



Die flächentreue Meridianstreifenabbildung des Rotationsellipsoids in die Ebene im Vergleiche mit der flächentreuen querachsigen Zylinderabwicklung

Friedrich Hauer ¹

¹ *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **39** (1), S. 10–17

1951

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Hauer_VGI_195103,  
Title = {Die flächentreue Meridianstreifenabbildung des  
Rotationsellipsoids in die Ebene im Vergleiche mit der flächentreuen  
querachsigen Zylinderabwicklung},  
Author = {Hauer, Friedrich},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {10--17},  
Number = {1},  
Year = {1951},  
Volume = {39}  
}
```



Man erkennt daraus, daß die Genauigkeit der Funkortung bereits wesentlich über jener liegt, die im Hinblick auf die „photographische“ Genauigkeit der Lotstrahlen erforderlich wäre. Danach kann die Lotrichtung \mathbf{I}^F des jeweiligen Flugzeugstandortes \mathbf{F} in jedem beliebigen Erdstandpunkt \mathbf{E} zumindestens mit „photographischer“ Genauigkeit eingestellt werden. Hingegen ist die mittels Funkpeilung bestimmte Richtung von \mathbf{E} nach \mathbf{F} nach Obigem bloß auf etwa $1'$ bis $2'$ genau gegeben.

Wir denken uns nun die zu einem Standpunkt \mathbf{F} gehörige Lotrichtung \mathbf{I}^F in das Zielstrahlbündel einer Aufnahme einbezogen, die von einem anderen Standpunkt \mathbf{E} aus hergestellt wird (s. Abb. 3). Zu diesem Zweck kann der Nadirpunkt \mathbf{L}^E , d. i. der Fluchtpunkt von \mathbf{I}^F auf der zu \mathbf{E} gehörigen Bildebene \mathbf{II}^E , beispielsweise durch Markenpaare angegeben werden. Ferner soll die Richtung der Erdachse \mathbf{a} etwa durch den auf \mathbf{II}^E gelegenen Bildpunkt \mathbf{A}^E des einen Himmelspoles festgelegt sein (Abb. 3). Legt man durch den Standpunkt \mathbf{F} die zur Erdachse und

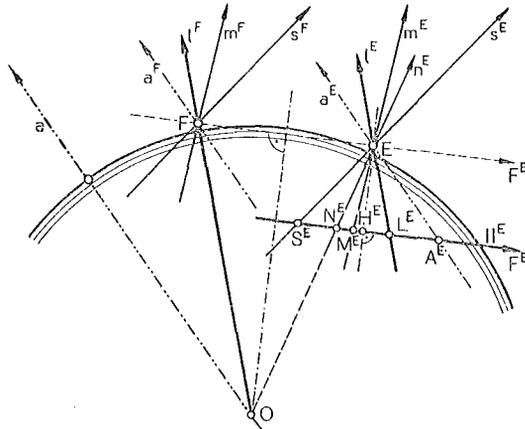


Abb. 3

zur Lotrichtung \mathbf{I}^F parallele Ebene, so enthält diese bereits den durch \mathbf{F} gehenden Meridian und bestimmt daher die in \mathbf{F} vorhandene Nord-Südrichtung. Die Erdachsenrichtung kann nach bekannten Methoden der Geodäsie ebenfalls überall mit weitans höherer als „photographischer“ Genauigkeit eingestellt werden.

Nach diesen Vorbereitungen kann das in Rede stehende Prinzip wie folgt leicht klargemacht werden. (Schluß folgt.)

Die flächentreue Meridianstreifenabbildung des Rotationsellipsoids in die Ebene im Vergleiche mit der flächentreuen querachsigen Zylinderabwicklung

Von F. H a u e r, Wien

I

Aus jeder Abbildungsart der Kugeloberfläche in die Ebene lassen sich unendlich viele andere ableiten, wenn an Stelle der Erdpole in der Abbildung zwei diametrale, aber sonst beliebig ausgewählte Punkte der Kugeloberfläche als Haupt-

punkte benützt werden und wenn die Meridiane durch die Vertikalschnitte in diesen Punkten, die Parallelkreise dagegen durch jene Kleinkreise ersetzt werden, deren Ebenen auf dem Durchmesser der beiden Hauptpunkte senkrecht stehen. Die ursprünglich gegebene Abbildung kann man als eine polachsige Projektion bezeichnen; die abgeleiteten Abbildungen heißen querachsig, wenn die Verbindungslinie der beiden Hauptpunkte in der Ebene des Kugeläquators liegt und sie werden schiefachsig genannt, wenn die Hauptpunkte eine beliebige Lage zwischen den Polen und dem Äquator einnehmen.

