

Paper-ID: VGI_195107



Die Näherungsmethoden des astronomischen Nivellements und das Geoid im Nordteil des Meridianbogens Großenhain-Kremsmünster-Pola

Karl Ledersteger ¹

¹ *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **39** (2, 3, 4), S. 37–45, 73–80, 108–112

1951

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Ledersteger_VGI_195107,  
  Title = {Die N{"a}herungsmethoden des astronomischen Nivellements und das  
    Geoid im Nordteil des Meridianbogens Gro{"ss}enhain-Kremsm{"u}nster-Pola},  
  Author = {Ledersteger, Karl},  
  Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen}},  
  Pages = {37--45, 73--80, 108--112},  
  Number = {2, 3, 4},  
  Year = {1951},  
  Volume = {39}  
}
```



$$\overline{AB} = \frac{x_B - x_A}{\cos(AB)} = \frac{y_B - y_A}{\sin(AB)}$$

so folgt

$$\begin{aligned} h &= (y_A - y_M) \cos(AB) + (x_M - x_A) \sin(AB) \\ h &= (y_B - y_M) \cos(AB) + (x_M - x_B) \sin(AB) \end{aligned} \quad (12)$$

Mit (10) folgt daraus

$$\begin{aligned} x_P - x_M &= (y_M - y_A) \sin(AB) \cos(AB) - (x_M - x_A) \sin^2(AB) \\ &= (y_M - y_B) \sin(AB) \cos(AB) - (x_M - x_B) \sin^2(AB) \\ y_P - y_M &= - (y_M - y_A) \cos^2(AB) + (x_M - x_A) \sin(AB) \cos(AB) \\ &= - (y_M - y_B) \cos^2(AB) + (x_M - x_B) \sin(AB) \cos(AB) \end{aligned} \quad (13)$$

Die Koordinatendifferenzen sind hier im Gegensatz zu (12) gleichsinnig geordnet; damit ergeben sich im Aufbau gleiche Formeln, wie sie in (8) mitgeteilt wurden; eine allenfalls erwünschte weitere Möglichkeit der Kontrolle ist mit diesen Formeln gegeben.

Es sei noch an eine Möglichkeit erinnert, eine Rechenkontrolle zu gewinnen. Addiert man in (8) und (8a) gleiche Koordinatenunterschiede, so erhält man, wenn man mit

$$x_s = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_s = \frac{y_A + y_B}{2}$$

die Koordinaten des Halbierungspunktes der Strecke AB einführt, aus

$$\begin{aligned} x_P - x_s &= (y_M - y_s) \sin(AB) \cos(AB) + (x_M - x_s) \cos^2(AB) \\ y_P - y_s &= (y_M - y_s) \sin^2(AB) + (x_M - x_s) \sin(AB) \cos(AB) \end{aligned} \quad (14)$$

die auf den Halbierungspunkt der Strecke \overline{AB} bezogenen Koordinatenunterschiede.

Ebenso ergeben sich diese Gleichungen aus (13), womit die Formelsysteme (8), (8a) und (13) miteinander verbunden und kontrolliert sind.

L i t e r a t u r

- [1] J o r d a n - E g g e r t, Handbuch der Vermessungskunde II/1, § 94, Seite 433.
[2] Derselbe, § 94, Seite 435 ff.

Die Näherungsmethoden des astronomischen Nivellements und das Geoid im Nordteil des Meridianbogens Großenhain—Kremsmünster—Pola

Von Karl Ledersteger, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

Zusammenfassung: Ö l a n d e r s Näherungsformel für das astronomische Nivellement wird aus der Voraussetzung gleichmäßiger Krümmung des Geoids entwickelt und auf den Nordteil des Meridianbogens Großenhain—Pola angewendet. Es zeigt sich deutlich ein Genauigkeitsabfall vom Flachland zum Hochgebirge. Während im Alpenvorland das Dreiecksnetz 1. Ordnung im allgemeinen ausreicht, ist bei der Annäherung an das Gebirge stellenweise eine Verdichtung durch Punkte 2. Ordnung erwünscht. Die Ergebnisse gestatten eine Überprüfung der wesentlich verschiedenen, originellen Methode A. P r e y s. Schließlich werden möglichst absolute Geoidhöhen von 35 Punkten abgeleitet, wozu die absolute Lage des europäischen Netzverbandes auf dem

H a y f o r d'schen Ellipsoid herangezogen wird. Der Geoidanstieg vom Nordrand Röhmens bis zum Alpenkamm beträgt rund 7 m.

Summary: Ö l a n d e r's approximate formula for astronomical levelling is developed on the supposition of an uniform curvature of the geoid and is applied to the northern part of the meridian Großenhain—Pola. A decrease of accuracy appears distinctly from the flat country to the highland. Though in the foreland of the Alps usually the ordinary triangulation net of 1st order suffices, it is desirable to fill up this net with points of 2nd order approaching the mountains. The results allow a test of the original and essentially different method of P r e y. Finally, as far as possible the absolute height of the geoid of 35 points is derived on the base of the absolute position of the European net on H a y f o r d's ellipsoid. The elevation of the geoid from the northern border of Bohemia to the crest of the Alps amounts to about 7 metres.

Résumé: La formule d'approximation d'Ö l a n d e r pour le nivellement astronomique a été développée, en supposant une courbure du géoïde uniforme, et appliquée dans le calcul du secteur Nord de l'arc du méridien Großenhain—Pola. En montant des pays plats vers la haute montagne, on observe très nettement une diminution de précision. Tandis que dans la région de Préalpes le réseau de premier ordre suffit en général, il est souhaitable de multiplier les points de second ordre en s'approchant de la montagne. Les résultats permettent de vérifier la méthode de P r e y, originale et essentiellement différente. Enfin, on déduit pour 35 points les altitudes du géoïde autant que possible absolues, en utilisant la position absolue sur l'ellipsoïde d'H a y f o r d, du groupe des réseaux européens. Le rehaussement du géoïde depuis le bord septentrional de la Bohême jusqu'à la crête des Alpes comporte environ 7 m.

1. Das astronomische Nivellement nach Helmert und Niethammer

Helmerts astronomisches Nivellement war ursprünglich für synthetische Detailuntersuchungen des Geoids in bezug auf ein willkürliches Referenzellipsoid mit willkürlichem Nullpunkt gedacht. Es beruht bekanntlich auf der Integration differentieller Unterschiede zwischen dem Referenzellipsoid und dem Geoid und hat daher die Kenntnis der relativen Lotabweichung in vielen, nahe beieinander liegenden Punkten zur Voraussetzung. Man geht im allgemeinen mit dem Punkt- abstand nicht über 2 km. Liegen die astronomischen Beobachtungen nicht so dicht, so werden weitere Punkte auf Grund der Erfahrungstatsache interpoliert, daß die Differenzen aus beobachteten Lotabweichungen und theoretischen Lotablenkungen, die aus densichtbaren Massenstörungen berechnet wurden, einen sehr regelmäßigen Verlauf aufweisen. Das Grundprinzip des astronomischen Nivellements ist bekannt und soll daher nur in aller Kürze dargelegt werden.

Wir betrachten (Abb. 1) zwei benachbarte Punkte P_i und P_k des Nivellements, zwischen denen die geodätische Linie im Ausgangsazimut α_i verläuft. Sind ferner ξ_i und η_i die meridionale und Ostwestkomponente der Lotabweichung in P_i , so ist die in das Azimut des Bogens fallende Lotabweichungskomponente durch:

$$\varepsilon_i = \xi_i \cos \alpha_i + \eta_i \sin \alpha_i \quad (1)$$

gegeben und man erkennt unmittelbar, daß die Berechnung von Meridianprofilen am bequemsten ist, weil sie lediglich astronomische Breitenbeobachtungen erfordert. ε_i ist der Winkel zwischen der Niveaufläche von P_i und einer Parallelfäche zum Referenzellipsoid. Wegen der Nichtparallelität der Niveauflächen wird der entsprechende Winkel ε'_i zwischen dem Geoid und einer Parallelfäche zum Ellipsoid davon etwas verschieden sein. Die gesuchte Erhebung des Geoids über dem Referenzellipsoid ist dann durch:

$$dN = \varepsilon' \cdot ds \quad (2)$$

bestimmt. Nebenbei bemerkt hat eine Geoidhebung zur Voraussetzung, daß die Richtung von P_i nach P_k im Geoidschnitt der Abweichung des astronomischen Zenits vom geodätischen Zenit im Punkte P_i entgegengesetzt ist. Für eine erste Annäherung würde es genügen, den Unterschied zwischen ε und ε' zu vernachlässigen. Da man aber gerade bei Detailuntersuchungen die Feinheiten im Geoidverlauf erfassen will, darf die Korrektion wegen Lotkrümmung nicht unterdrückt werden. An Stelle von (2) kann man nämlich schreiben:

$$dN = \varepsilon ds - (\varepsilon - \varepsilon') ds, \quad (2 a)$$

worin das letzte Glied die Korrektion wegen Lotkrümmung darstellt. Weil die Lotlinien die orthogonalen Trajektorien der Schar der Niveauflächen sind, ist die Lotkrümmung nur ein anderer Ausdruck für den Umstand, daß die Niveauflächen der Erde nicht parallel sind. Bereits Helmert¹⁾ hat darauf aufmerksam gemacht,

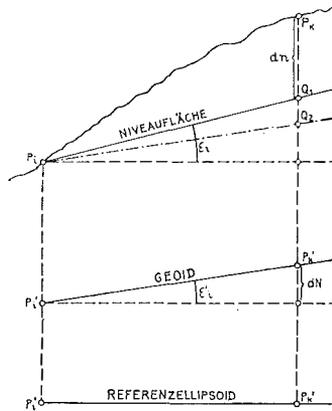


Abb. 1

daß diese Korrektion bis auf kleine Größen höherer Ordnung identisch ist mit der orthometrischen Korrektion des geometrischen Nivellements. Das unmittelbare Nivellementsergebnis $dn = \overrightarrow{Q_1 P_k}$: unterscheidet sich ja vom Unterschied der Seehöhen $dH = \overrightarrow{Q_2 P_k}$ gemäß:

$$dH = dn + (\varepsilon - \varepsilon') ds \quad (3)$$

um den gleichen Betrag.

