\,b}\,.\,\frac{6\,(R-1)}{R} \sqrt{\frac{1}{(2\,R-1)\,(R+1)}}$$

Für $R = 2$ erhält man selbstverständlich dieselben Ergebnisse wie im Punkt 1.

Die folgende Tabelle zeigt eine Zusammenstellung der mittleren Fehler des Formalverfahrens und der Variante von H. Schmid für die Plattenkammer *RC* 7 mit Aviotar $f = 170$ *mm*, Format 150×150 *mm*, bei einer Arbeitshöhe $Z = -340$ *mm*, einer Modellbasis von $b = 110$ *mm* und einer ebenso großen Ordinate der Randpunkte, sowie einem mittleren Parallaxenbeobachtungsfehler im Modell von $\mu = \pm\,0{,}014$ *mm* (entsprechend einem Beobachtungsfehler im Bild von $\mu = \pm\,0{,}007$ *mm*).

Tabelle I

		m_{ω}	m_{by}	$m_{\varkappa}$	m_{bz}	m_{φ}
Num. Formalverfahren ($R = 2$ nach Schmid)		$\pm\,2^{c}2$	$\pm\,0{,}142$ *mm*	$\pm\,0^{c}7$	$\pm\,0{,}030$	$\pm\,2^{c}5$
Variante	$R = 4$	1,2	0,069	0,4	0,020	1,9
von Schmid	$R = 3$	1,6	0,087	0,5	0,025	2,2

Die Berechnung der mittleren Restparallaxen zeigt eine umso raschere Konvergenz gegen 1, je mehr Punkte zur gegenseitigen Orientierung Verwendung finden, d. h. die Restfehlerverteilung wird umso gleichmäßiger, je mehr Orientierungspunkte (Beobachtungen) zur Verfügung stehen. Dieses Ergebnis steht im vollsten Einklang mit der Gaußschen Fehlertheorie. Für $R = 4$ erhält man z. B. für die mittleren Restparallaxen in den Randpunkten $\pm$ 0,77 μ und in den Nadirpunkten $\pm$ 0,92 μ, gegenüber $\pm$ 0,29 μ und $\pm$ 0,58 μ bei der Verwendung von nur 6 Orientierungspunkten.

3. *Das numerische Verfahren für gebirgiges Gelände von H. Kasper*

H. Kasper verwendet bei diesem Verfahren [7] die von L. Pauwen in seinem Verfahren [8] festgesetzte wichtige Beziehung

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{z} = k. \tag{3,1}$$

Diese Beziehung gilt für jedes Gelände, wenn nur die Bildordinaten y' aller Randpunkte (absolut genommen) gleich groß sind. Es läßt sich nun sehr leicht zeigen, daß dieses numerische Verfahren nur bei e b e n e m Gelände dieselben Ergebnisse gibt, wie die Orientierung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Da dieses Verfahren hauptsächlich für coupiertes Gelände gedacht ist, soll im folgenden kurz über die Untersuchungsergebnisse bei nichthorizontalem Gelände berichtet werden:

Die Genauigkeit von ω steigt für den Fall eines in der Flugrichtung liegenden Höhenrückens, sie sinkt im Falle eines Längstales (Gefährliche Räume). Eine die x-Achse beinhaltende und um α geneigte Geländeebene läßt die Genauigkeit umsomehr anwachsen, je größer α wird. Eine durch die y-Achse gehende und geneigte Geländeebene bleibt ohne Einfluß auf die ω-Genauigkeit. Für die Genauigkeit von $\varkappa$ sind ein Höhenrücken und ein in der Flugrichtung ansteigendes Gelände günstig, während ein quergeneigtes Gelände die Genauigkeit herabdrückt. Verglichen mit der Bezugsebene durch die Punkte 3 bis 6 liefert der Höhenrücken auch für by eine größere Genauigkeit, während die quergeneigte und die in der Flugrichtung ansteigende Geländeebene eine Genauigkeitsverringerung hervorrufen würden. Ein Höhenrücken bleibt für die Genauigkeit von φ und bz ohne Einfluß. Die quergeneigte Geländeebene verringert sie, während ein in der Flugrichtung ansteigendes Gelände sie vergrößert.

4. *Die optisch-mechanischen Verfahren*

Bei der Berechnung der mittleren Fehler der Orientierungselemente aus praktischen Messungen, gleichgültig um welches Orientierungsverfahren es sich handelt, wird i. a. folgender Weg eingeschlagen:

a) n-malige Wiederholung des zu untersuchenden Vorganges mit demselben Plattenpaar. Aus den Ablesungen am Autographen ergeben sich mittels $m_\alpha = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n}}$, wobei die Größen v die Differenzen zwischen den einzelnen Ablesungen und einem aus allen Ablesungen gebildeten artihmetischen Mittel bedeuten, die mittleren Fehler der Orientierungselemente ($\alpha = \varphi, \varkappa, \omega, bz$ und by).

b) Jeder einzelne Orientierungsvorgang beginnt bei einer Bündellage, bei der in allen sechs Orientierungspunkten y-Parallaxen existieren, die größer als μ sind.

c) Die zwei zu untersuchenden Varianten der optisch-mechanischen Orientierung beginnen mit folgenden Operationen:

1. Wegschaffen von p_2 mit by
2. Wegschaffen von p_1' mit $\varkappa_2$ ($p_1' = p_1 - p_2$)
3. Wegschaffen von p_4'' mit bz ($p_4'' = p_4 - p_2$)
4. Wegschaffen von p'''_3 mit φ_2 ($p'''_3 = p_3 - p_1 - p_4 + p_2$)

Nach Beendigung dieser Anfangsphase treten nur noch in den Punkten 5 und 6 y-Parallaxen auf. Die endgültige optisch-mechanische Orientierung kann sodann auf verschiedene Arten erfolgen. Hievon sollen zwei Varianten untersucht werden.

I. Variante: Die y-Parallaxe in einem der beiden Punkte 5 oder 6 wird zur Ermittlung von $d\omega$ herangezogen, das heißt $d\omega$ wird nur aus einem Normalschnitt zur x-Achse bestimmt.

II. Variante: Das arithmetische Mittel aus den y-Parallaxen in 5 und 6 wird zur Bestimmung von $d\omega$ verwendet, d. h. $d\omega$ wird aus zwei Normalschnitten zur x-Achse bestimmt. Handelt es sich um gebirgiges Gelände, so wird man die von Kasper in [9] angegebene Berechnung von $d\omega$ anwenden. Der Überkorrektionsfaktor ist bekanntlich für ebenes Gelände in den Randpunkten

$$l = 1/2 \cdot \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)$$

und in den Nadirpunkten

$$l' = 1/2 \cdot \frac{h^2}{a^2}.$$

Die 2. Korrektur von by (dby_{II}) ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der nach Eindrehung von $d\omega$ entstandenen Parallaxen $\overline{p}_2$, $\overline{p}_4$ und $\overline{p}_6$. Die Korrektur $d\varkappa_{II}$ ergibt sich aus dem $\frac{1}{b}$-fachen arithmetischen Mittel der y-Parallaxen $\overline{p}_1'$, $\overline{p}_3'$ und $\overline{p}_5'$. Die Korrektur dbz_{II} erhält man aus der halben Differenz von $\overline{p}_4'$ und $\overline{p}_6'$ durch Multiplikation mit $\frac{h}{a}$. Die Korrektur $d\varphi_{II}$ erhält man schließlich als $\frac{h}{ab}$-fache halbe Differenz von $\overline{p}_3''$ und $\overline{p}_5''$.

I. Variante: Vor Beginn des Orientierungsvorganges bestehen in den Punkten 1 bis 6 die y-Parallaxen $p_1, p_2, \ldots . p_6$. Zur besseren Verfolgung der einzelnen Operationen seien ihre Einflüsse auf die einzelnen y-Parallaxen graphisch festgehalten, wobei die numerische Größe (p_n) und ihr Beobachtungsfehler (μ_α) in getrennten Figuren dargestellt werden. Mit Q_α wird nach Tienstra das Gewichtssymbol von α bezeichnet. Die Rechenregeln für die Tienstrasche Symbolik werden als bekannt vorausgesetzt [10].

Vor der ersten Operation bestehen also in den sechs charakteristischen Punkten folgende y-Parallaxen:

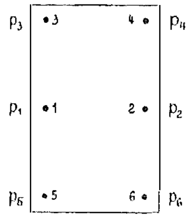


Fig. 2

Die entsprechenden Beobachtungsfehler sind in allen Punkten noch Null. Es folgt die 1. O p e r a t i o n: im Punkt 2 wird mittels by die Parallaxe zum Verschwinden gebracht. Die Restparallaxe in 2 wird nach diesem Vorgang $\pm\ \mu_y$ sein, wobei $|\mu_y| \leqq |\mu|$ sein muß. Dieser Beobachtungsfehler bewirkt eine um μ_y fehlerhafte by-Einstellung, wodurch wieder in allen 6 Orientierungspunkten die neuentstandenen y-Parallaxen um μ_y fehlerhaft sein werden. Die Fehlerverteilung und die y-Parallaxen in den 6 Punkten nach der 1. Operation zeigen die Figuren 3a und 3:

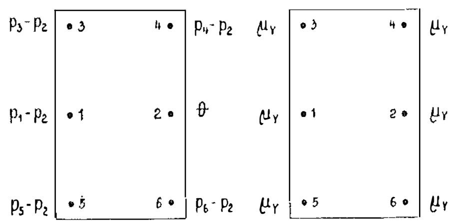


Fig. 3 und Fig. 3a

Die vorläufige by-Einstellung dby_I ist demnach gleich $-\,p_2$ (4,1) und ihr Gewichtssymbol Q_{byI} ist gleich μ_y (4,1a). Im Punkt 1 wird die neuentstandene Parallaxe $p_1' = p_1 - p_2$ mit $\varkappa$ weggestellt (2. O p e r a t i o n). Es muß wieder $|\mu_\varkappa| \leqq |\mu|$ sein, d. h. unter der Beobachtungsgenauigkeitsgrenze liegen. Der Fehler μ_y wird daher gewissermaßen zum Verschwinden gebracht. In den Punkten 1, 3 und 5 bleiben nach der 2. Operation die Fehler $\mu_\varkappa$ zurück. Die Parallaxen und die Fehlersymbole nach der 2. Operation sind in den folgenden Figuren 4 und 4a dargestellt.