Um daher aus einer polachsigen zylindrischen Abbildung die entsprechende querachsige Projektion herzuleiten, hat man an Stelle des Äquators einen bestimmten Meridian, den Null- oder Mittelmeridian — bei Zylinderabwicklungen den berührten Meridian — zu setzen. Die Zylinderachse steht dann senkrecht zur Rotationsachse der Erde in deren Mittelpunkt und durchstößt die Kugel in den beiden Hauptpunkten, die in den Äquator fallen. An Stelle der Meridiane treten Großkreise, die durch die beiden Hauptpunkte hindurchgehen und somit am Nullmeridian senkrecht stehen; die Parallelkreise werden durch jene Kleinkreise ersetzt, deren Ebenen parallel zur Ebene des Nullmeridians sind. Die geographische Breite φ eines beliebigen Punktes der ursprünglichen Abbildung entspricht dem sphärischen Abstand η dieses Punktes vom Nullmeridian, sein Längenunterschied gegen den Nullmeridian $\lambda - \lambda_0$ dem Winkel ϑ zwischen dem Äquator und dem durch die beiden Hauptpunkte gehenden Großkreis des abzubildenden Punktes.

Die Beziehungen zwischen den alten und den neuen Koordinaten ergeben sich dann einfach aus Abb. 1. Es ist dies eine orthographische Projektion eines

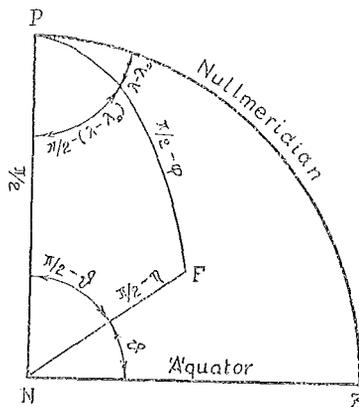


Abb. 1

Kugeloktanten durch die Richtung des Durchmessers der beiden Hauptpunkte NN . P ist das Bild des Nordpols der Erdkugel, F dasjenige eines beliebigen Kugel- punktes. Da der Bogen PN für die Einheitskugel gleich $\pi/2$ ist, so ergibt sich aus dem sphärischen Dreiecke PFN

$$\left. \begin{aligned} \sin \eta &= \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0), \\ \tan \vartheta &= \tan \varphi \sec (\lambda - \lambda_0). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Damit sind die Transformationsgleichungen für alle querachsigen Zylinderprojektionen gefunden.

2

Mit Rücksicht auf die voranstehenden Überlegungen ergeben sich nun aus der flächentreuen Zylinderabbildung von Lambert

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda - \lambda_0, \\ y &= \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

— wenn noch beachtet wird, daß der x -Achse im Falle der polachsigen Abbildung die y -Achse bei der querachsigen Abbildung entspricht und umgekehrt — die Abbildungsgleichungen für die flächentreue querachsige Zylinderabwicklung zunächst in Funktion von ϑ und η mit

$$\begin{aligned} x &= \sin \eta, \\ y &= \vartheta \end{aligned}$$

und daraus im Hinblick auf die Formeln (1) mit

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0), \\ \tan y &= \tan \varphi \sec (\lambda - \lambda_0). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hiebei ist vorausgesetzt, daß sich die x -Achse des ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems positiv nach West, dessen y -Achse positiv nach Nord erstreckt, wobei der Ursprung dieses Systems das Bild des Schnittpunktes des berührten Meridians mit dem Äquator sein soll, und daß die geographische Länge λ jedes abzubildenden Punktes vom Mittelmeridian der Länge λ_0 positiv nach West, die geographische Breite φ vom Äquator positiv nach Nord gezählt werde.