Diese Überlegung gestattet eine für die Berechnung notwendige Transformation der Korrektion wegen Lotkrümmung:

$$dE = d(H - n) = (\varepsilon - \varepsilon') ds. \quad (4)$$

Bezeichnet allgemein \overline{G} den Mittelwert der Schwerebeschleunigung in der Lotlinie eines Punktes der Erdoberfläche und H seine Seehöhe, so ist der Potentialunterschied gegenüber dem Geoid $\overline{G}H$ und daher für den Übergang von P_i nach P_k :

$$g dn = d(\overline{G}H). \quad (5)$$

¹⁾ F. R. Helmert: Zur Bestimmung kleiner Flächenstücke des Geoids aus Lotabweichungen mit Rücksicht auf Lotkrümmung, I. u. 2. Mitteilung, Sitz.-Ber. d. preuß. Akad. d. Wiss., Berlin 1900 und 1901.

Führt man mit Niethammer²⁾ einen beliebigen konstanten Schwerewert g_0 ein:

$$\begin{aligned} g &= g_0 + (g - g_0) \\ \bar{G} &= g_0 + (\bar{G} - g_0), \end{aligned}$$

so läßt sich (5) schreiben:

$$\left[g_0 + (g - g_0) \right] dn = d \left[g_0 + (\bar{G} - g_0) \right] \cdot H = d(g_0 H) + d \left[H (\bar{G} - g_0) \right]$$

und es wird zusammen mit (4):

$$g_0 dE = g_0 d(H - n) = g_0 dH - g_0 dn = (g - g_0) dn + d(g_0 - \bar{G})H. \quad (6)$$

Durch Integration findet man für die Geoiderhebung von B über A:

$$N_A^B = \int_A^B \varepsilon ds - E_A^B = \int_A^B \varepsilon ds - \frac{1}{g_0} \left\{ \int_A^B (g - g_0) dn + H(g_0 - \bar{G}) \right\} \quad (7)$$

Niethammer hat übrigens für die Korrektur wegen Lotkrümmung noch zwei andere Ausdrücke entwickelt, hinsichtlich welcher auf die Originalarbeit verwiesen sei. Genau so, wie man schließlich beim geometrischen Nivellement die sphäroidische Reduktion, die Helmertsche Gebirgsreduktion und Niethammers „wahre“ Reduktion unterscheidet, kann man auch für die Korrektur wegen Lotkrümmung je nach den verwendeten Schwerewerten verschiedene Grade der Annäherung erzielen. Man wird natürlich umso genauer vorgehen müssen, je größer die Höhenunterschiede in dem zu berechnenden Geoidprofil sind. Niethammer weist noch den Unterschied zwischen seinem Verfahren und dem von Galle³⁾ für die Berechnung des Geoids im Harz eingeschlagenen einfacheren Weg nach.

Die Auswertung des Integrales $\int_A^B \varepsilon ds$ erfolgt mittels mechanischer Quadratur,

indem die horizontalen Entfernungen im Geoidschnitt als Abszissen und die Lotabweichungskomponenten ε als Ordinaten aufgetragen werden. Die Hauptarbeit verursacht aber die Reduktion wegen Lotkrümmung und es ist daher von Interesse, daß diese Reduktion selbst bei dem 187 km langen Meridianprofil des St. Gotthard trotz eines Höhenunterschiedes von fast 2400 m nur bis auf 43 cm ansteigt. Für das zentrale Meridianprofil des Brocken, das eine Längserstreckung von knapp 69 km hat, berechnete Galle eine maximale Korrektur von 4.8 cm! Der Höhenunterschied liegt hier bei rund 1000 m. Man erkennt, daß bei Untersuchungen, deren Ziel die Abschätzung der kontinentalen Undulationen ist, die Lotkrümmung vernachlässigt werden darf. Die Gesamtamplitude des Geoidverlaufs im Meridianprofil des St. Gotthard beträgt 234 cm und bei Berechnung ohne Berücksichtigung der Lotkrümmung 271 cm. Die entsprechenden Größen sind im Meridianprofil des Brocken 224 und 226 cm.

²⁾ Th. Niethammer: Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard II. Teil, Astr.-geod. Arbeiten in der Schweiz, Band 20, Bern 1939.

³⁾ A. Galle: Das Geoid im Harz, Veröffentl. d. Geod. Inst. Potsdam, Neue Folge, Band 61, Berlin 1914.

2. Die Näherungsformel für größere Distanzen

Das astronomische Nivellement im Sinne Helmersts ist ein Liniennivellement, das ähnlich wie das geometrische Nivellement aus der Summation möglichst kleiner Schritte hervorgeht. Eine großräumige Geoidbestimmung auf Grund von Lotabweichungen muß sich daher von der genannten Einschränkung zu befreien suchen. Sollen an Stelle der genäherten Differentiale des bisherigen Nivellements längere Seiten bis etwa 50 *km* treten, so kann man natürlich nicht ohneweiters mit der Formel (2) operieren. Was für die Bogendifferentiale *ds* eine Selbstverständlichkeit ist, muß für die Seiten eines Triangulierungsnetzes 1. Ordnung hypothetisch postuliert werden, nämlich, daß die Krümmung zwischen je zwei benachbarten Punkten dank einer ausreichenden Gleichförmigkeit gestattet, den zugehörigen Geoidschnitt durch einen Kreisbogen zu ersetzen. Diese Forderung setzt der Länge der geodätischen Linien sofort eine obere Grenze, die theoretisch aber nicht streng angebar ist, weil sie in hohem Maße von den topographischen Verhältnissen und den Massenunregelmäßigkeiten in der Erdkruste abhängt. Sie wird noch am ehesten erfüllt sein, wenn die Lotabweichungen in sämtlichen Punkten eines Fundamentalnetzes bekannt sind.

Bekanntlich wird ein auf der physischen Erdoberfläche beobachtetes Dreiecksnetz auf einer bis zu einem gewissen Grade willkürlichen Referenzfläche berechnet. Die Dreiecksexzesse und damit die ausgeglichenen Dreiecksseiten hängen nur sehr geringfügig von den Krümmungsverhältnissen des Ellipsoides ab, während die durch geodätische Übertragung gewonnenen Koordinaten stark mit den Parametern der Referenzfläche variieren. Gemäß obiger Voraussetzung entsprechen also einer geodätischen Linie *AB* auf dem Geoid und dem gewählten Referenzellipsoid zwei gleich lange Kreisbögen verschiedener Amplitude. Sind φ' , λ' die astronomischen, φ , λ die geodätischen Breiten und Längen, so sind die Amplituden Δ_1 und Δ_2 gegeben durch:

$$\begin{aligned} \cos \Delta_1 &= \sin \varphi_A' \sin \varphi_B' + \cos \varphi_A' \cos \varphi_B' \cos (\lambda_B' - \lambda_A') \\ \cos \Delta_2 &= \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos (\lambda_B - \lambda_A) \end{aligned} \quad (8)$$

Der Vollständigkeit halber sei hier noch einmal auf die Frage der Lotkrümmung eingegangen. Die Berechnung von Δ_1 setzt in aller Strenge die Lotrichtungen in den Geoidpunkten voraus, während sich die astronomischen Beobachtungen auf Punkte in verschiedenen Sechöhen beziehen. Die Reduktion der beobachteten Breite auf Meeresniveau erreicht nach der bekannten Formel:

$$\Delta \varphi'' = 0.0001712'' \sin 2\varphi \cdot h_m \quad (9)$$

in der mittleren Breite von 45° erst in einer Sechöhe von 5840 *m* eine Bogensekunde. Für zwei benachbarte Netzpunkte wird demnach die Amplitude Δ_1 durch diese Korrektion am stärksten dann beeinflußt, wenn der Bogen bei einer Mittelbreite von 45° in meridionaler Richtung verläuft, und zwar erreicht in diesem Falle die Änderung bei einem Höhenunterschied von 1000 *m* den Betrag von 0.17''. Dieser Wert ist höchstens zweimal so groß wie der mittlere Fehler einer Polhöhenbestimmung. Schließlich wird bei einer Seitenlänge von 50 *km* und dem angenommenen

Höhenunterschied von 1000 *m* der maximale Fehler in der Geoidhebung erst 2 *cm*, wenn man diese Korrektur vernachlässigt. Noch klarer und allgemeiner zeigt sich der Einfluß der Lotkrümmung, wenn man fiktiv die Referenzfläche mit dem Geoid zusammenfallen läßt. Dann gibt es überhaupt nur als Folge der Lotkrümmung kleine meridionale Lotabweichungen, die für jeden Punkt eine Funktion der Seehöhe sind und in 1000 *m* Höhe 0.17'' betragen. Für eine in dieser Höhe und in 45° Mittelbreite meridional verlaufende geodätische Linie von 1° oder rund 111 *km* Länge ergibt dann die spätere Formel (13) eine Geoidhebung von 9 *cm*, in völliger Übereinstimmung mit der orthometrischen Reduktion. Die Fehler, die wir mit der hypothetischen Annahme einer ideal gleichmäßigen Krümmung des Geoides begehen müssen, können natürlich beträchtlicher sein. Aus diesen Erwägungen heraus darf sicherlich eine auch bloß genäherte Berücksichtigung der Lotkrümmung unterbleiben.