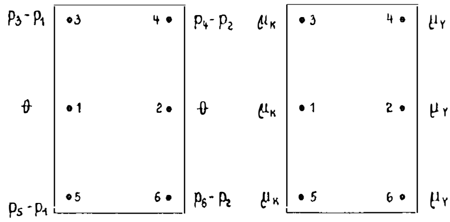


Fig. 4 und Fig. 4 a

Für das $d\varkappa_{\mathrm{I}}$ ergibt sich aus Fig. 3 sofort

$$d\varkappa_{\mathrm{I}} = \frac{1}{b}(-p_1 + p_2) \tag{4,2}$$

und aus den Fig. 4a und 3a liest man sofort für das Gewichtssymbol

$$Q_{\varkappa\mathrm{I}} = \frac{1}{b}(-\mu_y + \mu_\varkappa) \qquad \text{ab.} \tag{4,2 a}$$

Im Punkt 4 wird durch die 3. O p e r a t i o n mit bz die Parallaxe weggestellt. Zurückbleiben kann wieder nur eine Restparallaxe $|\mu_{bz}| \leqq |\mu|$. Der bestehende Parallaxenfehler μ_y im Punkt 4 wird durch diese Operation wieder zum Verschwinden gebracht. In den anderen Einflußpunkten von bz (Punkte 3, 5 und 6) wird danach wieder der μ_y-Fehler mit dem entgegengesetzten Vorzeichen auftreten. Es bleiben nach dieser Operation folgende y-Parallaxen im Modell (Fig. 5) und folgende Restparallaxensymbole sind entstanden (Fig. 5a):

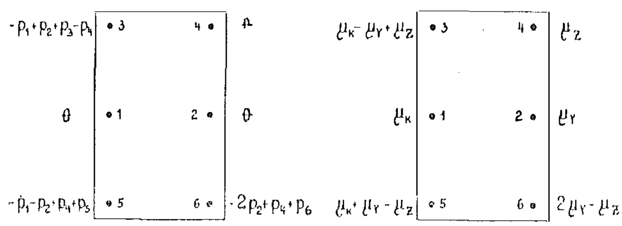


Fig. 5 und Fig. 5 a

Aus Fig. 4 folgt

$$dbz_{\mathrm{I}} = \frac{h}{a}(-p_4 + p_2) \tag{4, 3}$$

und aus den Fig. 4a und 5a ergibt sich

$$Q_{bz\mathrm{I}} = \frac{h}{a}(-\mu_y + \mu_{bz}) \tag{4, 3a}$$

Analoge Überlegungen gelten nun noch für φ im Punkte 3. Schließlich hat man nach der 4. O p e r a t i o n folgende Parallaxen (Fig. 6) und Restparallaxensymbole (Fig. 6a):

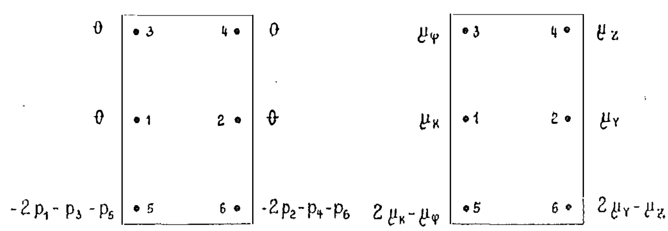


Fig. 6 und Fig. 6a

Aus der Fig. 5 folgt

$$d_{\varphi \mathrm{I}} = \frac{h}{ab}\,(+p_1 - p_2 - p_3 + p_4) \tag{4, 4}$$

und aus den Fig. 6a und 5a ergibt sich

$$Q_{\varphi \mathrm{I}} = \frac{h}{ab}\,(\mu_y - \mu_\varkappa - \mu_z + \mu_\varphi) \tag{4, 4a}$$

Nehmen wir an, $d\omega$ würde aus der Parallaxe im Punkt 5 bestimmt werden. Man mißt also p_5^{IV} mit der by-Schraube, dabei wird ein Messungsfehler $|\mu_5| \leqq |\mu|$ gemacht. Für das Gewichtssymbol von $d\omega$ besteht die Gleichung

$$\frac{a^2 + h^2}{h}\,Q_\omega = -l\,(2\,\mu_\varkappa - \mu_\varphi + \mu_5)$$

und analog für $d\omega$

$$\frac{a^2 + h^2}{h}\,d\omega = -l\,(-2\,p_1 + p_3 + p_5).$$

Aus den beiden Gleichungen ergibt sich für

$$d\omega = -\frac{h}{2a^2}\,(-2\,p_1 + p_3 + p_5) \qquad \text{und für} \tag{4, 5}$$

$$Q_\omega = -\frac{h}{2a^2}\,(2\,\mu_\varkappa - \mu_\varphi + \mu_5). \tag{4, 5a}$$

Nach dem Eindrehen von $d\omega$ (5. O p e r a t i o n) ergeben sich als y-Parallaxen, bzw. Restparallaxensymbole:

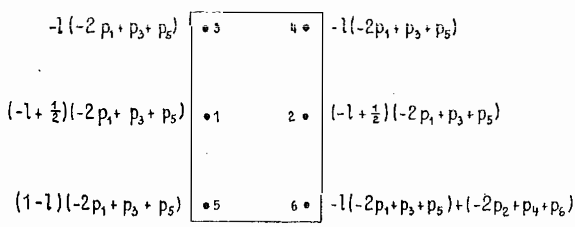


Fig. 7

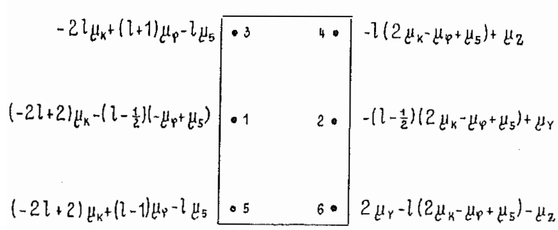


Fig. 7a

Aus der Fig. 7 ergibt sich nun sofort

$$(4,\,6)\qquad dby_{\mathrm{II}} = \left(l - \frac{1}{2}\right)(-2p_1 + p_3 + p_5)$$

Die Summe von dby_{I} und dby_{II} ergibt den endgültigen Wert von by.

$$(4,\,7)\qquad dby = \frac{h^2}{2a^2}(-2p_1 + p_3 + p_5) - p_2$$

Da jeder Orientierungsvorgang mit der Anfangsstellung (Vertikalparallaxen in allen 6 Orientierungspunkten) beginnt, sind bereits die mittleren Fehler der ersten Einstellungen für die endgültigen mittleren Fehler der Orientierungselemente von Bedeutung. Da sich die endgültigen Orientierungselemente als Summe der entsprechenden Größen $d\alpha_{\mathrm{I}} + d\alpha_{\mathrm{II}}$ ergeben, gilt analog für die endgültigen Gewichtssymbole die Gleichung

$$(4,\,8)\qquad Q_\alpha = Q_{\alpha\mathrm{I}} + Q_{\alpha\mathrm{II}}$$

Nach Einstellung von dby_{II} (6. Operation) ergeben sich folgende Parallaxen und Fehlersymbole in den Modellpunkten:

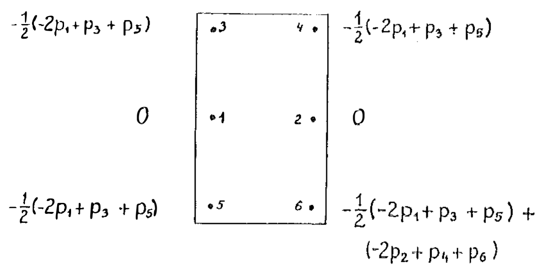


Fig. 8

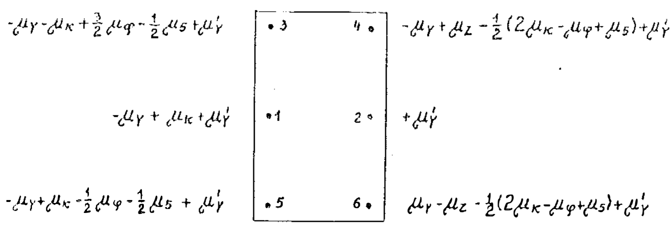


Fig. 8a

Aus den Fig. 8a und 7a folgt für das Gewichtssymbol von dby_{II}

$$(4,\,6\,\mathrm{a})\qquad Q_{by\mathrm{II}} = -\mu_y + \left(l - \frac{1}{2}\right)(2\mu_\varkappa - \mu_\varphi + \mu_5) + \mu'_y$$

Schließlich wird nach Gleichung (4, 8)

$$(4,\,7\,\mathrm{a})\qquad Q_{by} = \left(l - \frac{1}{2}\right)(2\mu_\varkappa - \mu_\varphi + \mu_5) + \mu'_y$$

(Fortsetzung folgt)

Unabhängig vom Verfasser hat Herr Dipl.-Ing. M i t t e r auf einem anderen Weg eine Formel abgeleitet, in welcher an Stelle des $\sin^3 \zeta$ im zweiten Korrektionsglied $\sin^2 \zeta$ erscheint, während die übrige Formel mit der genannten Formel (8) übereinstimmt. Der Grund dieses Unterschiedes liegt in der Art der Annäherung; während in der Formel (8) ein negatives Restglied r vorkommt, wird dieses Restglied bei Mitter immer positiv. Man könnte daher irgend einen Mittelweg suchen und statt $\sin^3 \zeta$ oder $\sin^2 \zeta$ einfach $\sin^{2\cdot 5} \zeta$ in die Formel einführen. Dem steht jedoch die Tatsache entgegen, daß in jedem Falle der zu erwartende Fehler nur Bruchteile von *mm* ausmachen wird, also beide Formeln als gleichwertig angesehen werden können und die Einführung der Potenzexponenten 2,5 eine unnötige Komplikation darstellen würde, zumal in jedem Fall der Fehler aus der Formel, bzw. aus der Rechentafel weit unter der Meßgenauigkeit liegen würde.