3

Die Gleichungen für die flächentreue Abbildung eines Meridianstreifens vom Rotationsellipsoid in die Ebene werden bei gleicher Zählweise für die ebenen und sphärischen Koordinaten und unter Beibehaltung der anderen üblichen Bezeichnungen¹⁾ durch

$$\left. \begin{aligned} x &= (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 N \cos \varphi, \\ y &= \rho_m (\varphi_1 - \varphi_0) \\ \text{mit} \quad \varphi_0 &= \varphi + \frac{1}{2} \frac{N}{\rho} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

gegeben²⁾; sie gelten bis Glieder dritter Ordnung einschließlich.

1) Zeitschr. f. Vermessungsw., 70. Jg., S. 194—215, 1941: F. Hauer, Flächentreue Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene durch Systeme geringster Streckenverzerrung.

2) Österr. Zeitschr. f. Vermessungsw., 1949, Sonderheft 6: F. Hauer, Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene.

Die Anwendung der Formelgruppe (4) auf die Kugel vom Radius eins führt zu $\rho_m = \rho = N = 1$, die Verlegung des Zentralpunktes der Abbildung in den Äquator ergibt $\varphi_0 = 0$, so daß schließlich folgt

$$\left. \begin{aligned} x &= (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 \cos \varphi, \\ y &= \varphi_1 \\ \varphi_1 &= \varphi + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

mit

4

Es soll nun gezeigt werden, daß sich die Formeln der Gruppe (3) in diejenigen der Gruppe (5) überführen lassen, wenn Glieder vierter Ordnung vernachlässigt werden.

Aus der Gleichung für x in Gruppe (3) folgt durch Entwicklung des Sinus des Längsunterschiedes in eine Potenzreihe bis Glieder dritter Ordnung einschließlich sofort das Ergebnis

$$x = (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 \cos \varphi;$$

es stimmt mit der ersten Gleichung (5) voll überein.

Die Zuordnung der Fußpunktbreite φ_1 zu den geographischen Koordinaten φ, λ jedes abzubildenden Punktes ergibt sich aus dem sphärischen Dreieck $P F F_1$ (Abb. 2), in dem P den Nordpol der Kugel, F den abzubildenden Punkt und F_1

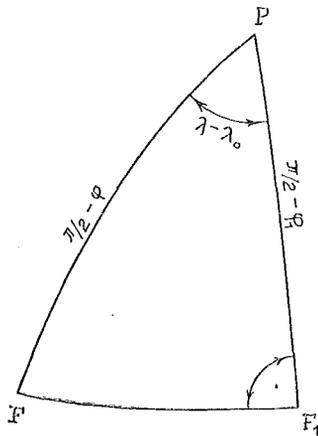


Abb. 2

den Schnittpunkt der vom Punkt F auf den berührten Meridian $P F_1$ senkrecht errichteten geodätischen Linie — im Falle der Kugel ein Großkreis — mit diesem bedeutet. Es ist demnach

$$\tan \varphi_1 = \tan \varphi \sec (\lambda - \lambda_0).$$

Dieser Ausdruck liefert im Vergleiche mit der zweiten Formel (3)

$$y = \varphi_1,$$

ein Ergebnis, das mit der zweiten Gleichung (5) voll übereinstimmt.

Zusammenfassend läßt sich somit sagen, daß die bis Glieder dritter Ordnung einschließlich entwickelte flächentreue querachsige Zylinderabwicklung mit der auf die Kugel angewendeten Meridianstreifenabbildung des Rotationsellipsoids ident ist oder anders ausgedrückt, daß sich die Abbildungsgleichungen der flächentreuen querachsigen Zylinderabwicklung von denjenigen der auf die Kugel angewendeten flächentreuen Meridianstreifenabbildung nur um Glieder vierter Ordnung unterscheiden.

5

Um nun einen Überblick über die Gestalt des Meridianstreifenbildes zu bekommen, möge folgende Überlegung angestellt werden. Die Kugel werde von ihrem Mittelpunkte aus perspektivisch auf einen querachsigen liegenden Zylinder abgebildet, der diese längs des Nullmeridians berührt. Bei der Abbildung geht der Äquator in zwei gegenüberliegende Erzeugende des Zylinders über, ebenso derjenige Meridian, der um 90° vom Nullmeridian absteht. Die Bilder des letzteren liegen mittig zwischen den Geraden, die durch die Abbildung des Äquators hervorgegangen sind. Der Nullmeridian bleibt, da er gleichzeitig berührter Meridian ist, bei der Abbildung unverändert. Alle übrigen Meridiane liefern — als projizierende Ebenen — bei der Abbildung auf den Zylinder Ellipsen. Bei der Abbildung der Parallelkreise werden Kreiskegel mit dem Zylinder zum Schnitt gebracht. Die Achsen der Kegel und des Zylinders schneiden einander alle im Mittelpunkt der Kugel und stehen aufeinander senkrecht. Die Bilder der Parallelkreise sind Kurven vierter Ordnung. Sie sind sowohl in bezug auf das Bild des Nullmeridians als auch auf das Bild desjenigen Meridians, der um 90° vom Nullmeridian absteht, symmetrisch und liegen zueinander zentrisch.