Gemäß unserer grundlegenden Annahme wollen wir voraussetzen, daß der Geoidschnitt von *A* nach *B* durch einen Kreisbogen der Länge *s* ersetzt werden darf. Der zugehörige Zentriwinkel ist Δ_1 und daher der Krümmungsradius des Geoids zwischen *A* und *B*:

$$r_1 = \frac{s \rho''}{\Delta_1''}. \quad (10 a)$$

Das Referenzellipsoid sei in eine derartige Lage zum Geoid gebracht, daß seine Figurenachse mit der Rotationsachse der Erde parallel liege, der Geoidpunkt *A* mit seinem Bildpunkt *A'* zusammenfalle und die Lotrichtung in *A* mit der Ellipsoidnormalen den Lotabweichungswinkel ϑ einschließe. Die Flächennormale des Ellipsoides liegt natürlich nicht in der Ebene des Geoid-Vertikalschnittes. Ihre Projektion auf diese Ebene schließt aber mit der Lotrichtung in *A* den durch (1) definierten Winkel ein. Komplizierter liegen die Verhältnisse im Endpunkt *B* der geodätischen Linie. Denn der Bildpunkt *B'*, der nicht durch eine Projektion aus *B*, sondern durch die Netzausgleichung und die nachfolgende geodätische Übertragung auf dem Referenzellipsoid hervorgegangen ist, liegt selbst nicht in der Schnittebene. Aber selbstverständlich darf diese geringe Abweichung vernachlässigt werden. Auch die Linie *A' B'* wird als Kreisbogen der Länge *s* mit dem Zentriwinkel Δ_2 und dem Krümmungsradius r_2 aufgefaßt:

$$r_2 = \frac{s \rho''}{\Delta_2''}. \quad (10 b)$$

Ferner schließt die Projektion der Flächennormalen von *B'* mit der Projektion der Lotrichtung im Punkte *B* abermals die Komponente des zugehörigen Lotabweichungswinkels ein. Die Strecke *B' B**, die fast vollständig mit *B'' B* zusammenfällt, gibt die Geoiderhebung des Punktes *B* über dem Ellipsoid, bezogen auf den Ausgangspunkt *A*. (Abb. 2.)

Aus unseren Erfahrungen über die Lotabweichungen geht hervor, daß die beiden Amplituden Δ_1 und Δ_2 im allgemeinen nur um wenige ‰ differieren, wenn man von extremen Ausnahmefällen absieht. Dasselbe gilt natürlich auch für die Krümmungsradien r_1 und r_2 . Ersetzt man die Kreisbögen durch die Sehnen σ , so folgt aus:

$$s = r \frac{\Delta''}{\rho''} \quad ; \quad \sigma = 2r \sin \frac{\Delta}{2}$$

leicht

$$\sigma = s \left(1 - \frac{\Delta''^2}{24\rho''^2} \right). \quad (11)$$

Der Unterschied zwischen Sehne und Kreisbogen beträgt bei einer Entfernung von 50 km erst rund 20 cm und kann daher vernachlässigt werden. Die Sehnen erfahren bei A gegenüber den Kreisbögen Depressionen, die gleich sind den halben

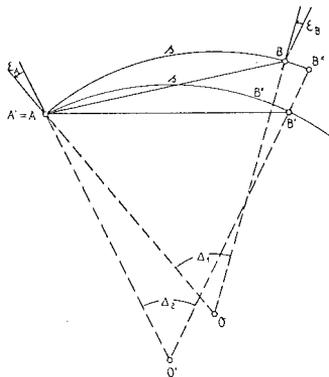


Abb. 2

Zentriwinkeln. Die Lotabweichungen sind im Sinne (astr.-geod.) definiert. Zählt man ferner den Bogen s oder die beiden Zentriwinkel Δ_1 und Δ_2 im Sinne \overrightarrow{AB} , also in der Figur 2 entgegengesetzt zu den Lotabweichungen, so gilt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \zeta_{A'} - \zeta_A & ; & \quad \Delta_1 = \zeta_{B'} - \zeta_{A'} \\ \varepsilon_B &= \zeta_{B'} - \zeta_B & ; & \quad \Delta_2 = \zeta_B - \zeta_A \end{aligned}$$

Dann wird der Winkel, den die beiden Sehnen bei A einschließen, gemessen in Richtung des Überganges vom Ellipsoid auf das Geoid:

$$\varepsilon_A + \frac{\Delta_1}{2} - \frac{\Delta_2}{2} = \frac{1}{2} (\varepsilon_A + \varepsilon_B). \quad (12)$$

Diese Sehnen können jetzt als Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks aufgefaßt werden, dessen Basis die Erhebung des Geoids über das Referenzellipsoid im Punkte B darstellt:

$$h_A^B = -2s \sin \left(\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{4} \right).$$

Das negative Vorzeichen muß eingeführt werden, weil eine Hebung nur dann eintritt, wenn der Vertikalschnitt von A nach B der Abweichung des astronomischen Zenits von der Projektion des geodätischen Zenits abgewendet ist, oder wenn, kurz gesagt, ε und s entgegengesetztes Vorzeichen haben. Damit haben wir die Formel gefunden:

$$h_A^B = -\frac{s}{2} \cdot \frac{(\varepsilon_A + \varepsilon_B)''}{\rho''}, \quad (13)$$

in die die Projektionen der Lotabweichungen gemäß (1) einzuführen sind. Sie zeigt eine weitgehende Analogie zur Differentialformel (2), in die sie mit abnehmendem Abstand der beiden Punkte übergeht. Tatsächlich werden die bei der Ableitung von (13) begangenen Vernachlässigungen umso mehr berechtigt sein, je kleiner s ist.

Die Formel (13) ist für den Gebrauch noch nicht sehr bequem. Sie erfordert die Kenntnis des Azimuts der Linie, um die Projektionen der Lotabweichungen berechnen zu können, und eine genäherte Kenntnis des linearen Punktabstandes. Wir gewinnen aber leicht eine einfache Gebrauchsformel, wenn wir (1) in (13) einführen und genähert setzen:

$$s \cos \alpha = M \cdot \frac{(\varphi_B - \varphi_A)'}{\rho'} \quad ; \quad s \sin \alpha = N \cos \varphi_m \cdot \frac{(\lambda_B - \lambda_A)'}{\rho'}$$

wobei die Breiten- und Längendifferenzen in Bogenminuten ausgedrückt sind. Nunmehr setzen wir mit Ö l a n d e r ⁴⁾:

$$\frac{M \text{ (in cm)}}{\rho' \rho''} \doteq \frac{N \text{ (in cm)}}{\rho' \rho''} \doteq 0.9. \quad (14)$$

Weil M zwischen 6335 km und 6399 km, N zwischen 6377 km und 6399 km schwankt, ist der damit begangene Fehler maximal 0.0066 für M und 0.0024 für N . Mithin stellt Ö l a n d e r s Formel:

$$h_A^B \text{ (in cm)} = -0.9 \left[(\varphi_B - \varphi_A)' \cdot \left(\frac{\xi_A + \xi_B}{z} \right)'' + (\lambda_B - \lambda_A)' \cos \varphi_m \left(\frac{\eta_A + \eta_B}{z} \right)'' \right] \quad (15)$$

eine vollkommen ausreichende Näherung dar, die in den späteren Rechnungen benützt wird. Selbst bei den extremen Annahmen eines Breitenunterschiedes von 100' und einer gleichzeitigen mittleren meridonalen Lotabweichungskomponente von 10'' erreicht der Fehler im Höhenunterschied erst 6.6 cm, ein Betrag, der leicht aus der hypothetischen Voraussetzung gleichmäßiger Krümmung folgen kann, wie Dreieckszusammenstellungen beweisen.

Der Ausdruck (15) bedarf aber noch einer prinzipiellen, ergänzenden Betrachtung. Denn die bisherigen Überlegungen gingen von der Annahme aus, daß der Anfangspunkt A mit seinem Bildpunkt zur Deckung gebracht wird, also streng genommen $h_A = 0$. Andererseits ergibt sich die relative Geoidhebung h_B in B in Richtung der Flächennormalen des Ellipsoides. Um also für die nächste Linie BC den Höhenunterschied h_B^C , gemessen in der Ellipsoidnormalen von C zu bestimmen, müssen wir uns vorerst das Ellipsoid entlang der Flächennormale in B um h_B verschoben denken, damit wieder der neue Ausgangspunkt B mit seinem Bildpunkt zur Deckung gelangt. Bei dieser Verschiebung wird aber h_B mit dem cos des Zwischenwinkels $(BC) = \Delta$ auf die Flächennormale in C übertragen. Es ist also:

$$h_C = h_B \cos (BC) + h_B^C, \quad h_D = h_C \cos (CD) + h_C^D, \dots \quad (16)$$

⁴⁾ V. R. Ö l a n d e r: Lotabweichungen und Geoidhöhen, Veröffentl. d. Finnisch-geod. Institutes, Nr. 34, Helsinki 1944.

Nun erkennt man aber leicht, daß man bei der sukzessiven Aufsummierung der Höhenunterschiede die Multiplikation mit dem Cosinus des Zwischenwinkels unterdrücken darf. Selbst bei einem so großen Zwischenwinkel wie 1^0 weicht der \cos erst um 0.0002 von der Einheit ab. Nimmt man noch an, daß die Höhenunterschiede bereits auf 10 mm angewachsen sind, so beträgt der Fehler bei der folgenden Seite erst 2 mm, liegt also weit innerhalb der Abschlußfehler der einzelnen Dreiecke.