Es besteht noch die Möglichkeit, mittels zweier weiterer Nomogramme die gesamte Auswertung der Formel (8) unter Ausschaltung von Funktionstafeln und Rechenmaschine mit Millimetergenauigkeit graphisch durchzuführen. Das Nomogramm für das erste Glied beruht auf der einfachen Transformation:

$$[l'] \sin \zeta = [l'] - [l'] \; (1 - \sin \zeta), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

während sich das zweite Glied unmittelbar graphisch darstellen läßt.

Die Verwendung der Formel (8) stellt nicht bloß die Herabsetzung der notwendigen Arbeitszeit auf einen Bruchteil der früheren dar; als weiteren Vorteil kann die Ausschaltung einer Reihe von Irrtumsmöglichkeiten und die Tatsache, daß die Rechnung immer der Vorstellung entspricht, angeführt werden.

Fehlertheoretische Untersuchungen der neueren Verfahren zur gegenseitigen Orientierung von Luftbildern

Von H. S c h m i d, Wien

(Fortsetzung)

Fährt man nun in analoger Weise fort, so erhält man schließlich von sämtlichen Orientierungselementen und ihren Fehlersymbolen die jeweils 2. Komponenten. Auf Grund der Gleichung (4, 8) erhält man schließlich die Gesamtverbesserungen der Orientierungselemente sowie deren mittlere Fehler. Zur Bestimmung von $d\varkappa$ und $d\varphi$ wäre noch hinzuzufügen, daß auf Grund der jeweils vorhergehenden y-Parallaxeneindrehungen die 2. Komponenten der Elemente $\varkappa$ und φ Null werden. Dennoch wird man, wie die entsprechenden Fehlerverteilungen zeigen, kleine Verbesserungen an beiden Elementen anbringen müssen.

Mit Hilfe der Rechenregeln von Tienstra lassen sich nun die mittleren Fehler und die Korrelationskoeffizienten der Orientierungselemente leicht berechnen. Da die Beobachtung der y-Parallaxen in den Punkten u n a b h ä n g i g voneinander erfolgt, sind nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz die Produkte der Gewichtssymbole der einzelnen Parallaxenbeobachtungen $\mu_\alpha \cdot \mu_\beta$ alle Null und die

Produkte $\mu_\alpha \,.\, \mu_\alpha$ alle 1. Somit ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen, bzw. mittlere Fehler für die Orientierungselemente!:

(4, 9)

$$d\omega = -\frac{h}{2a^2}\left(-2\,p_1 + p_3 + p_5\right)$$

$$dby = -\,p_2 + \frac{h^2}{2a^2}\left(-2\,p_1 + p_3 + p_5\right)$$

$$d\varkappa = \frac{1}{b}\left(-\,p_1 + p_2\right)$$

$$dbz = \frac{h}{2a}\left(-2p_1 + 2p_2 + p_3 - 2p_4 + p_5\right)$$

$$d\varphi = \frac{h}{ab}\left(p_1 - p_2 - p_3 + p_4\right)$$

(4, 9a)

$$m_\omega = \pm\,\mu\,\frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$m_{by} = \pm\,\mu\,\sqrt{\frac{3\,h^4}{2\,a^4} + 1}$$

$$m_\varkappa = \pm\,\mu\,\frac{1}{b}\sqrt{2}$$

$$m_{bz} = \pm\,\mu\,\frac{h}{2a}\sqrt{14}$$

$$m_\varphi = \pm\,\mu\,\frac{2\,h}{a\,b}$$

Für die mittleren Restparallaxen ergeben sich in den Punkten 1 bis 4 die Werte $\pm\,\mu$ und in den Punkten 5 und 6 $\pm\,\mu\sqrt{11}$.

II. Variante: Die Anfangsphase ist dieselbe wie bei Variante I. Für die Bestimmung von $d\omega$ werden jetzt die y.-Parallaxen in Punkten zweier Normalebenen zur x-Achse herangezogen, woraus sich für $d\omega$ und Q_ω folgende Werte ergeben:

(4, 10)
$$d\omega = -\frac{h}{4a^2}\left(-2p_1 - 2p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6\right)$$

$$Q_\omega = -\frac{h}{4a^2}\left(2\mu_\varkappa + 2\mu_y - \mu_z - \mu_\varphi + \mu_5 + \mu_6\right),$$

woraus der mittlere Fehler $m_\omega = \pm\,\mu\,\frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{3}{4}}$ folgt. Die Berechnung der II. Einstellungen

und der endgültigen Werte soll hier wieder für das erste Element detailliert gezeigt werden, da nunmehr zum Unterschied von der I. Variante zusätzliche Parallaxenmessungen vorgenommen werden müssen, die die Fehlerrechnung wesentlich beeinflussen. Nach Einstellung von $d\omega$ ergeben sich in den Orientierungspunkten folgende Parallaxen, bzw. Fehlersymbole: (In den folgenden Figuren und Gleichungen bedeutet $S_p = -2p_1 - 2p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$).

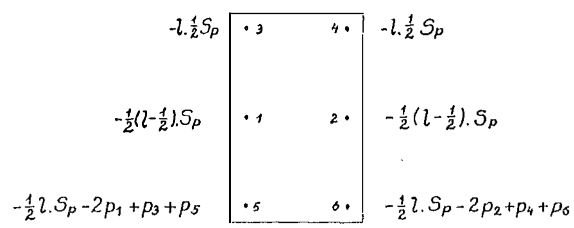


Fig. 9

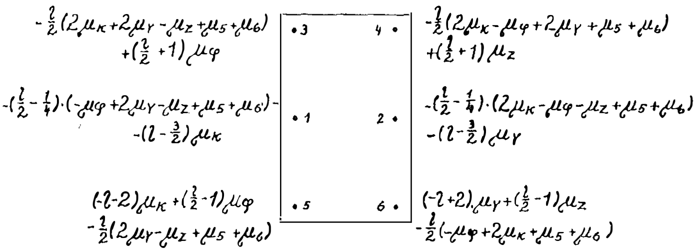


Fig. 9a

dby_{II} ergibt sich bei dieser Variante als arithmetisches Mittel der Modellparallaxen in den Punkten 2, 4 und 6:

$$dby_{\text{II}} = \frac{1}{2}\, l \,.\, S_p + \frac{1}{6}\, p_1 + \frac{5}{6}\, p_2 - \frac{1}{12}\,(p_3 + p_5) - \frac{5}{12}\,(p_4 + p_6).$$

dby_{I} ergab sich aus der Anfangsphase, die ja für beide Varianten die gleiche ist, mit $-p_2$.

$$(4,11) \qquad dby = \frac{1}{2}\, l \,.\, S_p + \frac{1}{6}\,(p_1 - p_2) - \frac{1}{12}\,(p_3 + p_5) - \frac{5}{12}\,(p_4 + p_6).$$

Setzt man nun für $l = 1/2.\ (1 + h^2/a^2)$, so läßt sich die Gleichung umformen in:

$$dby = -h \,.\, d\omega - \frac{b}{2} \,.\, d\varkappa - \frac{1}{2}\,(p_1 + p_2).$$

Das Q_{byII} erhält man entsprechend dem Beobachtungsvorgang, als arithmetisches Mittel der Fehlersymbole in den Punkten 2, 4 und 6, wobei in jedem dieser Punkte noch ein Beobachtungsfehler μ' (in 2), μ'' (in 4) und μ''' (in 6) dazukommt. Man erhält demgemäß für

$$Q_{\text{byII}} = \left(l - \frac{7}{6}\right)\mu_y + \left(l - \frac{1}{6}\right)\mu_\varkappa - \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{12}\right)(\mu_z + \mu_\varphi - \mu_5 - \mu_6) - \frac{\mu_y' + \mu_y'' + \mu_y'''}{3}$$

und in weiterer Folge für

$$(4,\ 11a) \qquad Q_{\text{by}} = 1/2.\left(l - \frac{1}{6}\right)(2\mu_y + 2\mu_\varkappa - \mu_z - \mu_\varphi + \mu_5 + \mu_6) - \frac{\mu_y' + \mu_y'' + \mu_y'''}{3}$$

woraus sich durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes

$$m_{\text{by}} = \pm\, \mu \sqrt{\frac{3\, h^4}{4\, a^4} + \frac{h^2}{a^2} + \frac{2}{3}} \quad \text{ergibt.}$$