Betrachtet man nun von dieser perspektivischen Abbildung einen Bereich, der sich über alle Breitengrade von $+90^\circ$ bis -90° erstreckt, aber nur auf Längen von etwa 5° zu beiden Seiten des Nullmeridians ausdehnt und denkt man sich den Zylinder längs einer seiner Erzeugenden, die das Bild einer Äquatorhälfte ist, aufgeschnitten und in die Ebene ausgebreitet, so erhält man damit ein Bild, das mit dem Netz der flächentreuen Meridianstreifenabbildung vollkommen übereinstimmt, wenn Glieder dritter Ordnung vernachlässigt werden. Der Beweis hiefür ist leicht zu erbringen.

Als Ausgang dient die polachsige perspektivische Zylinderabwicklung. Aus ihren Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda - \lambda_0, \\ \gamma &= \tan \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

folgen sofort die Abbildungsgleichungen für die perspektivische querachsige Zylinderabwicklung, zunächst in Funktion von ϑ und η , mit

$$\begin{aligned} x &= \tan \eta, \\ \gamma &= \vartheta \end{aligned}$$

und daraus mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) mit

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0)}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 (\lambda - \lambda_0)}}, \\ \tan \gamma &= \tan \varphi \sec (\lambda - \lambda_0). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die zweite Gleichung (7) stimmt mit der zweiten Gleichung (3) voll überein. Die erste Gleichung (7) läßt sich in eine Potenzreihe entwickeln; hierbei sollen unter der Voraussetzung, daß der Längenunterschied $\lambda - \lambda_0$ klein von erster Ordnung ist, Glieder dritter Ordnung vernachlässigt werden. Es ergibt sich sofort

$$x = (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi;$$

Die Entwicklung der ersten Gleichung (3) mit Vernachlässigung von Gliedern dritter Ordnung führt zu dem gleichen Ergebnis.

Es stimmen also die Abbildungsgleichungen der querachsigen perspektivischen Zylinderabwicklung mit denen der querachsigen flächentreuen Zylinderabwicklung in der Umgebung des berührten Meridians bei Vernachlässigung von Gliedern dritter Ordnung voll überein; da aber die querachsige flächentreue Zylinderabwicklung bei Vernachlässigung von Gliedern vierter Ordnung mit der auf die Kugel angewendeten flächentreuen Meridianstreifenabbildung ident ist, so stimmt auch mit Vernachlässigung von Gliedern dritter Ordnung das Bild der querachsigen perspektivischen Zylinderabwicklung mit jenem der flächentreuen Meridianstreifenabbildung zusammen, womit der geforderte Beweis erbracht ist.