Die jeweilige Verschiebung unserer Referenzfläche entlang der Flächennormalen im gerade erreichten Endpunkt des Polygonzuges ist ein reines Gedankenexperiment, um den Voraussetzungen der Formel (14) oder (15) gerecht zu werden. Die Höhen (16) beziehen sich demnach einheitlich auf jene Lage des Referenzellipsoides, für die $h_A = 0$. Denken wir uns aber nachträglich das Ellipsoid so verschoben, daß sein Mittelpunkt mit dem Erdschwerpunkt zusammenfällt, so kann prinzipiell eine größere Ausgangshöhe h_A auftreten, und die bisherigen Höhen (16) gehen über in:

$$h_K \rightarrow h_K + h_A \cos (AK). \quad (17)$$

(Schluß folgt)

Studie über die Bestimmung der äußeren Orientierung von Luftbildern mittels Hilfsaufnahmen der Sonne und des Mondes

Von Josef K r a m e s, Wien, korrespondierendes Mitglied der Österr. Akademie
der Wissenschaften

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

(Schluß)

Nr. 4. *Die äußere Orientierung einer Luftaufnahme.* Wir betrachten vorerst zwei Himmelsaufnahmen, die im gleichen Augenblick von einem Flugzeug **F** und von einem festen Erdstandpunkt **E** aus hergestellt werden. Greift man aus den zugehörigen Zielstrahlbündeln die zu bestimmten Raumrichtungen parallelen Strahlen heraus, so bilden die so mittels Parallelität einander zugeordneten (gerichteten) Strahlenpaare zwei untereinander *kongruente Bündelfiguren*. Diese können durch eine reine *Parallelverschiebung* zur Deckung gebracht werden. Bringt man nun das Bündel (**F**) der Flugzeugaufnahme in irgend eine andere Lage (wie dies dem Vorgang bei der Auswertung von Luftbildern entspricht), so kann man das Bündel (**E**) der zweiten Aufnahme immer so bewegen, daß zwei seiner Strahlen mit ihren entsprechenden, d. h. ursprünglich parallelen Strahlen von (**E**) (auch der Zielrichtung nach) zur Deckung kommen. *Bei diesem Vorgang fällt jeder Strahl mit seinem entsprechenden zusammen, kurz gesagt, die beiden Bündelfiguren vereinigen sich.* Wir betrachten nun insbesondere die zur Erdachse **a** und zur Lotrichtung im Flugzeugstandpunkt **F** parallelen Bündelstrahlen **a^F**, **a^E** und **l^F**, **l^E** (s. Abb. 3). Sind in beiden Bündeln die zu zwei weiteren Raumrichtungen parallelen Zielstrahlen **s^E**, **m^E**, bzw. **s^F**, **m^F** bekannt und bringt man **s^E** mit **s^F** und zugleich **m^E** mit **m^F** zur Deckung, so fallen nach Obigem auch die Strahlen der Paare **l^E**, **l^F** und **a^E**, **a^F**

beschreibungen, Zusammenstellung der Beobachtungsergebnisse u. a. verloren gegangen. Zudem liegen noch verschiedene Linien vor, die nur vermarktet, aber nicht mehr gemessen wurden. Es wurde also auch hier eine Reihe von Erneuerungsarbeiten notwendig.

4. Bayern.

Bayern grenzt im Norden an den Netzteil IV (Linien: Hanau—Bronzell bei Fulda; Bronzell—Neustadt, Neustadt—Königshofen—Hildburghausen—Rodach—Coburg, Coburg—Köppelsdorf, Probstzella—Saalfeld—Neustadt a. d. Orla) des Reichshöhennetzes, von dem aus im Zuge der Bearbeitung des Reichshöhennetzes noch folgende Linien in Bayern vermarktet und z. T. beobachtet werden konnten: Neustadt a. d. S.—Würzburg, Coburg—Lichtenfels—Bamberg; Lichtenfels—Kulmbach—Hof. Im Osten Bayerns verläuft der Westrand des Netzteils V von Hof über Weiden, Wernberg, Schwandorf, Regensburg, Straubing, Plattling, Passau bis Neuhaus, von dem nach Osten noch die Linien Hof—Oberwiesenthal, Wernberg—Pilsen, Schwandorf—Eisenstein, Passau—Eisenstein abzweigen.

Im übrigen wurde in Bayern nach Vereinheitlichung und Verstaatlichung der Höhenmessung ab 1925 versucht, das alte Präzisionsnivellement durch Nachmessung und Erneuerung der alten Linien systematisch zu erneuern. Die Überprüfung dieser Wiederholungsmessung zeigt aber, daß die Ergebnisse in vielen Fällen, insbesondere wegen mangelhafter Identität der Anschlußpunkte und Fehlen eines festen Beobachtungsprogramms nur sehr bedingt brauchbar sind. Die Messungen sind für den Aufbau eines neuen Haupthöhennetzes nicht geeignet. Damit ist Bayern hinsichtlich des Haupthöhennetzes gegenüber den übrigen deutschen Ländern im Rückstand. Dies führte dazu, daß ab 1948 der Neubearbeitung des Haupthöhennetzes in Bayern besondere Aufmerksamkeit geschenkt wurde.

(Schluß folgt)

Die Näherungsmethoden des astronomischen Nivellements und das Geoid im Nordteil des Meridianbogens Großenhain—Kremsmünster—Pola

Von Karl L e d e r s t e g e r, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

(Fortsetzung)

3. Helmer's „Sphäroidbestimmung“⁵⁾ und ihre moderne Fortentwicklung

Einen weiteren Schritt auf dem Wege großräumiger Annäherung stellt Helmer's kombiniertes graphisch-rechnerisches Verfahren der Sphäroidbestimmung dar. Helmer nennt nämlich die den Lotabweichungen angepaßte Fläche das Sphäroid, weil ja wegen der Vernachlässigung der Lotkrümmung

⁵⁾ F. R. Helmer: „Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie“, Leipzig 1880, Band 1, Seite 564—573.

in Strenge nicht das Geoid, sondern schon eher die in der mittleren Höhe der Beobachtungsstationen verlaufende Niveaufläche approximiert wird. Nach Helmer werden die astronomischen Stationen in eine Übersichtskarte eingetragen und aus ihnen möglichst geradlinige Züge ausgewählt. Die in die Zugrichtung fallenden Lotabweichungskomponenten (l) werden in Funktion der linearen Abstände von einem willkürlichen Nullpunkt aufgetragen und graphisch geglättet. Dem so entstehenden Diagramm kann man für äquidistante Punkte die ε -Werte entnehmen und wie üblich das Integral $\int \varepsilon ds$ bilden. Das längste derart berechnete Geoidprofil verläuft im Meridian des Brocken von Sophienhoi in Schleswig bis zum Lanserkopf bei Innsbruck⁶⁾. Unter der Voraussetzung, daß die meridionale Lotabweichung im alten deutschen Fundamentalpunkt Rauenberg $+5''$ beträgt, ergab dieses Nivellement von der Breite von Rauenberg bis zu den Lanserköpfen bezüglich des Besselschen Ellipsoides einen Geoidanstieg von 11.7 m .

Hat man genügend flächenhaftes Material, so können in zwei getrennten Übersichten die Linien gleicher ξ - und η -Komponenten konstruiert werden. Wird über diese nach einem Vorschlag Hayfords ein nach Norden orientiertes äquidistantes und orthogonales Liniennetz gelegt, das Quadrate von 20.6 km Seitenlänge bildet, so liefert für jede Quadratsseite das mittlere ξ , bzw. η direkt den Höhenunterschied in $d\text{m}$. Denn die Formel:

$$dh = \frac{\varepsilon''}{\rho''} \cdot ds$$

ergibt mit $ds = \rho'' d\text{m}$ unmittelbar: $dhi = \varepsilon'' d\text{m}$. Die Art der Ausgleichung eines solchen Höhennetzes wird sich dem verfolgten Zweck anzupassen haben. Vor allem wird die Punktdichte für die Maschenweite der Hauptausgleichung maßgebend sein. Am bequemsten ist es, die Höhen der Knotenpunkte als Unbekannte einzuführen und den Ausgleich nach vermittelnden Beobachtungen vorzunehmen. Anschließend werden die Verbesserungen für die Zwischenpunkte abgeleitet.

Die bisher umfassendste Berechnung dieser Art wurde im Institut für Erdmessung in Bamberg im Bereiche des Zentraleuropäischen Netzes durchgeführt⁷⁾. Sie sollte bloß der Reduktion der Grundlinien vom Geoid auf das internationale Referenzellipsoid dienen, was auch die große durchschnittliche Punktentfernung von 76 km rechtfertigt. Aus praktischen Gründen wurden die Höhenmaschen weitgehend mit den Ketten des zentraleuropäischen Netzes zur Deckung gebracht. Die durchschnittliche Länge der Maschenseiten war 250 km . Die Widersprüche der Vierecke stiegen auf 6.7 m an, überschritten also bereits die Größenordnung der gesuchten Undulationen. Trotz dieses bedenklichen Umstandes scheint aber der Ausgleich der 13 Maschen brauchbare Ergebnisse geliefert zu haben, wie aus einem nachträglichen Vergleich mit vier exakteren astronomischen Nivellements hervorging.

⁶⁾ Verhandlungen der vom 17. bis 23. September 1888 in Salzburg abgehaltenen Konferenz der permanenten Kommission der Internationalen Erdmessung, Berlin 1889, Protokolle, Seite 19 und Tafel II.

⁷⁾ H. Wolf: Die angenäherte Bestimmung des Geoids mittels astronomischen Nivellements im Bereich des Zentraleuropäischen Netzes, Veröffentl. des Instituts für Erdmessung in Bamberg, Heft 6/L, 1949, Seite 57–71.

4. Das astronomische Nivellement A. P r e y s

Eine wesentlich verschiedene Art eines großräumigen astronomischen Nivellements verdanken wir A. P r e y s⁸⁾. Diese originelle Methode wurde kürzlich in einem andern Zusammenhang in dieser Zeitschrift⁹⁾ in ihren Grundlagen dargelegt, so daß hier einige ergänzende Bemerkungen genügen werden. Wie schon dort erwähnt, geht Prey von denselben vereinfachenden Annahmen hinsichtlich der Krümmungsverhältnisse aus, die auch dem früheren Näherungsverfahren zugrundeliegen. Bei der Aufstellung seines Systems rein astronomischer Breiten, Längen und Azimute, das unabhängig ist von jeder Beziehung auf ein bestimmtes Ellipsoid, ergibt sich eine Schwierigkeit dann, wenn nicht alle Punkte Laplacesche Punkte sind. In diesem Falle werden die fehlenden Längendifferenzen rein sphärisch aus den beobachteten Polhöhen und den Differenzen von Azimut und Gegenazimut nach der bekannten Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} = \frac{\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{a_{12} - a_{21}}{2} \dots \dots \dots (18)$$

berechnet. Letztere Differenz ist nämlich nach dem D a l b y schen Satz weitgehend unabhängig von der Abplattung des Rotationsellipsoides. Hingegen beziehen sich die berechneten Längen nicht, wie es wünschenswert wäre, strenge auf das Geoid. Im Hinblick auf die notwendige hypothetische Annahme gleichmäßiger Krümmung des Geoids fällt dieser Umstand aber nicht ins Gewicht.