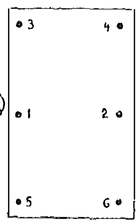
Schließlich erhält man nach analoger Fortführung des Berechnungsganges für die restlichen Orientierungselemente und deren mittlere Fehler folgende Werte:

$$(4,\ 12) \qquad d\varkappa = \frac{1}{3\,b}\,(-p_1 + p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + p_6) \qquad\qquad m_\varkappa = \pm\, \mu\, \frac{1}{b}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$dbz = \frac{h}{2\,a}\,(-p_4 + p_6) \qquad\qquad m_{\text{bz}} = \pm\, \mu\, \frac{h}{2a}\sqrt{2}$$

$$d\varphi = \frac{h}{2\,a\,b}\,(-p_3 + p_4 + p_5 - p_6) \qquad\qquad m_\varphi = \pm\, \mu\, \frac{h}{ab}$$

Für die Restparallaxensymbole ergibt sich nach Beendigung der Orientierung folgende Verteilung:



$-\frac{1}{12}(-2\mu_Y-2\mu_\kappa+\mu_Z+\mu_\varphi-\mu_5-\mu_6)$ $-\frac{1}{3}(\mu'_\kappa+\mu''_\kappa+\mu'''_\kappa)-\frac{1}{2}(\mu''_\varphi-\mu'''_\varphi)$	$-\frac{1}{12}(-2\mu_Y-2\mu_\kappa+\mu_Z+\mu_\varphi-\mu_5-\mu_6)$ $-\frac{1}{3}(\mu'_Y+\mu''_Y+\mu'''_Y)-\frac{1}{2}(\mu''_Z-\mu'''_Z)$
$\frac{1}{12}(4\mu_Y+4\mu_\kappa-2\mu_Z-2\mu_\varphi+2\mu_5+2\mu_6)$ $-\frac{1}{3}(\mu'_\kappa+\mu''_\kappa+\mu'''_\kappa)$	$\frac{1}{12}(4\mu_Y+4\mu_\kappa-2\mu_Z-2\mu_\varphi+2\mu_5+2\mu_6)$ $-\frac{1}{3}(\mu'_Y+\mu''_Y+\mu'''_Y)$
$\frac{1}{12}(-2\mu_Y-2\mu_\kappa+\mu_Z+\mu_\varphi-\mu_5-\mu_6)$ $-\frac{1}{3}(\mu'_\kappa+\mu''_\kappa+\mu'''_\kappa)+\frac{1}{2}(\mu''_\varphi-\mu'''_\varphi)$	$\frac{1}{12}(-2\mu_Y-2\mu_\kappa+\mu_Z+\mu_\varphi-\mu_5-\mu_6)$ $-\frac{1}{3}(\mu'_Y+\mu''_Y+\mu'''_Y)+\frac{1}{2}(\mu''_Z-\mu'''_Z)$

Fig. 10 a

In den Punkten 1 und 2 erhält man eine mittlere Restparallaxe von $\pm\,\mu\sqrt{\frac{2}{3}}$ und in den Punkten 3 bis 6 eine solche von $\pm\,\mu\sqrt{\frac{11}{12}}$. Diese Restparallaxen erhält auf einem andern Weg auch A. Ansermet [11].

d) Diskussion der Ergebnisse:

Die II. Variante der optisch-mechanischen Verfahren liefert hinsichtlich der Bestimmungsgleichungen für die Orientierungselemente und deren mittlere Fehler dieselben Ergebnisse wie das numerische Formalverfahren. Die theoretischen mittleren Restparallaxen werden beim Formalversahren etwas kleiner als bei der II. Variante.

In der folgenden Tabelle II sind die theoretischen und praktischen Ergebnisse einer optisch-mechanischen Orientierung gemäß der II. Variante für die Plattenkammer RC 7 zusammengestellt:

	m_ω	m_{by} i. mm	$m_\varkappa$	m_{bz} i. mm	m_φ
Schranken der prakt. Werte:	$\pm\,0^c5-1^c4$	$\pm\,0{,}044-0{,}132$	$\pm\,0^c3-1^c1$	$\pm\,0{,}011-0{,}044$	$\pm\,0^c7-2^c8$
theoret. Werte	$\pm\,2^c2$	$\pm\,0{,}124$	$\pm\,0^c7$	$\pm\,0{,}033$	$\pm\,2^c5$

5. *Das Bachmannsche Verfahren*

W. K. Bachmann [2] hat ein optisch-mechanisches Verfahren angegeben und dafür eine fehlertheoretische Untersuchung durchgeführt, die den Operationen vollkommen entsprach. Es erübrigt sich daher, diese Untersuchung zu wiederholen, deren Endresultate zu Vergleichszwecken angegeben werden. Für die mittleren Fehler der Orientierungselemente $\varkappa$, by und ω erhielt er:

$$m_\varkappa = \pm\,\mu\frac{1}{b}\sqrt{2} \qquad m_{by} = \pm\,\mu\sqrt{\frac{3h^4}{2a^4}+1} \qquad m_\omega = \pm\,\mu\frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

das sind die gleichen Werte, wie sie die erste Variante des optisch-mechanischen Verfahrens liefert. Ebenso sind die Gleichungen für diese Orientierungselemente dieselben. Für φ und bz sowie deren mittlere Fehler erhält Bachmann dieselben Werte wie beim numerischen Formalverfahren. Die mittleren Restparallaxen sind in den Randpunkten $\pm \mu \sqrt{3}$ und in den Nadirpunkten $\pm \mu$. Wendet man die gleiche Methode der Fehlerbetrachtung (wie sie für die 2 Varianten der optisch-mechanischen Verfahren angewendet wurde) auch auf das Bachmannsche Orientierungsverfahren an, so gelangt man zu denselben Ergebnissen wie auf Grund der Theorie der sekundären Variablen.

Der Vorteil der hier verwendeten Methode der Fehlerbetrachtung besteht in erster Linie darin, daß sie in jeder Phase des optisch-mechanischen Vorganges die Beobachtungsfehleranhäufung zu untersuchen gestattet! Kasper hat ein ähnlicher Verfahren zur Berechnung der mittleren Restparallaxen in [12] durchgeführt.

6. Das Poivilliers'sche Verfahren

Dieses Verfahren hat G. Schut [13] bereits fehlertheoretisch untersucht und mit dem numerischen Verfahren verglichen. Von der allgemeinen y-Parallaxengleichung für den Punkt „n"

$$p_n = \frac{y_n^2 + z_n^2}{z_n} \cdot d\omega + \frac{y_n}{z_n} \cdot p + q, \tag{6, 1}$$

worin $p = -x \cdot d\varphi + dbz$ und $q = x \cdot d\varkappa + dby$ gesetzt wurde, gelangt man für die beiden durch die Aufnahmezentren gelegten Normalebenen zur x-Achse zu folgenden Orientierungsverbesserungen:

(p_{I} und q_{I} gelten für $x = 0$ und p_{II} und q_{II} für $x = b$)

$$dbz = -p_{\mathrm{II}} \qquad d\varphi = \frac{1}{b}\,(p_{\mathrm{II}} - p_{\mathrm{I}}) \tag{6, 2}$$

$$dby = -q_{\mathrm{II}} \qquad d\varkappa = \frac{1}{b}\,(q_{\mathrm{II}} - q_{\mathrm{I}})$$

Für $d\omega$ erhält man aus jeder der Ebenen $x = 0$ und $x = b$ Werte, die im allgemeinen wegen unvermeidlicher zufälliger Fehler nicht gleich sein werden. Es ist

$$d\omega^0 = \frac{p_{\mathrm{I}} - q_{\mathrm{I}}}{Z_1} \quad \text{und} \quad d\omega^b = \frac{p_{\mathrm{II}} - q_{\mathrm{II}}}{Z_2}$$

und schließlich

$$d\omega = \frac{g^0\, d\omega^0 + g^b\, d\omega^b}{g^0 + g^b}$$

wobei g^0 und g^b Gewichtswerte darstellen, die nach Poivilliers umso größer sind, je mehr der Schnitt der gewählten Ebene $x =$ const. mit der Geländefläche vom gefährlichen Kreis abweicht [1]). Für ein ebenes Geländemodell erhält man für die Elemente bz, φ und ω die gleichen Werte wie beim Formalverfahren. Da jede y-Parallaxe nur ein einziges Mal beobachtet wird [2]), erhält man auch für die

[1]) Poivilliers [17[gibt dieselbe Definition für die Gewichte der Werte p und q für den Fall von mehr als zwei Ebenen $x =$ const. Vom Verfasser wurden diese Gewichte auch auf die Bestimmung von $d\omega$ ausgedehnt. Diese Gewichtswerte sind analog den Kasperschen [7] zu berechnen.

[2]) Die n-malige Parallaxenmessung soll lediglich die Beobachtungsgenauigkeit einer Parallaxenmessung erhöhen.

mittleren Fehler der soeben angeführten Elemente die gleichen Werte wie beim Formalverfahren. Aus den Gleichungen (6, 1) und (6, 2) ergibt sich weiters:

$$(6,3) \qquad d\varkappa = \frac{1}{b}\left[p_2 - p_1 + \frac{h^2}{2a^2}(2p_2 - p_4 - p_6 - 2p_1 + p_3 + p_5)\right] \text{ und}$$

$$dby = -\frac{h^2}{2a^2}(2p_2 - p_4 - p_6) - p_2$$

Diese Werte decken sich fast mit den Ergebnissen der I. Variante des optisch-mechanischen Verfahrens, weil ja der Ausdruck $(2p_2 - p_4 - p_6 - 2p_1 + p_3 + p_5) = w$ im allgemeinen sehr klein wird. Die mittleren Fehler von $\varkappa$ und by sind:

$$m_\varkappa = \pm \mu \frac{1}{b}\sqrt{\frac{3h^4 + 2a^4 + 4a^2h^2}{a^4}} \qquad m_{by} = \pm \mu \sqrt{\frac{6h^4 + 8a^2h^2 + 4a^4}{4a^4}}$$ [3])

Die mittleren Fehler sind nicht mehr gleich den entsprechenden der Variante I, da die Beobachtungsvorgänge bei beiden Methoden verschieden sind.