6

Die bei der perspektivischen Abbildung der Kugel auf den Zylinder entstehenden Kurven zweiter und vierter Ordnung gehen bei der Ausbreitung des Zylinders in die Ebene in transzendente Kurven über, wie sich ohne Schwierigkeit zeigen läßt. Erhebt man nämlich die beiden Abbildungsgleichungen (7) zum Quadrat, so wird

$$x^2 = \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 (\lambda - \lambda_0)}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 (\lambda - \lambda_0)}, \quad \tan^2 \gamma = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{1}{\cos^2 (\lambda - \lambda_0)}$$

und daraus, wenn die Nenner weggeschafft werden,

$$\left. \begin{aligned} x^2 - x^2 \cos^2 \varphi \sin^2 (\lambda - \lambda_0) &= \cos^2 \varphi \sin^2 (\lambda - \lambda_0), \\ \tan^2 \gamma \cos^2 \varphi \cos^2 (\lambda - \lambda_0) &= \sin^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Aus der ersten Gleichung kann $\cos^2 \varphi$, aus der zweiten mit Beachtung dieses Ergebnisses $\sin^2 \varphi$ ausgerechnet werden. Bildet man nun die Summe $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, so liegt in der Gleichung

$$x^2 + x^2 \tan^2 \gamma \cos^2 (\lambda - \lambda_0) = x^2 \sin^2 (\lambda - \lambda_0) + \sin^2 (\lambda - \lambda_0)$$

für $\lambda - \lambda_0 = \text{const}$ bereits die Schar der Meridianbilder vor. Man erhält hieraus die einfache Formel

$$x = c_1 \cos \gamma \quad \text{mit} \quad c_1 = \tan (\lambda - \lambda_0). \quad (9)$$

Die Bilder der Parallelkreise folgen auf ähnliche Weise. Aus den Gleichungen (8) ergibt sich $\sin^2 (\lambda - \lambda_0)$ und $\cos^2 (\lambda - \lambda_0)$ und weiter aus der Summe $\sin^2 (\lambda - \lambda_0) + \cos^2 (\lambda - \lambda_0) = 1$ die Gleichung

$$x^2 + x^2 \sin^2 \varphi \cot^2 \gamma + \sin^2 \varphi \cot^2 \gamma = x^2 \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi;$$

sie stellt für $\varphi = \text{const}$ die Schar der Parallelkreisbilder vor. Elementare Transformationen führen schließlich zur Kurvenschar

$$\frac{x^2}{(1 - c_2^2)/c_2^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{1 - c_2^2} = 1 \quad \text{mit } c_2 = \sin \varphi. \quad (10)$$

Abb. 3 zeigt das Netz einer perspektivischen querachsigen Zylinderabwicklung. Es vermittelt nach den im Abschnitt 5 ausgeführten Überlegungen eine Vorstellung vom Bilde der flächentreuen Meridianstreifenabbildung. Dasselbe besteht demnach in einem ebenen Bogenzweieck, das symmetrisch zur γ -Achse — dem Bilde des Mittelmeridians — und symmetrisch zur x -Achse — dem Bilde des Äquators — ist. Die Meridianbilder zeigen ihre konkave Seite zum Bilde des Mittelmeridians und schneiden sich in den Bildpunkten des Nord- und Südpols. Die Parallelkreisbilder, die zentrisch um die Polbilder angeordnet liegen, sind von ellipsenähnlicher Gestalt und nicht nur symmetrisch zum Bilde des Mittelmeridians, sondern auch zum Bilde desjenigen Meridians, der um 90° vom Nullmeridian absteht und das aus zwei Geraden gebildet wird, die mittig zwischen den beiden Geraden liegen, in die der Äquator bei der Abbildung übergegangen ist. Die Bilder der Meridiane und Parallelkreise schneiden sich rechtwinkelig von der Ordnung der Flächentreue.