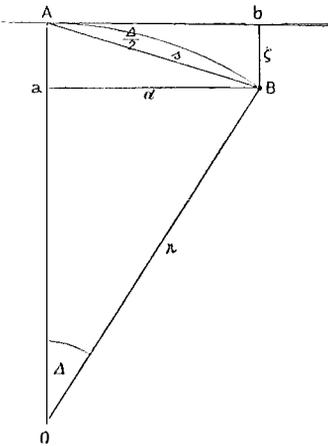


Abb. 3

Weil P r e y kein Referenzellipsoid benützt, muß er in jedem Dreieckspunkt ein eigenes lokales Koordinatensystem legen, dessen Grundebene mit der Tangentialebene des Geoids zusammenfällt, und in dem die räumlichen Relativkoordinaten des Nachbarpunktes festgelegt werden. Aus nebenstehender Abbildung liest man unmittelbar ab:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= d \cos \alpha_{AB} \\ \eta &= d \sin \alpha_{AB} \\ \xi &= -d \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2} \end{aligned} \right\} (19)$$

mit:

$$d = r \sin \Delta = \frac{s \rho''}{\Delta''} \sin \Delta = s_{AB} \rho'' \cdot \frac{\sin \Delta}{\Delta''}$$

Mittels der astronomisch-geographischen Koordinaten der Dreieckspunkte werden diese lokalen Systeme auf ein einheitliches Ausgangssystem transformiert und die

⁸⁾ A. P r e y s: Versuch eines astronomischen Nivellements ohne Netzausgleich. Denkschriften der Akad. d. Wiss. Wien, Math.-Naturwiss. Klasse, Band 104, Wien 1941.

⁹⁾ K. L e d e r s t e g e r: Die geophysikalischen Arbeiten Adalbert P r e y s, Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrg. 38, 1950, Seite 80 ff.

so erhaltenen einheitlichen Koordinaten aller Geoidpunkte werden erst jetzt zu einem beliebigen Referenzellipsoid in Beziehung gesetzt. P r e y wählt hierfür das Besselsche Ellipsoid, und zwar in einer derartigen Lage, daß es das Geoid im Ausgangspunkt berührt. Es ist dies die bei der Berechnung einer Landesvermessung früher übliche Lage, derzufolge die geodätischen Ausgangswerte im willkürlichen Triangulierungshauptpunkt mit den astronomischen Beobachtungsdaten übereinstimmen und die kleine Achse des Ellipsoides der Rotationsachse der Erde parallel liegt. Die Gleichung des so gelagerten Ellipsoides lautet nach H e l m e r t:

$$d^2 (1 - e^2 + e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi_0) + z'^2 (1 - e^2 \cos^2 \varphi_0) - 2 d z' e^2 \cos \alpha \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + 2 z' a \frac{1 - e^2}{W_0} = 0. \quad (20)$$

Hierin sind d und α die horizontalen Polarkoordinaten eines beliebigen Punktes, φ_0 die Polhöhe des Ausgangspunktes und z' die z -Koordinate des jeweiligen Ellipsoidpunktes. P r e y bringt diese Gleichung in die Form:

$$d^2 (1 - e^2 + e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi_0) + \frac{2 a (1 - e^2)}{W_0} z' \cdot \left[1 - \frac{d e^2 \cos \alpha \sin 2 \varphi_0 \cdot W_0}{2 a (1 - e^2)} + \frac{z' (1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 W_0)}{2 a (1 - e^2)} \right] = 0 \quad (20)$$

und läßt zunächst in der eckigen Klammer die Glieder der Ordnung $z'd$ und z'^2 weg. Dann kann man schreiben:

$$z' = c (1 + b \cos 2\alpha) d^2 \quad (21)$$

wobei:

$$c = - \frac{W_0}{2 a (1 - e^2)} \left(1 - e^2 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \varphi_0 \right) \\ b = e^2 \cos^2 \varphi_0 : 2 \left(1 - e^2 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \varphi_0 \right).$$

Setzt man die so gewonnenen ersten Näherungen für z' in die obige eckige Klammer ein, so erhält man leicht die verbesserten definitiven Werte. Nebenbei bemerkt ist P r e y bei der numerischen Berechnung der Gleichung für z' durch irrthümliche Verwendung von $\sin^2 \varphi_0$ statt $\cos^2 \varphi_0$ ein kleiner Fehler unterlaufen.

Vergleicht man nun die z -Koordinaten der Geoidpunkte mit den zugehörigen ellipsoidischen z' -Werten, so ist das Geoid gegenüber dem Referenzellipsoid punktweise aus den Differenzen $(z - z')$, d. h. aus den Abständen parallel der z -Achse des gewählten Koordinatensystems festlegbar. Selbstverständlich wird man trachten, Dreiecke oder größere Figuren zu schließen, und wird die auf verschiedenen Wegen berechneten Koordinaten mitteln. Schließlich kann man durch Multiplikation mit dem Cosinus des Neigungswinkels die Geoidhöhen wie üblich auf die Richtung der Lotlinien umrechnen. Die Art, wie P r e y aus den Differenzen $(z - z')$ sofort das bestanschließende Ellipsoid berechnet, gehört ebensowenig hierher wie seine allgemeinen Bemerkungen über den Netzausgleich.

Prey hat zur numerischen Erprobung seiner Methode die Meridiankette Großenhain—Kremsmünster—Pola¹⁰⁾ herangezogen und es soll daher die Anwendung der Ö l a n d e r s c h e n Näherungsformel auf den Nordteil dieser Kette eine vergleichende Gegenüberstellung ermöglichen.

5. Die praktische Erprobung der Näherungsformel Ö l a n d e r s

Obwohl Ö l a n d e r in seiner jüngst erschienenen Arbeit¹¹⁾ die Näherungsformel zur Bestimmung des Geoides in Finnland, Estland und Litauen angewendet hat, erscheint der folgende Versuch deshalb nicht überflüssig, weil er den Genauigkeitsabfall bei der Annäherung an das Hochgebirge abzuschätzen gestattet, ganz abgesehen von dem gerade erwähnten Vergleich mit den Ergebnissen P r e y s. Dieser beabsichtigte Vergleich zwingt dazu, zunächst das B e s s e l s c h e Ellipsoid beizubehalten und, ausgehend von der österr.-ungar. Militärtriangulierung, deren System bekanntlich auch der österreichischen Landesvermessung im wesentlichen zugrundeliegt, die Referenzfläche so parallel zu verschieben, daß sie das Geoid im Punkte Viehberg berührt, den P r e y zum Ausgangspunkt gewählt hat. Dementsprechend ist das geodätische Netz in diesem Punkte um die Beträge:

$$\begin{aligned} d\varphi_0 &= -3.03'' \\ d\alpha_0 &= -3.02 \end{aligned} \quad (21)$$

zu verschieben und zu verdrehen. Eine Längenänderung kommt nicht in Frage, weil wir nur meridionale und azimutale Lotabweichungskomponenten benötigen. Die H e l m e r t s c h e n Differentialgleichungen liefern dann mit ausreichender Genauigkeit folgende Formeln für die Transformation der ursprünglichen Lotabweichungskomponenten $\xi_K' = (\varphi' - \varphi)_K$ und $\eta_K' = (\alpha' - \alpha)_K \cotg \varphi_K$:

$$\begin{aligned} d\xi_K &= +3.03'' - 2.005'' \sin l \\ d\eta_K &= (+2.00'' + 3.03'' \sin l) \operatorname{cosec} \varphi_K, \end{aligned} \quad (22)$$

worin l natürlich den Längenunterschied gegenüber Viehberg bedeutet.

Die folgende Tabelle 1 enthält die geodätischen Ausgangswerte im System der MT, resp. der österreichischen Landesvermessung, die zugehörigen meridionalen und azimutalen Lotabweichungskomponenten, sowie die Endwerte:

$$\begin{aligned} \xi &= (\varphi' - \varphi) + d\xi \\ \eta &= (\alpha' - \alpha) \cotg \varphi + d\eta. \end{aligned} \quad (23)$$

Hingegen sind die transformierten geodätischen Koordinaten überflüssig, weil in Formel (15) nur die in Bogenminuten ausgedrückten Koordinatendifferenzen benachbarter Punkte eingehen, die von den Änderungen $d\varphi_K$ und $d\lambda_K$ weitgehend unabhängig sind.

¹⁰⁾ R. S c h u m a n n - F. H o p f n e r: Der Meridianbogen Großenhain—Kremsmünster—Pola, Astron.-geodät. Arbeiten Österreichs, Neue Folge, Bd. 1, Wien, 1922.

¹¹⁾ V. R. Ö l a n d e r: On the Geoid in the Baltic Area and the Orientation of the Baltic Ring. Veröffentl. des Finnischen Geodät. Institutes, Nr. 38, Helsinki 1950.