Für die Restparallaxen erhält Poivilliers:

in den Punkten 1 und 2: $\pm w \cdot \frac{h^2}{4a^2}$, in den Punkten 3 und 5, bzw. 4 und 6: $\mp w \cdot \frac{a^2 + h^2}{4a^2}$.

Verglichen mit dem numerischen Verfahren, ergeben sich besonders bei großen Basisverhältnissen (z. B. 3:1) wesentlich ungünstigere mittlere Restparallaxen. Im Falle eines gebirgigen Geländes entspricht dieses Verfahren aus ganz analogen Gründen wie das Kaspersche numerische Verfahren [7] nicht mehr einer Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Wie aus den Gleichungen der beiden folgenden Punkte zu sehen sein wird, gilt die gleiche Feststellung auch für die beiden halbgraphischen Verfahren von Krames und Pauwen.

7. *Das graphische Verfahren von J. Krames*

J. Krames [14] gibt als eines der Ergebnisse seines tiefschürfenden Untersuchungen über die gefährlichen Raumgebiete bei der photogrammetrischen Grundaufgabe ein neues graphisches Verfahren an, das in relativ kurzer Zeit die Verbesserungen der Orientierungselemente zu ermitteln gestatten soll.

Dieses Verfahren besteht im wesentlichen aus einer einfachen geometrischen Konstruktion der in den Ebenen $x = 0$ und $x = b$ befindlichen „Grundpunkte", aus deren Koordinaten 0, Y^0, Z^0 und b, Y^b, Z^b die Orientierungselemente gefunden werden. Krames entwickelte hiefür folgende Bestimmungsgleichungen (Folgebildanschluß):

$$(7,1) \qquad \begin{aligned} d\varphi &= \frac{Y^b - Y^0}{b} \cdot d\omega \\ d\varkappa &= \frac{Z^b - Z^0}{b} \cdot d\omega \end{aligned}$$

---

[3]) Wegen dieses großen mittleren Fehlers wird im Inst. Géographique National in Paris $d\varkappa$ aus $1/b\ (p_2 - p_1)$ mit $m_\varkappa = \pm \mu\ 1/b \sqrt{2}$ bestimmt.

$$dby = Z^b \,.\, d\omega$$
$$(7,\ 1) \qquad dbz = -\, Y^b \,.\, d\omega$$
$$d\omega = p_n : S_n$$

Die in die letzte Gleichung einzusetzenden Strecken S_n werden ebenfalls der Zeichnung entnommen. Hiebei setzt K r a m e s immer eine in der Praxis i. a. nicht zutreffende geometrische Parallaxenverteilung voraus, d. h. es soll bei ebenem Modell die Gleichung:

(7, 2) $\quad w = (2p_1 - p_3 - p_5) - (2p_2 - p_4 - p_6) = u - v = 0$ bestehen.

Um eine fehlertheoretische Untersuchung dieses Verfahrens durchzuführen, hat man nach bekannten Methoden der analytischen Geometrie die Grundpunktskoordinaten und die Strecken S_n in Funktionen der beobachteten y-Parallaxen auszudrücken. Bei Zugrundelegung eines ebenen Modelles erhält man dafür:

$$Y^0 = -2a\,\frac{p_1 - p_3}{2p_1 - p_3 - p_5} + a \qquad Y^b = -2a\,\frac{p_2 - p_4}{2p_2 - p_4 - p_6} + a$$

$$(7,\ 3) \qquad Z^0 = -\left(\frac{2a^2}{h} \cdot \frac{p_1}{u} + h\right) \qquad Z^b = -\left(\frac{2a^2}{h} \cdot \frac{p_2}{v} + h\right)$$

$$S^0 = \frac{2a^2}{h} \cdot \frac{-p_n}{u} \qquad S^b = \frac{2a^2}{h} \cdot \frac{-p_n}{v}$$

und in weiterer Folge ergeben sich für die Orientierungselemente folgende den Gleichungen (7, 1) entsprechende Bestimmungsgleichungen:

$$d\omega^0 = -\frac{h}{2a^2}(2p_1 - p_3 - p_5) \text{ oder } d\omega^b = -\frac{h}{2a^2}(2p_2 - p_4 - p_6)$$

$$d\varphi = \frac{h}{2\,ab}\left[\left(1 + \frac{u}{v}\right)(p_2 - p_4) - \left(1 + \frac{v}{u}\right)(p_1 - p_3)\right]$$

$$(7,\ 4) \qquad d\varkappa = -\frac{1}{2b}\left[\left(1 + \frac{v}{u}\right) \cdot p_1 - \left(1 + \frac{u}{v}\right) \cdot p_2\right]$$

$$dby = -h \,.\, d\omega + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{u}{v}\right) \cdot p_2$$

$$dbz = -\frac{h}{4a}\left[-2p_1 - 2p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + 2\left(1 + \frac{u}{v}\right)(p_2 - p_4)\right]$$

(Die Gleichungen (7, 4) vereinfachen sich wohl für $w = 0$, $\frac{u}{v} = 1$, entsprechen aber auch dann nicht den entsprechenden Gleichungen des Formalverfahrens.)

Da die Gleichungen (7, 1) unter der Voraussetzung $w = 0$ abgeleitet wurden, ergab die Fehleruntersuchung für die Gleichungen (7, 4), daß bei $w \neq 0$ sowohl für die Orientierungselemente als auch deren mittlere Fehler, bzw. für die Restparallaxen unter Umständen sehr ungünstige, ja praktisch sogar unbestimmbare Werte resultieren können. Dies rührt davon her, daß in den entsprechenden

Gleichungen die Quotienten $\frac{u}{v}$ bzw. $\frac{v}{u}$, $\frac{1}{u}$ und $\frac{1}{v}$ als Faktoren vorkommen und es ohne weiteres möglich ist, daß eine der beiden Parallaxensummen u oder v Null wird.

(Fortsetzung folgt)

Neue Vorschläge zur geographischen Ortsbestimmung

Von Dipl.-Ing. Dr. W. Embacher

(Schluß)

Bestimmung der geozentrischen Breite aus Mondbeobachtungen

Schon Euler hat in seinem „Versuch, die Figur der Erde durch Beobachtung des Mondes zu bestimmen" [8]) aus Mondbeobachtungen Schlüsse auf die Erdfigur ziehen wollen. Er beschreibt dies etwa folgendermaßen:

„Man müßte die mittäglichen Höhen des Mondes auf dem gleichen Mittagskreis auf das fleißigste beobachten und eine Vergleichung aller Höhen, so zu gleicher Zeit genommen worden sind, würde alsdann die Figur des Mittagskreises geben und folglich auch die ganze Figur der Erde, wenn sonsten dieselbe nicht gar zu unordentlich ist."

Eulers Vorschlag war folgender: Man sollte für einen Meridian verschiedene Kurven wählen, für diese die Kulminationshöhen rechnen und durch Beobachtungen des Mondes feststellen, welche der Kurven mit diesen übereinstimmt.

Es hat auch später Helmert [9]) über die Verwertung astronomischer Angaben für die Erkenntnis der Erdgestalt und des Erdinnern geschrieben. Er führt die Verwendung der Form des Erdschattens und die Mondparallaxe an.

In seiner Arbeit „Über das Geoid" wollte Ignaz Bischoff [10]) mit Hilfe von Simultanbeobachtungen des Mondes den Azimutunterschied inverser Normalschnitte finden. Die meisten Lösungen waren wohl theoretisch, nicht aber praktisch möglich, da die Meßgenauigkeit zu gering war.

Der Unterschied zwischen den geozentrischen Orten des Erdmondes und den topozentrischen ist eine Funktion der Äquatorial-Horizontalparallaxe des Mondes und der Abplattung der Erde. Indem man der Erde nun eine Abplattung beilegt, die mit den Beobachtungen übereinstimmt, kann man diese indirekt bestimmen. W. de Sitter [6]) hat auf diesem Weg die Abplattung aus Beobachtungen des Kraters Mösng A auf den Sternwarten in Greenwich und am Kap der Guten Hoffnung mit 1 : 293,4 bestimmt. Eine äußerst einfache Methode, die geozentrische Breite, den Radiusvektor des Beobachtungspunktes und die Abplattung zu bestimmen, ergibt sich aus Mondbeobachtungen im Meridian.

In Figur 5 ist $N\ P\ A$ die Meridianellipse, φ die geographische, φ' die geozentri-

---

[8]) Abhandlungen der Bayr. Akademie der Wissenschaften V Bd., 1768.

[9]) Helmert: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie II. Teil. Leipzig 1884, Seite 450 ff.

[10]) Ignaz Bischoff-Dissertation. Über das Geoid; München 1889.

[16]) W. G. Cady, Proc. I. R. E. 10, 83 (1922); 16, 521 (1928), 18, 1247 (1930).
[17]) G. W. Pierce, Proc. Amer. Ac. Arts and Sci. 59, 81 (1923). — A. Meacham, Bell Syst. Tech. J. 17, 574 (1938).
[18]) W. Hershberger u. L. E. Norton, R. C. A. Rev. 9, 31 (1948).