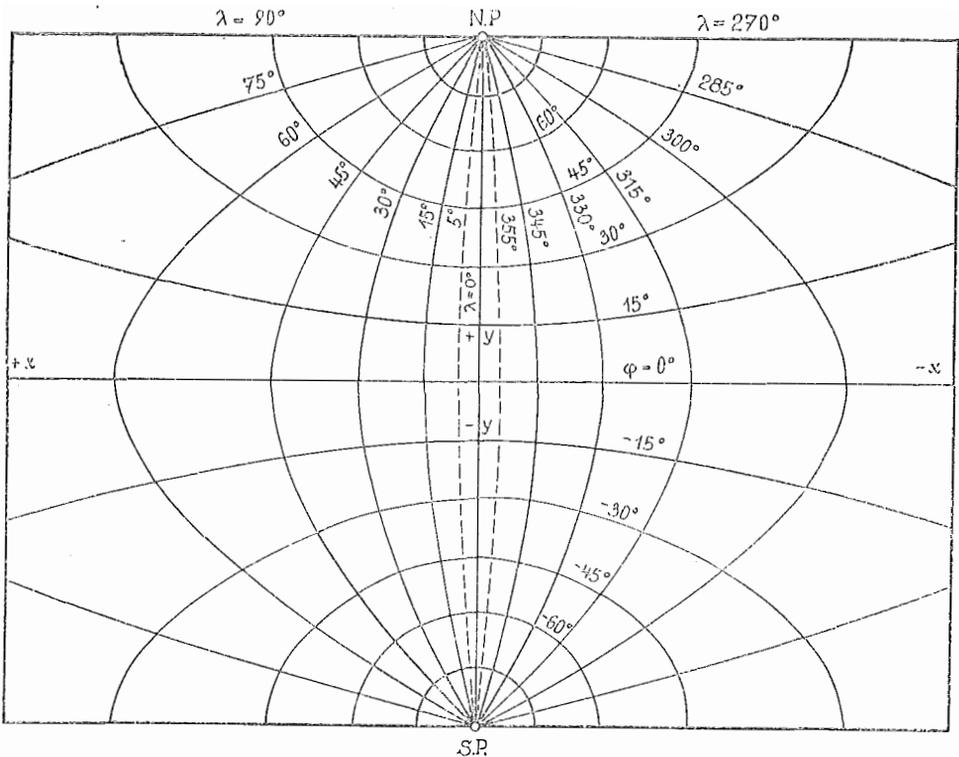


Abb. 3

Für die Praxis wird die Abbildung stets nur auf Bereiche anzuwenden sein, deren Erstreckung in der geographischen Länge die Größe von 5^0 zu beiden Seiten des berührten Meridians nicht erreicht — in Bild 3 ist dieser Bereich strichliert eingezeichnet —, womit hierfür äußerst günstige Verhältnisse vorliegen. Da die Abbildung längs des berührten Meridians streckentreu und damit sowohl flächen- als auch winkeltreu ist, so bleiben — außer der Flächentreue, die innerhalb der angegebenen Grenzen stets erhalten wird — auch zu beiden Seiten des Mittelmeridians die Strecken- und Winkelverzerrungen auf kleine Beträge begrenzt.

Die Liesganig'sche Gradmessung

Von Dipl.-Ing. Dr. techn. Paula E m b a c h e r

HISTORISCHER ÜBERBLICK

Seit dem Altertum läßt die Frage nach der Gestalt und Größe der Erde die Menschheit nicht zur Ruhe kommen. Die verschiedensten Wege wurden eingeschlagen, um die Kugelgestalt der Erde nachzuweisen. Einen entscheidenden Schritt machte der Holländer Willebrord S n e l l i u s im Jahre 1610, als er, auf einer Basismessung aufbauend, erstmalig ein Dreiecksnetz entwickelte und auf diese Art zum erstenmal größere Entfernungen unabhängig von der Gestalt des Bodens genau bestimmte. Dadurch war die Möglichkeit gegeben, die Länge eines oder mehrerer Meridianbögen zu messen, um daraus die Größe des Erdradius oder, falls die Gestalt der Erde ellipsoidförmig ist, die Ellipsoidparameter zu bestimmen.

Im Jahre 1669 begann der französische Astronom P i c c a r d die Messung eines Meridianbogens zwischen Amiens und Malvoisine (36 km südlich Paris); eine Verlängerung dieses Meridianbogens führten um die Jahrhundertwende andere französische Wissenschaftler (darunter die beiden C a s s i n i) durch. Der gesamte Bogen hatte eine Länge von $8\frac{1}{3}^0$ und die Auswertung der Messungen ergab für die Erde ein Rotationsellipsoid, dessen größerer Halbmesser in der Rotationsachse lag. Dies stand nun in krassm Widerspruch zu den Ergebnissen des Engländers N e w t o n und des Niederländers H u y g e n s, die aus physikalischen Erwägungen auf ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid schlossen. Um die daraus entstandene Streitfrage zu lösen, wurden auf Veranlassung der französischen Akademie der Wissenschaften in den Jahren 1735—1741 Breitengradmessungen in Lappland und in Peru vorgenommen. Das Ergebnis der Doppelexpedition war ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit einer Abplattung von $1/215$.

In Italien war es der Jesuitenpater B o s c o v i c h, der einen Bogen zwischen Rom und Rimini maß und auch als erster den Versuch unternahm, die besten Werte für die Ellipsoidparameter aus mehreren Gradmessungen abzuleiten, indem er die Summe der Verbesserungen Null setzte. Von den weiteren französischen Arbeiten ist die Gradmessung von D e l a m b r e in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts bis heute von Bedeutung, da man von ihr das Metermaß ableitete. Auch die anderen europäischen Kulturstaaten befaßten sich nun mit Breitengradmessungen. Teils