Tabelle 1:

	φ	λ	$(\varphi' - \varphi)$	$(\alpha' - \alpha)$	ξ	η	ξa	ηa
1. Jauernick	51°05' 42.09''	32°33' 55.56''	+ 0.50''	- 3.36''	+ 3.52''	- 0.13''	+ 4.19''	+ 3.06''
2. Lausche	50 50 59.44	32 18 52.90	+ 0.86	- 3.47	+ 3.89	- 0.24	+ 4.43	+ 2.86
3. Schneeberg	50 47 38.12	31 46 34.60	- 1.65	- 4.91	+ 1.42	- 1.48	+ 1.93	+ 1.43
4. Jeschken	50 44 00.72	32 39 10.37	+ 2.17	-13.56	+ 5.19	- 8.48	+ 5.65	- 5.25
5. Bernstein	50 34 17.56	31 07 56.27	- 1.99	+ 3.52	+ 1.08	+ 5.40	+ 1.52	+ 8.05
6. Donnersberg	50 33 20.37	31 35 56.88	+ 2.57	- 8.07	+ 5.62	- 4.10	+ 6.04	- 1.26
7. Bösig	50 32 23.42	32 23 16.30	+ 1.71	-10.36	+ 4.74	- 5.92	+ 5.11	- 2.80
8. Zban	50 12 16.04	31 25 10.34	+ 1.56	- 7.16	+ 4.62	- 3.42	+ 4.85	- 0.64
9. Sadska	50 08 17.28	32 38 35.31	- 1.60	- 6.24	+ 1.42	- 2.58	+ 1.56	+ 0.68
10. Dablitx	50 08 12.60	32 07 56.11	+ 1.02	- 6.58	+ 4.06	- 2.90	+ 4.22	+ 0.16
11. Pecny	49 54 53.76	32 27 17.25	+ 2.78	- 3.96	+ 5.80	- 0.70	+ 5.84	+ 2.49
12. Studeny vrch	49 48 21.10	31 45 03.97	+ 2.75	- 7.85	+ 5.80	- 4.05	+ 5.80	- 1.12
13. Mezy vrati	49 36 09.94	32 20 19.38	+ 0.05	- 6.14	+ 3.08	- 2.60	+ 2.95	+ 0.56
14. Roßberg	49 32 28.19	31 54 30.51	- 3.95	- 5.16	- 0.91	- 1.80	- 1.05	+ 1.20
15. Svidnik	49 23 37.05	32 37 37.42	- 2.55	-11.39	+ 0.47	- 7.10	+ 0.22	- 3.82
16. Kamejk	49 14 00.66	31 57 46.00	- 1.18	- 8.52	+ 1.86	- 4.73	+ 1.55	- 1.70
17. Vetrnik	49 01 16.97	32 15 04.80	+ 0.45	-10.25	+ 3.48	- 6.25	+ 3.04	- 3.10
18. Kubany	48 59 30.96	31 29 06.37	+ 0.51	- 3.54	+ 3.57	- 0.48	+ 3.15	+ 2.38
19. Kohout	48 46 09.36	32 15 00.81	+ 3.03	-10.88	+ 6.06	- 6.88	+ 5.49	- 3.72
20. Vichberg	48 33 39.49	32 17 27.29	- 3.03	- 3.02	0.00	0.00	- 0.68	+ 3.19
21. Hochschachen	48 20 10.41	31 09 50.09	- 6.17	-17.12	- 3.10	-12.63	- 3.86	- 9.86
22. Kleinmünchen	48 15 40.69	31 59 08.02	- 5.90	-12.79	- 2.86	- 8.75	- 3.69	- 5.66
23. Hofbrunn	48 09 39.02	31 16 42.23	+ 1.38	-13.81	+ 4.45	- 9.74	+ 3.59	- 6.93
24. Steiglberg	48 06 02.06	31 01 32.35	+ 1.15	- 8.48	+ 4.22	- 5.01	+ 3.35	- 2.29
25. Krensmünster	48 03 20.62	31 47 57.43	+ 2.43	-10.54	+ 5.48	- 6.82	+ 4.55	- 3.79
26. Spindeleben	47 55 40.71	32 21 47.91	+ 5.89	-13.86	+ 8.92	- 9.81	+ 7.89	- 6.56
27. Hochbuchberg	47 55 03.18	31 57 46.54	+ 8.49	-14.24	+ 11.53	-10.19	+ 10.52	- 7.09
28. Traunstein	47 52 25.45	31 30 26.16	+ 12.29	-11.68	+ 15.35	- 7.92	+ 14.33	- 5.00
29. Schafberg	47 46 37.60	31 06 03.97	+ 13.21	-16.95	+ 16.28	-12.76	+ 15.23	- 9.99
30. Voralpe	47 44 49.72	32 24 13.16	+ 4.35	-17.17	+ 7.38	-12.88	+ 6.26	- 9.61
31. Gr. Priel	47 43 02.93	31 43 50.95	+ 12.49	- 7.72	+ 15.54	- 4.36	+ 14.43	- 1.34
32. Gr. Pyhrgaß	47 39 11.50	32 03 54.32	+ 5.87	-12.04	+ 8.91	- 8.28	+ 7.75	- 5.13
33. Liezen	47 34 09.61	31 54 14.62	- 3.39	- 9.74	- 0.35	- 6.22	- 1.54	- 3.13
34. Großwand	47 30 12.49	31 10 51.37	+ 11.73	-15.27	+ 14.80	-11.36	+ 13.60	- 8.54
35. Bösenstein	47 26 37.85	32 04 16.40	-12.60	- 5.08	- 9.56	- 1.96	-10.83	+ 1.21

Die Gewichte der nach Formel (15) berechneten Höhenunterschiede wurden verkehrt proportional den Quadraten der Seitenlängen angenommen. Da das übrigens stellenweise erweiterte Höhennetz des nördlichen Meridianbogens nur teilweise mit den Dreiecken der Fundamentaltriangulierung übereinstimmt, und demnach die Seiten erst zu rechnen gewesen wären, wurden die Seitenquadrate durch die Ausdrücke:

$$s^2 = (\varphi_B - \varphi_A)' + (\lambda_B - \lambda_A)' \cos \varphi_m \quad (24)$$

ersetzt und die Gewichtseinheit durch (400 : s^2) festgelegt. Es entspricht dies einem Bogen von 20' oder einer Seite von rund 37 km. Auf diese Weise ergaben sich die Höhenunterschiede Δh und Gewichte der Tabelle 2;

Tabelle 2:

			Δh (cm)	Δh_a	p
1.	Jauernick	→ Lausche	+ 47.4	+ 82.4	1.31
2.		Schneeberg	+ 18.7	+ 110.2	0.33
3.		Jeschken	+ 97.8	+ 99.4	0.83
4.	Lausche	Schneeberg	- 7.8	+ 49.1	0.94
5.		Jeschken	+ 78.8	+ 45.5	1.88
6.		Donnersberg	+ 22.4	+ 102.7	0.38
7.		Bösig	+ 80.0	+ 79.8	1.13
8.	Schneeberg	Bernstein	+ 58.2	+ 125.1	0.51
9.		Donnersberg	+ 28.4	+ 51.9	1.60
10.		Bösig	+ 119.7	+ 62.8	0.52
11.	Jeschken	Bösig	- 13.4	+ 19.8	1.69
12.	Bernstein	Donnersberg	- 7.5	- 51.2	1.26
13.		Zban	+ 46.7	+ 26.5	0.66
14.	Donnersberg	Bösig	+ 140.0	+ 59.7	0.44
15.		Zban	+ 73.8	+ 97.5	0.82
16.		Dablitz	+ 173.8	+ 126.1	0.38
17.	Bösig	Sadska	+ 104.2	+ 81.8	0.59
18.		Dablitz	+ 56.9	+ 89.7	0.59
19.	Zban	Dablitz	+ 93.7	+ 22.4	0.52
20.		Studený vrch	+ 155.1	+ 124.7	0.54
21.	Sadska	Dablitz	- 48.3	+ 7.6	1.04
22.		Pecny	+ 32.8	+ 54.9	1.72
23.	Dablitz	Pecny	+ 79.4	+ 45.4	1.21
24.		Studený vrch	+ 42.2	+ 83.2	0.65
25.	Pecny	Studený vrch	- 23.9	+ 51.2	0.51
<hr/>					
26.	Pecny	Mezy vrati	+ 68.2	+ 80.3	1.08
27.		Roßberg	+ 26.6	+ 83.5	0.42
28.	Studený vrch	Mezy vrati	+ 117.0	+ 53.6	0.60
29.		Roßberg	+ 51.1	+ 33.7	1.38
30.	Mezy vrati	Roßberg	- 29.5	+ 16.4	1.36
31.		Svidnik	+ 69.2	+ 34.3	1.41
32.	Roßberg	Svidnik	+ 110.5	+ 29.7	0.46
33.		Kamejk	+ 14.1	+ 4.6	1.16
34.	Svidnik	Kamejk	- 128.2	- 56.9	0.52
35.		Vetrnik	- 48.7	- 13.1	0.56
36.	Kamejk	Vetrnik	+ 86.6	+ 50.7	1.38
37.		Kubany	- 8.5	+ 36.2	0.71
38.	Vetrnik	Kubany	- 85.6	- 4.9	0.44
39.		Kohout	+ 64.7	+ 57.9	1.75
40.	Kubany	Kohout	+ 157.8	+ 70.2	0.37

—	Kubany	Kleinmünchen	+ 96.2	+ 18.6	0.17
—		Hochschachen	— 66.5	— 55.2	0.24
41.	Kohout	Viehberg	+ 39.1	+ 27.4	2.52
—		Hochschachen	—344.0	—244.5	0.16
42.	Viehberg	Kleinmünchen	— 71.0	— 48.7	0.85
—	Viehberg	Hochschachen	—273.5	—162.0	0.19
<hr/>					
43.	Hochschachen	Kleinmünchen	+303.5	+213.8	0.37
44.		Hofbrunn	+ 52.3	+ 33.2	3.03
45.		Steiglberg	— 36.7	— 33.5	1.72
46.	Kleinmünchen	Hofbrunn	—231.0	—160.6	0.48
47.		Kremsmünster	— 37.7	— 26.9	1.92
48.		Spindeleben	+181.0	+121.1	0.64
49.		Hochbuchberg	+ 72.7	+ 58.1	0.94
50.	Hofbrunn	Steiglberg	— 53.0	— 30.7	3.45
51.		Kremsmünster	+183.6	+123.8	0.84
52.		Traunstein	+226.5	+188.2	1.05
53.	Steiglberg	Traunstein	+232.3	+171.9	0.71
54.		Schafberg	+203.2	+178.9	1.04
55.	Kremsmünster	Hochbuchberg	+113.6	+ 88.3	3.57
56.		Traunstein	+ 24.5	+ 46.3	1.56
57.	Spindeleben	Hochbuchberg	—139.2	— 93.7	1.54
58.		Voralpe	+ 96.1	+ 80.9	3.33
59.		Gr. Pyhrgaß	+ 34.3	+ 52.7	0.96
60.	Hochbuchberg	Traunstein	—117.4	— 70.2	1.17
61.		Voralpe	+271.3	+210.7	0.95
62.		Gr. Priel	+ 84.9	+ 99.2	1.73
63.		Gr. Pyhrgaß	+180.2	+153.1	1.49
64.	Traunstein	Schafberg	— 71.0	— 33.3	1.33
65.		Gr. Priel	+180.1	+147.0	2.37
66.	Schafberg	Gr. Priel	+246.9	+177.2	0.61
67.	Voralpe	Gr. Pyhrgaß	— 89.0	— 55.3	1.83
68.	Gr. Priel	Gr. Pyhrgaß	+119.3	+ 78.0	2.03
<hr/>					
69.	Großwand	Traunstein	—187.0	—198.9	0.60
70.		Schafberg	—264.5	—239.8	1.43
71.		Gr. Priel	— 17.8	— 63.0	0.61
72.	Bösenstein	Voralpe	+107.7	+ 88.4	0.78
73.		Gr. Priel	— 80.7	— 27.3	0.87
74.		Gr. Pyhrgaß	+ 2.6	+ 17.0	2.53
75.	Liczen	Gr. Priel	— 94.1	— 65.7	3.12
76.		Gr. Pyhrgaß	+ 23.2	+ 10.2	5.88
77.		Bösenstein	— 8.6	— 36.1	3.89
78.		Großwand	—206.0	—132.2	0.46

(Schluß folgt)

R. W e r n t h a l e r, „Nivellement und Schwere“, Vortrag im Rahmen der Referendar-
ausbildung, Lehrbrief Nr. 2 des Bayer. Landesvermessungsamtes in München.