Fehlertheoretische Untersuchungen der neueren Verfahren zur gegenseitigen Orientierung von Luftbildern

Von H. Schmid, Wien

(Schluß)

Auf Grund dieser **fehlertheoretischen Überlegungen** ist es dem Verfasser nun gelungen, drei der Kramesschen Gleichungen, nämlich die der Orientierungselemente ω, φ und bz so umzuformen, daß sie 1. optimale, d. h. die wahrscheinlichsten Werte ergeben, und 2. von der Größe des Widerspruchs w unabhängig sind. Die richtiggestellten Gleichungen lauten nun:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{2}\left(d\omega^0 + d\omega^b\right) \\ d\varphi &= -\frac{1}{b} \cdot Y^0\, d\omega^0 + \frac{1}{b} \cdot Y^b\, d\omega^b \qquad (7,\ 5) \\ dbz &= -Y^b \cdot d\omega^b \end{aligned}$$

Die Elemente $d\varkappa$ und dby lassen sich nun entweder unabhängig vom graphischen Verfahren aus:

(7, 6) $d\varkappa = -\frac{1}{b}(p_1 - p_2)$ und

dby = das arithmetische Mittel aus allen 6 y-Parallaxen nach Eindrehung der Orientierungskorrektionen $d\omega$, $d\varphi$, $d\varkappa$ und dbz

oder besser aus den Gleichungen [4])

$$\begin{aligned} d\varkappa &= \frac{Z^b}{b}\, d\omega^b - \frac{Z^0}{b}\, d\omega^0 - \left[\frac{3h^2 + 2a^2}{3bh}\left(d\omega^0 - d\omega^b\right)\right] \qquad (7,\ 6a) \\ dby &= Z^b\, d\omega^b - \left[\frac{2a^2 + 3h^2}{6h}\left(d\omega^0 - d\omega^b\right)\right] \end{aligned}$$

ermitteln. Die Gleichungen (7, 6a) liefern dieselben Werte wie das numerische Formalverfahren.

Für ebenes Gelände erhält man nun durch Einsetzen der analytischen Ausdrücke für Y^0, Z^0, Y^b, Z^b, $d\omega^0$, $d\omega^b$ folgende Bestimmungsgleichungen:

$$d\omega^0 = -\frac{h}{2a^2}\left(2p_1 - p_3 - p_5\right) \qquad d\omega^b = -\frac{h}{2a^2}\left(2p_2 - p_4 - p_6\right)$$

$$d\omega = -\frac{h}{4a^2}\left(2p_1 + 2p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6\right)$$

$$(7, 7) \qquad d\varphi = \frac{h}{2ab} (p_3 - p_4 - p_5 + p_6)$$

$$dbz = - \frac{h}{2a} (- p_4 + p_6)$$

$$d\varkappa = \frac{1}{b} (p_2 - p_1)$$

$$dby = p_2 - h \,.\, d\omega \text{ }^{5)}$$

Für die mittleren Fehler der Elemente ω, φ und bz ergeben sich die gleichen Werte wie beim numerischen Formalverfahren, für die restlichen Elemente ergibt sich:

$$(7, 7a) \qquad m_\varkappa = \pm \mu \frac{1}{b} \,.\, \sqrt{2}$$

$$m_{by} = \pm \mu \sqrt{\frac{3h^4}{4a^4} + \frac{h^2}{a^2} + 1}\,.$$

(Bei Verwendung der Gleichungen 7, 6a zur Ermittlung der Orientierungselemente $\varkappa$ und by ergeben sich natürlich wieder die gleichen Ergebnisse wie beim Formalverfahren.)

Wie die Gleichungen (7, 7a) zeigen, ist die Genauigkeit der by-Bestimmungen praktisch die gleiche wie nach der Methode der kleinsten Quadrate (Numer. Formalverfahren). Lediglich $m_\varkappa$ ist beim Formalverfahren etwas kleiner wie nach der 1. Gleichung (7, 7a). Da aber $m_\varkappa$ beim Formalverfahren unter den Voraussetzungen der Punkte 1 und 2 dieser Arbeit (siehe Tabelle I) nur $\pm\, 0^c7$ beträgt und damit hart an der Grenze des stereoskopischen Sehvermögens liegt, ist die Vergrößerung auf $\pm\, 1^c1$ unbedeutend.

Die Gleichungen (7, 5, bzw. 7, 7) gestatten nun für jede beliebige Parallaxenverteilung die Orientierungskorrekturen sofort zu ermitteln, wobei die Genauigkeit der Bestimmung von der Größe der y-Parallaxen unabhängig ist.

Es erübrigt sich daher die besondere Parallaxenverteilung, die z. B. zu $d\omega = 0$ führt, oder den Fall einer einzigen Eckenrestparallaxe [15], separat zu behandeln, da mittels der Gleichung (7, 5) (7, 6) (7, 6a) oder (7, 7) auch für diese Sonderfälle die Orientierungskorrekturen ohne weiteres zu bestimmen sind.

Für die Restparallaxen erhält man in den Punkten 1 und 2 Null, in den Punkten 3, bzw. 5 $+ 1/4 \,.\, w$ und in den Punkten 4, bzw. 6 $- 1/4 \,.\, w$. Die mittleren Restparallaxen sind in den beiden Nadirpunkten ebenfalls Null und in den Punkten 3 bis 6 $\pm\, \mu \sqrt{3/4}$. Das Verfahren ist demnach konvergent.

---

[4]) Die von Krames angegebenen Zusatzglieder $- \frac{3h^2 + 2a^2}{3bh} (d\omega^0 - d\omega^b)$ haben nur den Zweck, dieselben mittleren Fehler wie das Formalverfahren zu liefern. Durch diese Zusatzglieder wird die Bestimmung von $\varkappa$ und by umständlich und hängt mit dem Krameschen Verfahren nicht mehr direkt zusammen, deshalb ist es im Hinblick auf eine rationelle Arbeit besser, die vom Verfasser (ohne Zusatzglieder) angegebenen Gleichungen (7, 6a) anzuwenden.

[5]) Dieser Wert entspricht dem arithmet. Mittel der 6 y-Parallaxen (Gleichungen 7, 6).

Selbstverständlich sind die Restparallaxen bei Verwendung der Gleichungen 7, 6a wieder die gleichen wie beim Formalverfahren.

8. Das Verfahren von L. Pauwen

Pauwen verwendet zur Herstellung der gegenseitigen Orientierung meist 15 Orientierungspunkte, von denen 5 in der Verbindungsgeraden der beiden Nadirpunkte, 5 auf einer dazu Parallelen am oberen und 5 auf einer Parallelen am unteren Bildrand liegen. Die Abstände der Parallelen von der Verbindungslinie der Nadirpunkte sind gleich groß. Für die folgenden fehlertheoretischen Untersuchungen sollen aber nur die üblichen sechs charakteristischen Punkte verwendet werden.

Die entsprechenden drei Gleichungsgruppen für die y-Parallaxen lauten für ebenes Gelände:

(8, 1a) $$p_1 = dby + hd\omega + bd\varkappa$$
$$p_2 = dby + hd\omega$$

(1b) $$p_3 = dby + hKd\omega + bd\varkappa + ab/h \,.\, d\varphi + a/h \,.\, dbz$$
$$p_4 = dby + hKd\omega \quad . \quad . \quad + a/h \,.\, dbz$$

(1c) $$p_5 = dby + hKd\omega + bd\varkappa - ab/h \,.\, d\varphi - a/h \,.\, dbz$$
$$p_6 = dby + hKd\omega \quad . \quad . \quad - a/h \,.\, dbz$$

Pauwen berechnet einen Näherungswert für $dby + h \,.\, d\omega$ aus den 3 Punkten einer Normalebene zur x-Achse. Da nun beide Nadirpunkte dieselbe Aufnahmehöhe haben (ebenes Gelände), ist der Ausdruck $dby + h \,.\, d\omega$ für beide Nadirpunkte gleich p_2. Entsprechend dem Diagramm für $d\varkappa$ erhält man:

(8, 2) $d\varkappa = 1/b \,.\, (p_1 - p_2)$ und den mittleren Fehler:
$$m_\varkappa = \pm \mu\, 1/b \,.\, \sqrt{2}\,.$$

Die Berechnung für $d\omega$ und dby erfolgt aus folgenden 4 Gleichungen, in die für $d\varkappa$ obiges Ergebnis eingesetzt wird.

(8, 3) $$1/2 \,.\, (p_3 + p_5) = b \,.\, d\varkappa + hK \,.\, d\omega + dby$$
$$1/2 \,.\, (p_4 + p_6) = hK \,.\, d\omega + dby$$
und die Gleichungen (1a).

$d\omega$ und dby ergeben sich als Neigung, bzw. Schnittpunkt der Ausgleichsgeraden mit der „h"-Abszissenachse. Diesem geometrischen Vorgang entspricht eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, da ja die Quadratsumme der Punktabstände von der Ausgleichsgeraden ein Minimum sein soll. Der Beweis ist auch rechnerisch sehr leicht zu erbringen.

Faßt man die Gleichungen (3) als Verbesserungsgleichungen auf und bildet daraus Normalgleichungen, so ergäbe sich nach deren Lösung:

$d\omega = -h/4a^2 \,.\, (2p_1 + 2p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6)$ und der entsprechende mittlere Fehler $m_\omega = \pm \mu\, h/2a^2 \,.\, \sqrt{3}$, bzw.

$dby = -h \,.\, d\omega + p_2$ mit dem mittleren Fehler
$$m_{by} = \pm \mu \sqrt{\frac{3h^4}{4a^4} + \frac{h^2}{a^2} + 1}\,.$$

Da jede y-Parallaxe nur ein einzigesmal beobachtet, bzw. gemessen wird, kann man durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf die Bestimmungsgleichungen für die Orientierungselemente sofort deren mittlere Fehler berechnen.