J a h r e s b e r i c h t 1948 der Arbeitsgemeinschaften der Vermessungsverwaltungen der
süddeutschen Länder.

Im einzelnen enthält dieser Bericht zum Präzisionsnivellement folgende Aufsätze und
Vorschläge:

R. W e r n t h a l e r, „Bericht über das Präzisionsnivellement in Bayern“ S. 11—16;
A r n d t, „Geologisches Gutachten zum Vorentwurf des bayerischen Nivellements
I. O.“ S. 17—21;

B a y e r. L. V. A., „Vorschlag zur Neufassung der FM Bek. über das Höhen-
messungswesen in Bayern“ S. 23—46;

L i e d e, „Bericht über die Entstehung und Fortführung der Nivellements in Baden
und Württemberg“ S. 47—52;

S c h w a r z, „Höhennetz des Landes Hessen“ S. 53—80;

— Gründungsprotokoll der Arbeitsgemeinschaft für das Präzisionsnivellement,
S. 81.

J a h r e s b e r i c h t 1949/50 der Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der
Bundesrepublik Deutschland.

Im einzelnen enthält dieser Bericht zum Präzisionsnivellement folgende Berichte:
„Kurzbericht 1949/50 des Arbeitskreises Haupthöhennetz in der Arbeitsgemeinschaft
der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland“,
S. 87—91;

R. W e r n t h a l e r, „Vorschlag zur Ausgleicheung des süddeutschen Haupthöhen-
netzes“, S. 93—98;

— „Erläuterung zur Höhenfestpunktübersicht“.

M. N ä b a u e r, „Das Bayerische Präzisionsnivellement“, Nachrichten aus dem Reichs-
vermessungsdienst, 1940, S. 122—149. Der Bericht enthält alle wichtigen Quellenschriften für das
alte Bayer. Präzisionsnivellement.

G r o n w a l d, „Die Nivellements im Bezirk des Niedersächsischen Landesvermessungs-
amtes und ihre inneren Zusammenhänge“, bearbeitet im Auftrag des Nieders. LVA. Hannover 1949.

V e r ö f f e n t l i c h u n g e n :

„Die Großherzogl. Badischen Hauptnivellements mit Anschlüssen an die Nachbar-
staaten“, herausgegeben von der Großherzogl. Oberdirektion des Wasser- und
Straßenbaues 1885;

„Publikation der Kgl. Württemb. Kommission für Europäische Gradmessung,
Präzisionsnivellement“, Stuttgart 1885;

„Verzeichnis der an den Württembergischen Staatseisenbahnen angebrachten
Höhenpunkte mit Angabe der Höhen über Normalnull. Stuttgart 1895. Heraus-
gegeben von der Kgl. Generaldirektion der Württemberg. Staatseisenbahnen.

Die Näherungsmethoden des astronomischen Nivellements und das Geoid im Nordteil des Meridianbogens Großhain—Kremsmünster—Pola

Von Karl L e d e r s t e g e r, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

(Schluß)

Der Ausgleich der Höhenunterschiede wurde nach vermittelnden Beobach-
tungen in mehreren Abschnitten durchgeführt. Der erste Abschnitt reichte bis zur
Seite Pecny—Studeny vrch und umfaßte außer dem vorläufigen Höhennullpunkt

Jauernick noch 11 Punkte mit 25 Bestimmungsgleichungen. Hieran wurde der zweite Abschnitt, der mit 7 Punkten und 15 Gleichungen in der Seite Kubany—Kohout endete, mit Zwang angeschlossen. Die folgende schwache Stelle mit den beiden kurzen Seiten Kohout—Viehberg—Kleinmünchen wurde mit dem Fünfeck Kubany—Kohout—Viehberg—Kleinmünchen—Hochschachen unter Einbeziehung von drei Diagonalen überbrückt. Von dieser Figur wurden nach dem Ausgleich nur die Höhenunterschiede der beiden kurzen Seiten 41 und 42 beibehalten. An den Punkt Kleinmünchen wurde sodann die dritte Figur mit 11 Punkten und 26 Gleichungen angeschlossen. Bemerkenswert ist, daß der Lotabweichungspunkt Mairhofberg wegen einer vermutlich größeren lokalen Störung ausgeschlossen werden mußte.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist in den drei Abschnitten der Reihe nach: 15,6, 11,1 und 19,7 *cm*. Vereinigt man die beiden ersten Abschnitte, so erhält man als mittleren Fehler der Gewichtseinheit 14,2 *cm* und der Vergleich mit dem dritten Abschnitt zeigt deutlich die Zunahme des Fehlers bei Annäherung an das Hochgebirge. Ein mittlerer Fehler von 10 *cm* entspricht in den vereinigten beiden ersten Abschnitten einer Seite von (20' : 1,42) oder 26 *km* und im dritten Abschnitt analog einer Seite von rund 19 *km*. Man wird also im allgemeinen im Flachland mit den Dreiecken 1. Ordnung auskommen, bei der Annäherung an das Hochgebirge aber zumindest fallweise auf das Triangulierungsnetz 2. Ordnung zurückgreifen müssen. Schließlich gestattet die oben zitierte Arbeit Ö l a n d e r s noch einen Vergleich unserer Ergebnisse mit denen in Finnland und den baltischen Staaten. Weil Ö l a n d e r die Gewichtseinheit durch (300 : s^2) definiert hat, sind seine auf Seite 11 gegebenen mittleren Fehler mit 1,15 zu multiplizieren:

Finnland	: $m = \pm 11.2 \text{ cm}$
Estland	10.6
Litauen	7.5

Im Hinblick auf den soeben herausgestellten Unterschied zwischen Flachland und Gebirge darf man daher die Ergebnisse als gleichwertig bezeichnen.

Die notwendige Verkleinerung der Seitenlängen im Gebirge machte es leider unmöglich, den Meridianbogen über den Alpenkamm hinaus weiter nach Süden zu verfolgen, weil gerade hier im astronomischen Stationsnetz größere Lücken klaffen. Nur mehr die drei Punkte Großwand, Bösenstein und Liezen konnten noch der Reihe nach aus je drei anderen Punkten in ihrer Höhe durch Bildung des allgemeinen arithmetischen Mittels abgeleitet werden. Die nachträgliche Verbindung Liezen—Großwand weist aber bereits einen beträchtlichen Widerspruch auf, der jedoch in Anbetracht der Seitenlänge nicht verwunderlich ist.

Wie schon erwähnt, wurde bei der Ausgleichung der nördlichste Punkt Jauernick zum Höhennullpunkt gewählt. Dies erwies sich als notwendig, weil der P r e y s c h e Nullpunkt Viehberg gerade an der schwächsten Stelle liegt. Die Umrechnung auf diesen Nullpunkt bietet aber wegen der geringen Breitenausdehnung des Bogens keine Schwierigkeiten. Nach Formel (17) ist der maximale Einfluß des $\cos(AK)$ im Punkte Jauernick erst 5 *mm*, welcher Betrag bei der sonstigen Unsicherheit natürlich unterdrückt werden darf. Wir finden somit folgende auf

Viehberg bezogene und auf *cm* abgerundete Höhen, denen sofort die P r e y schen Werte gegenübergestellt werden:

	<i>cm</i>	Prey		<i>cm</i>	Prey
1. Jauernick	— 483;		19. Kohout	— 39;	— 39
2. Lausche	— 447		20. Viehberg	0	0
3. Schneeberg	— 475	— 534	21. Hochschachen	— 345	
4. Jeschken	— 363	— 389	22. Kleinmünchen	— 61	— 69
5. Bernstein	— 437		23. Hofbrunn	— 302	
6. Donnersberg	— 453	— 480	24. Steiglberg	— 361	
7. Bösig	— 361	— 391	25. Kremsmünster	— 109	— 113
8. Zban	— 388	— 422	26. Spindeleben	+ 155	
9. Sadska	— 250	— 310	27. Hochbuchberg	+ 7	
10. Dablitz	— 294	— 339	28. Traunstein	— 96	
11. Pecny	— 217	— 245	29. Schafberg	— 164	
12. Studeny vrch	— 243	— 272	30. Voralpe	+ 263	+ 80
13. Mezy vrati	— 145	— 171	31. Gr. Priel	+ 81	
14. Roßberg	— 187	— 220	32. Gr. Pyhrgaß	+ 188	
15. Svidnik	— 69	— 66	33. Liezen	+ 173	— 168
16. Kamejk	— 185	— 211	34. Großwand	+ 98	
17. Vetrnik	— 104	— 103	35. Bösenstein	+ 175	
18. Kubany	— 193				

Der Vergleich mit den Ergebnissen P r e y s darf bei der großen Verschiedenheit der Methoden als recht befriedigend bezeichnet werden. Große Differenzen treten nur bei den Punkten Voralpe und Liezen auf. P r e y hat bei diesen Punkten jeweils das Mittel aus zwei Bestimmungen gebildet, die um 321 *cm* bei Voralpe und um 300 *cm* bei Liezen differieren. Die von ihm hier verwendeten Seiten sind bereits viel zu lang!