Aus den Gleichungen (1b) und (1c) lassen sich wieder entsprechend der Ausgleichsgeraden die Werte für dbz und $d\varphi$ nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen. Man erhält:

$$dbz = h/2a \,.\, (p_4 - p_6) \quad \text{und} \quad d\varphi = h/2ab \,.\, (p_3 - p_4 - p_5 + p_6)$$

bzw. die mittleren Fehler

$$m_{bz} = \pm\, \mu\, h/2a \,.\, \sqrt{2} \quad \text{und} \quad m_{\varphi} = \pm\, \mu \,.\, h/ab.$$

Das Verfahren entspricht bis auf die Bestimmung von $d\varkappa$ und dby dem numerischen Formalverfahren. Würde man an Stelle von p_1 das arithmetische Mittel von p_1, p_3 und p_5 und statt p_2 das von p_2, p_4 und p_6 in die Gleichung (8, 2) einsetzen, so ergäben sich sowohl für $d\varkappa$ als auch in weiterer Folge für dby die Werte des numerischen Formalverfahrens.

Der Vollständigkeit halber seien noch die Restparallaxen für dieses Verfahren angegeben:

$$\begin{aligned}
v_1 &= 0\\
v_2 &= 0\\
v_3 &= 1/2 \,.\, (p_1 - p_2) - 1/4\ (p_3 - p_4 + p_5 - p_6) = 1/4 \,.\, w = v_5\\
v_4 &= -\,1/4 \,.\, w = v_6
\end{aligned}$$

In stark gebirgigem Gelände entspricht das Pauwensche Verfahren nicht mehr einer Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate, da sich bei verschiedenen Aufnahmehöhen der Orientierungspunkte nicht mehr unabhängige Gruppen von y-Parallaxengleichungen zur Berechnung von Orientierungskorrektionen bilden lassen. [16]

Für einen von Pauwen praktisch durchgeführten Orientierungsvorgang wurden die Berechnungen streng nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt. Die Differenzen zwischen den praktisch erhaltenen und den errechneten Ergebnissen sind überraschend klein, sodaß dieses Verfahren für coupiertes Gelände recht brauchbare Resultate liefern wird. Die Ergebnisse sind die folgenden:

Für die Korrekturen der Orientierungselemente erhält man nach:

	$d\varkappa$	$d\omega$	dby	$d\varphi$	dbz
L. Pauwen:	+ 2c0	+ 6c0	— 0,23 *mm*	+ 4c0	— 0,11 *mm*
d. M. d. kl. Qu.:	+ 2,5	+ 6,5	— 0,26	+ 4,6	— 0,12

Als Restparallaxen ergeben sich: in der Nadirgeraden

						Σ
Auf Grund der Pauwenschen Korrekturen (in 0,01 *mm*): (Durch Berechnung)	0,0	+ 1,0	— 1,6	— 0,8	+ 0,4	— 1,0
Nach der M. d. kl. Qu.	+ 1,2	+ 1,7	— 1,4	— 0,5	+ 0,4	+ 1,4
Laut Messungen von Pauwen:	+ 1	— 1	+ 1	+ 1	— 1	+ 1

am oberen Bildrand

— 3,7	+ 1,0	+ 3,2	— 1,9	+ 0,9	— 0,5
— 2,5	+ 1,5	+ 2,9	— 2,7	+ 0,1	— 0,7
0	— 1	+ 1	0	0	0

am unteren Bildrand

+ 1,3	— 1,7	— 0,1	+ 1,3	+ 1,5	+ 2,3
+ 0,9	— 1,8	— 0,7	+ 0,1	+ 0,7	— 0,8
+ 2	+ 1	+ 1	0	+ 1	+ 5

Die Summe der Verbesserungen beträgt:

auf Grund der Pauwenschen Korrekturen:	+ 0,8
auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate:	— 0,1
auf Grund der Messungen:	+ 6,0

Die Bedingung $[v] = 0$ ist für die Methode der kleinsten Quadrate natürlich recht gut erfüllt, während sich für die **Messungen** nach Beendignng des Orientierungsvorganges als Fehlersumme + 0,06 *mm* ergibt. Der Unterschied zwischen den aus der Methode der kleinsten Quadrate und aus den Pauwenschen Korrekturen berechneten Restparallaxen beträgt im Maximum nur 0,012 *mm*. Größer sind die Abweichungen zwischen den Parallaxenmessungen und den aus den Pauwenschen Korrektionen errechneten Restparallaxen. Sie betragen durchschnittlich 0,016 *mm*. (Die größte Abweichung beträgt 0,037 *mm*.) Die durchschnittliche Abweichung von 0,016 *mm* im Modell entspricht bei einem Verhältnis von $f : z$ (durchschnittlich) 1 : 2 einem mittleren Parallaxenbeobachtungsfehler von 0,008 *mm* in der Bildebene. Letzterer Wert stimmt mit den praktischen Untersuchungsergebnissen sehr gut überein.

Abschließend sollen in zwei Tabellen die mittleren Fehler der Orientierungselemente, bzw. der Restparallaxen zusammengestellt werden, um einen Überblick über die zu erwartende Genauigkeit der einzelnen Verfahren zu geben.

Die Zahlen der Tabelle III entsprechen den Annahmen der Einleitung.

Tabelle III

		m_ω	m_{by}	$m_\varkappa$	m_{bz}	m_φ	
Das num. Formalverf., Hallert, Brandenberger, H. Schmid, II. Variante und Kasper (f. geb. Gelände)	theor.	$\pm 2^c2$	$\pm$ 0,124 *mm*	$\pm 0,^c7$	$\pm$ 0,030 *mm*	$\pm 2^c5$	I
Hallert	prakt.	1,8	0,132	0,7	0,044	2,8	II
Brandenberger	prakt.	3,2	0,176	1,0	0,055	2,4	III
II. Variante	prakt.	1,1	0,066	0,7	0,033	2,0	IV
		0,5–1,4	0,044–0,132	0,3–1,1	0,011–0,044	0,7–2,8	IVa
I. Variante d. Gruberschen Verfahren	theor.	3,0	0,164	1,1	0,081	5,0	V
	prakt.	1,1	0,066	1,3	0,044	2,6	VI
		0,6–1,5	0,044–0,077	1,1–1,4	0,022–0,055	1,9–3,2	VIa
Bachmannsches Verfahren	theor.	3,0	0,164	1,1	0,030	2,5	VII
Poivilliers sches Verfahren	theor.	2,2	0,176	13^c4	0,030	2,5	VIII

verbessertes Poivilliers sches Verfahren

theor.	2,2	0,176	1,1	0,030	2,5	VIIIa
prakt.	1,3	0,066	0,6	0,044	2,2	IX

Das verbesserte graph. Verfahren von J. Krames

theor.	2,2	0,124	1,1 (0,7)	0,030	2,5	X

Das Pauwensche Verfahren

theor.	2,2	0,124	1,1 (0,7)	0,030	2,5	XI

Diskussion der Tabelle III: Ein Vergleich der Werte der Zeilen II, III und IV einerseits mit den Werten der Zeile I andererseits zeigt, daß die theoretischen mittleren Fehler gute Mittelwerte der praktischen Ergebnisse sind. Die praktische Untersuchung des Brandenberger schen Verfahrens ergab etwas größere mittlere Fehler, als theoretisch zu erwarten gewesen wären. Da das Verhältnis zwischen entsprechenden Werten der Zeilen I und III nahezu konstant ist (die einzige Ausnahme bildet das φ), kann man schließen, daß die Schätzung der y-Parallaxe ca. 1,5mal ungenauer als die Messung ist.

Eine Genauigkeitssteigerung der Werte der Zeile I ergibt sich (Punkt 2), wenn beim Punktgitterverfahren des Verfassers die Anzahl der Orientierungspunkte vergrößert wird. Desgleichen hat L. Pauwen bei seinem Verfahren vorgeschlagen, mehr als 6 Orientierungspunkte zu verwenden, um die Genauigkeit der Orientierungselemente zu erhöhen. Die Zahlen der Zeilen IV und VI decken sich mit den Mittelwerten aus allen praktischen Messungen, wovon die Zeilen IVa und VIa die Schranken angeben. Es fällt auf, daß das Verhältnis der praktischen mittleren Fehler der Orientierungselemente zu den entsprechenden theoretisch ermittelten bei der Variante I (Zeile V) nahezu konstant ist. Man kann deraus auf eine jede Operation gleich beeinflussende Genauigkeitssteigerung, wie z. B. mehrmalige Parallaxenbeobachtung und dadurch Steigerung der Beobachtungsgenauigkeit, schließen.

Praktische Werte für das Bachmannsche Verfahren liegen eigentlich nicht vor, denn in [1] sind lediglich die unter 1b Tabelle I angegebenen Messungen zu Fünfergruppen zusammengefaßt und daraus ist eine quantitative Fehlerverkleinerung berechnet worden. Da der Orientierungsvorgang von Bachmann aber nicht den üblichen Gruberschen optisch-mechanischen Orientierungsverfahren entspricht, müßten erst die Bachmannschen Operationen ausgeführt werden, um für die Zeile VII die entsprechenden Vergleichswerte zu finden.

Das Pauwensche und das erweiterte Kramessche Verfahren ergeben bis auf $\varkappa$ die gleichen Werte für den mittleren Fehler der Orientierungselemente wie das numerische Formalverfahren. Es ist aber sowohl beim Kramesschen als auch beim Pauwenschen Verfahren ohne weiteres möglich, die Bestimmung von $\varkappa$ so zu verschärfen, daß die Resultate dem numerischen Formalverfahren entsprechen. Beim Poivilliersschen Verfahren ist die Genauigkeit in der Bestimmung von $\varkappa$ und by etwas geringer als beim numerischen Verfahren.