6. Die absoluten Geoidhöhen der 35 Punkte

Bekanntlich sind die aus dem astronomischen Nivellement gewonnenen Höhen in dreierlei Hinsicht relativ. Sie hängen nämlich von der verwendeten Referenzfläche, von dem gewählten Ausgangspunkt des Lotabweichungssystems und von dem willkürlichen Höhennullpunkt ab. Letztere Unbestimmtheit läßt sich bei Detailuntersuchungen nur eliminieren, wenn für einen Punkt die wahre Geoidhöhe auf gravimetrischem Wege nach der S t o k e s schen Formel ermittelt wurde. Von dieser Einschränkung abgesehen, erhält man absolute Geoidhöhen, wenn man als Referenzfläche das mittlere Erdellipsoid verwendet und auf eine wahrhaft absolute Lagebestimmung und Orientierung des den Lotabweichungen zugrundeliegenden geodätischen Netzes achtet. Beide Forderungen sind gleichzeitig auf Grund einer neuen Methode erfüllbar, die auf einer Kombination der „Partialsysteme“ der Lotabweichungen und der Geoidbestimmung nach der S t o k e s schen Formel beruht¹²⁾.

¹²⁾ K. L e d e r s t e g e r: Die Achse des Normalsphäroides der Erde, Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrg. 1950, Seite 113—129.

Eine Ausdehnung dieser Methode über Europa und Nordamerika erwies unabhängig von jeglicher isostatischen Reduktion, daß derzeit das H a y f o r d s c h e Ellipsoid als beste Approximation des mit dem Normalsphäroid nahe zusammenfallenden mittleren Erdellipsoides gelten darf. Das den Berechnungen in Europa zugrundeliegende Lotabweichungssystem bezieht sich auf das verkleinerte B e s s e l s c h e Ellipsoid und den im Anschluß an die preußische Landesaufnahme gebildeten Netzverband. Wir haben daher zunächst die österr.-ungar. Militärtriangulierung auf das System der preußischen Landesaufnahme zu transformieren. Diese Transformation¹³⁾ ergibt im Punkte Viehberg, den wir als Fundamentalpunkt beibehalten wollen, die Elemente:

$$\begin{aligned}d\varphi &= + 1,184'' \\d\lambda &= - 17^{\circ} 39' 57,001'' \\d\alpha &= - 5,61''\end{aligned}\tag{25}$$

Die Maßstabänderung ist so klein, daß sie vernachlässigt werden darf. In der Längenkorrektur ist selbstverständlich die Längendifferenz der beiden Nullmeridiane Ferro und Greenwich enthalten, die nach A l b r e c h t $17^{\circ} 39' 46,02''$ beträgt.

Den Übergang auf das H a y f o r d s c h e Ellipsoid verbinden wir mit der Verschiebung und Verdrehung des europäischen Netzverbandes in die absolute Lage, wie sie sich bei der Ausgleichung¹⁴⁾ für den Bezugspunkt $\varphi_0 = 50^{\circ}$ und $\lambda_0 = 15^{\circ}$ östl. Gr. ergeben hat:

$$\begin{aligned}d\varphi_0 &= - 4,295'' \\d\lambda_0 &= - 4,886'' \\d\alpha_0 &= - 1,28'' \\ \frac{d a}{a} &= + 1 5537 \cdot 10^{-8} \\d\alpha &= + 2423 \cdot 10^{-8}.\end{aligned}\tag{26}$$

Diese Elemente müssen zuerst auf den Punkt Viehberg $\varphi = 48^{\circ} 33' 40,7''$, $\lambda = 14^{\circ} 37' 30,3''$ übertragen werden:

$$\begin{aligned}d\varphi &= - 3,530'' \\d\lambda &= - 4,583'' \\d\alpha &= - 1,03''\end{aligned}\tag{27}$$

Zusammen mit (25) ergeben sich die definitiven Transformationselemente für die österreichische Landesvermessung:

$$\begin{aligned}d\varphi &= - 2,346'' \\d\lambda &= - 17^{\circ} 40' 01,584'' \\d\alpha &= - 6,64'' \\ \frac{d a}{a} &= + 1 5537 \cdot 10^{-8} \\d\alpha &= + 2423 \cdot 10^{-8}.\end{aligned}\tag{28}$$

¹³⁾ K. L e d e r s t e g e r: Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid, Sonderheft 3 der Österr. Zeitschrift für Verm., Wien 1948, Seite 66 und 67.

¹⁴⁾ K. L e d e r s t e g e r: Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen, Sonderheft der Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, in Vorbereitung.

Mit ihnen erhält man die genäherten Korrekturen der ursprünglichen Lotabweichungskomponenten auf das absolute System:

$$d \xi_{\kappa} = +2.346'' - 4.407'' \sin l + 15537 b'' \cdot 10^{-8} - (2 \cos^2 \varphi_{\text{M}} - \sin^2 \varphi_{\text{M}}) b'' \cdot 2423 \cdot 10^{-8}$$

$$d \eta_{\kappa} = (4.394'' + 2.346'' \sin l) \operatorname{cosec} \varphi_{\kappa} + 11184 l'' \cdot 10^{-8},$$

die in die Gleichungen (23) einzuführen sind. Die resultierenden absoluten Lotabweichungskomponenten ξ_a und η_a sind in den beiden letzten Kolonnen der Tabelle 1 ausgewiesen, während die zugehörigen Höhenunterschiede Δha in der zweiten Kolonne der Tabelle 2 aufscheinen.

Selbstverständlich braucht die Ausgleichung nicht wiederholt zu werden. Man erhält vielmehr die neuen Höhen, wenn man zu den aus der früheren Ausgleichung hervorgegangenen Höhenunterschieden die Differenzen ($\Delta ha - \Delta h$) addiert. Die folgende Tabelle enthält die abermals auf den Punkt Viehberg bezogenen Höhen über dem H a y f o r d s c h e n Ellipsoid, die man näherungsweise in absolute Geoidhöhen verwandeln kann, wenn man aus der T a n n i s c h e n Tabelle ¹⁵⁾ der Undulationen des aktuellen Geoides die Höhe für Viehberg mit 34.9 m abschätzt:

	<i>cm</i>	<i>m</i>		<i>cm</i>	<i>m</i>
1. Jauernick	- 510 ;	+ 29.80;	19. Kohout	- 27;	+ 34.63
2. Lausche	- 439	+ 30.51	20. Viehberg	0	+ 34.90
3. Schneeberg	- 411	+ 30.79	21. Hochsachsen	- 233	+ 32.57
4. Jeschken	- 389	+ 31.01	22. Kleinmünchen	- 39	+ 34.51
5. Bernstein	- 305	+ 31.85	23. Hofbrunn	- 209	+ 32.81
6. Donnersberg	- 365	+ 31.25	24. Steiglberg	- 246	+ 32.44
7. Bösig	- 354	+ 31.36	25. Kremsmünster	- 76	+ 34.14
8. Zban	- 276	+ 32.14	26. Spindeleben	+ 118	+ 36.08
9. Sadska	- 266	+ 32.24	27. Hochbuchberg	+ 14	+ 35.04
10. Dabltitz	- 254	+ 32.36	28. Traunstein	- 42	+ 34.48
11. Pecny	- 210	+ 32.80	29. Schafberg	- 72	+ 34.18
12. Studeny vrch	- 162	+ 33.28	30. Voralpe	+ 210	+ 37.00
13. Mezy vrati	- 127	+ 33.63	31. Gr. Priel	+ 103	+ 35.93
14. Roßberg	- 124	+ 33.66	32. Gr. Pyrgaß	+ 169	+ 36.59
15. Svidnik	- 86	+ 34.04	33. Liezen	+ 167	+ 36.57
16. Kamejk	- 131	+ 33.59	34. Großwand	+ 165	+ 36.55
17. Vetrnik	- 86	+ 34.04	35. Bösenstein	+ 142	+ 36.32
18. Kubany	- 94	+ 33.96			

Ein Vergleich mit der früheren Höhentabelle zeigt, daß die Unterschiede nicht sehr groß sind. Es ist dies natürlich eine Folge des zufälligen Umstandes, daß die absoluten Lotabweichungen in Viehberg verhältnismäßig klein sind. Immerhin überschreiten die Differenzen stellenweise die Metergrenze. Abschließend kann festgestellt werden, daß der Geoidanstieg vom Nordrand Böhmens bis zum Alpenkamm im Gebiet des Meridianbogens Großenhain—Pola rund 7 m beträgt.

¹⁵⁾ L. T a n n i: On the Continental Undulations of the Geoid as Determined from the Present Gravity Material, Veröffentl. des Isostatischen Institutes Nr. 18, Helsinki 1948.

L. T a n n i: The Regional Rise of the Geoid in Central Europe, Veröffentl. des Isostatischen Institutes Nr. 22, Helsinki 1949.