In der folgenden Tabelle sind die Restparallaxen für die untersuchten Verfahren zusammengestellt. (Die oberen Werte geben die Restparallaxen, die unteren die mittleren Restparallaxen an.)

Tabelle IV

	Punkt 1	Punkt 2	Punkt 3	Punkt 4	Punkt 5	Punkt 6
Numerisches Formalverfahren	$+\frac{1}{6}\cdot w$	$-\frac{1}{6}\cdot w$	$-\frac{1}{12}\cdot w$	$+\frac{1}{12}\cdot w$	$-\frac{1}{12}\cdot w$	$+\frac{1}{12}\cdot w$
	$\pm\mu\cdot\sqrt{1/3}$		$\pm\mu\cdot\sqrt{1/12}$			
Variante I	0	0	0	0	0	w
	$\pm\mu$				$\pm\mu\sqrt{11}$	$\pm\mu\sqrt{11}$
Variante II	$+\frac{1}{6}w$	$-\frac{1}{6}w$	$-\frac{1}{12}w$	$+\frac{1}{12}w$	$-\frac{1}{12}w$	$+\frac{1}{12}w$
	$\pm\mu\sqrt{2/3}$		$\pm\mu\sqrt{11/12}$			
Bachmannsches Verfahren	0	0	0	$+\frac{1}{2}w$	0	$+\frac{1}{2}w$
	$\pm\mu$		$\pm\mu\sqrt{3}$			
Poivilliers sches Verfahren	$w\cdot\frac{h^2}{4a^2}$	$-w\frac{h^2}{4a^2}$	$-w\frac{a^2+h^2}{4a^2}$	$w\frac{a^2+h^2}{4a^2}$	$-w\frac{a^2+h^2}{4a^2}$	$w\frac{a^2+h^2}{4a^2}$
	$\pm\mu\frac{h^2}{a^2}\sqrt{3/4}$		$\pm\mu\frac{a^2+h^2}{a^2}\sqrt{3/4}$			
Graphisches Verfahren von Krames	0	0	$+\frac{1}{4}\cdot w$	$-\frac{1}{4}\cdot w$	$+\frac{1}{4}\cdot w$	$-\frac{1}{4}\cdot w$
	0	0	$\pm\mu\sqrt{3/4}$			
Pauwensches Verfahren	0	0	$+\frac{1}{4}\cdot w$	$-\frac{1}{4}\cdot w$	$+\frac{1}{4}\cdot w$	$-\frac{1}{4}\cdot w$
	0	0	$\pm\mu\sqrt{3/4}$			

Diskussion: Bei all jenen Verfahren, bei welchen die y-Parallaxen nur ein einziges Mal beobachtet, bzw. gemessen werden, läßt sich die mittlere Restparallaxe durch die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf die Gleichungen für die Restparallaxen berechnen. (Numerisches Formalverfahren, Poivilliers sches Verfahren, Pauwensches Verfahren und Kramessches Verfahren.) Die kleinsten Fehlerquadratsummen $\left(\frac{1}{12} w^2\right)$ ergeben das Formalverfahren und die II. Variante des Gruberschen Verfahrens. Es folgen das Pauwensche und das verbesserte Kramessche Verfahren $\left(\frac{1}{4} \cdot w^2\right)$, das Bachmannsche Verfahren, die I. Variante (w^2) und schließlich das Poivilliersche Verfahren $\left(\frac{3h^4 + 2a^4 + 4a^2 h^2}{8a^4} \cdot w^2\right)$, bzw. das verbesserte Poivilliers sche Verfahren $\left(\frac{3h^4 + 2a^4}{8a^4} w^2\right)$. (Siehe Fußnote 3 auf Seite 80 unten.)

Zusammenfassung

Bei den drei halbgraphischen Verfahren wurden die Fehler durch die Zeichenungenauigkeit unberücksichtigt gelassen, da es immer möglich ist, durch entsprechende Maßstabsänderung die Zeichengenauigkeit zu vergrößern.

Für ebenes Gelände ist natürlich das numerische Formalverfahren sowohl hinsichtlich der mittleren Fehler der Orientierungselemente als auch hinsichtlich der Restparallaxenverteilung das optimalste. Da keines der bisher angegebenen Verfahren für beliebiges Gelände einer Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate entspricht, wäre noch in einer weiteren Arbeit der Einfluß der Geländeunregelmäßigkeiten auf die Verfahren von Krames, Poivilliers, Pauwen und Kasper klarzustellen.

Abschließend sei bemerkt, daß diese Studie bisher nicht bekannte Zusammenhänge zwischen den einzelnen Orientierungsverfahren aufgezeigt hat. Es ist zu hoffen, daß damit ein weiterer Beitrag zur Durchforschung des Fundamentalproblems der Luftbildmessung geleistet worden ist.

(Anmerkung der Redaktion: Ein umfangreicheres Manuskript zu dieser Arbeit wurde im Jänner 1951 eingereicht und sollte als Sonderheft veröffentlicht werden. Da damals die Drucklegung aus technischen Gründen unterblieb, hat der Autor die hier abedruckte gekürzte Fassung am 21. Februar 1952 vorgelegt.)

Literaturangabe:

[1] *H. Kasper* Am Wildautographen A 5 ausgeführte Versuche zur Feststellung der Genauigkeit und der Wirtschaftlichkeit einiger neuer gegenseitiger Orientierungsvorgänge für Senkrechtaufnahmen. (Bulletin de la Société Belge de Photogrammetrie 1949.)

[2] *W. K. Bachmann* Théorie des erreurs de l'orientation relative. Dissertation.

[3] *W. Schermerhorn* Einleitung zur Fehlertheorie der räumlichen Aerotriangulation Photogrammetria 1940 Heft 4 und 1941 Heft 1.

[4] *A. Brandenberger* Theorie und Praxis der gegenseitigen Orientierung von Steilaufnahmen. Separatdruck d. S. Z. f. Verm. W. 1947, Heft 9.

[5] *B. Hallert* Über die Herstellung photogrammetrischer Pläne, Dissertation, Mai 1944, Stockholm.

[6] *H. Schmid* Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern unter Zugrundelegung eines Orientierungspunktgitters. (Sitzungsberichte der österreichischen Akademie der Wissenschaften, im Druck.)

[7] *H. Kasper* Ein numerisches Verfahren des Folgebildanschlusses für gebirgiges Gelände, S. Z. f. Verm.W. 1950, Heft 4.

[8] *L. Pauwen* Sur un procédé d'orientation relative fondé sur la mesure des parallaxes verticales en de nombreux points. Bulletin de la Société Belge de Photogrammétrie 1949.

[9] *H. Kasper* Die Überkorrektur bei der gegenseitigen Orientierung von Senkrechtaufnahmen eines beliebigen Geländes, S. Z. f. Verm.W. 1949.

[10] *I. M. Tienstra* Het rekenen met gewichtsgetallen (Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde 1934).

[11] *A. Ansermet* La solution dite numérique du probleme fondamental de la photogrammétrie, S. Z. f. Verm.W. 1943.

[12] *H. Kasper* Zur Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung, S. Z. f. Verm.W. 1947.

[13] *G. Schut* Précision de l'orientation relative d'après la méthode de Poivilliers. (Photogrammetria 1949/50, Heft 3.)

[14] *J. Krames* Über ein graphisches Verfahren zum gegenseitigen Einpassen von Luftaufnahmen, Ö. Z. f. Verm.W. 1949.

[15] *J. Krames* Über das Wegschaffen von Restparallaxen mittels graphischer Konstruktionen. S. Z. f. Verm.W. 1950.

[16] *M. Hennebert* La méthode Pauwen d'orientation relative et les moindres carrés. Bulletin de la Société Belge de Photogrammétrie Juni 1950.

[17] *G. Poivilliers* Formation de l'image plastique dans les appareils de restitution. (Photogrammetria 1949/50 Nr. 3.)

Kleine Mitteilungen

Präsident Uhlich — 40 jähriges Dienstjubiläum

Am 1. Juli 1952 beging der Präsident des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen Dipl.-Ing. Leo Uhlich sein 40jähriges Dienstjubiläum. Aus diesem Anlaß überbrachte Bundesminister Böck-Greißau in Begleitung von Sektionschef Doktor Krisch und Ministerialrat Dr. Brückner dem Jubilar die Glückwünsche der Bundesregierung; die Hauptabteilungs- und Abteilungsleiter gratulierten im Namen der Bediensteten.

Präsident Uhlich absolvierte die Technische Hochschule in Wien und war nach Ablegung der II. Staatsprüfung aus dem Maschinenbaufache als Konstrukteur bei einer Privatfirma tätig. Im Jahre 1912 trat er als Praktikant bei den Eichämtern in Wien in den österreichischen Staatsdienst und lernte so den exekutiven Eichdienst von Grund auf kennen. Nach fast vierjähriger Militärdienstleistung während des Weltkrieges wurde er dem Eichinspektorat in Wien zugeteilt. Infolge seiner besonderen Fähigkeiten wurde er zuerst Leiter des Eichinspektorates Wien und später Referent der technisch-administrativen Abteilung im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen. Während des Anschlusses Österreichs an das Deutsche Reich hatte Uhlich, der inzwischen Obereichrat geworden war, als Referent im Reichswirtschaftsministerium in Berlin und als Leiter einiger Eichinspektorate Gelegenheit, auch das deutsche Eichwesen kennenzulernen.