

Paper-ID: VGI_194917



Die konforme Kegelprojektion mit zwei längentreu abgebildeten Parallelkreisen

Karl Hubeny ¹

¹ *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **37** (4–6), S. 126–140

1949

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_194917,  
  Title = {Die konforme Kegelprojektion mit zwei l{"a}ngentreu abgebildeten  
    Parallelkreisen},  
  Author = {Hubeny, Karl},  
  Journal = {"Österreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {126--140},  
  Number = {4--6},  
  Year = {1949},  
  Volume = {37}  
}
```



Die konforme Kegelprojektion mit zwei längentreu abgebildeten Parallelkreisen

Von Dr. K. H u b e n y, Graz

Einleitung

Die Lambertsche konforme Kegelprojektion (Lambert, Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung von Land- und Himmelskarten, 1772) ist unter der Voraussetzung nur eines längentreu abgebildeten Parallelkreises (Berührungsparallel) in [1] und [2] erschöpfend behandelt. Allgemeine Entwicklungen für die konforme Kegelprojektion mit zwei längentreu abgebildeten Parallelkreisen finden sich in [3], wobei geschlossene Formeln für die rechtwinkligen ebenen Koordinaten mitgeteilt werden. In einer Fußnote ist dabei auf Reihenentwicklungen nach Potenzen des Meridianbogens, enthalten in einer Arbeit A. E. Youngs [4], hingewiesen. In der vorliegenden Arbeit sollen nun — nach einer kurzen Darstellung der allgemeinen Reihenentwicklungen für konforme Abbildungen — derartige Potenzreihen zwischen den ebenen und den geographischen Koordinaten und umgekehrt für die konforme Kegelprojektion mit zwei längentreu abgebildeten Parallelkreisen entwickelt werden; weiters werden Potenzreihen für die Meridiankonvergenz und das Maßstabsverhältnis angegeben.

Allgemeine Reihenentwicklungen für konforme Abbildungen

Wir nehmen am Ellipsoid und in der Bildebene die isothermen Systeme q , l und x , y an. Eine konforme Abbildung der ersten Fläche in die zweite entsteht, wenn diese durch

$$x + iy = f(q + il) \quad (1)$$

einander zugeordnet werden. Wir betrachten nun ein schmales Gebiet zu beiden Seiten einer Linie $l = 0$; für dieses gilt die Entwicklung

$$x + iy = f(q) + if'(q)l - \frac{1}{2!}f''(q)l^2 - i\frac{1}{3!}f'''(q)l^3 + \frac{1}{4!}f^{IV}(q)l^4 + \quad (2)$$

Durch Trennung des reellen und des imaginären Teiles von (2) ergeben sich die Abbildungsgleichungen in Form von Potenzreihen nach Potenzen von l ; es ist

$$\begin{aligned} x &= f(q) - \frac{1}{2!}f''(q)l^2 + \frac{1}{4!}f^{IV}(q)l^4 - \dots \\ y &= f'(q)l - \frac{1}{3!}f'''(q)l^3 + \frac{1}{5!}f^{V}(q)l^5 - \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Die Gleichungen (3) gehen entsprechend ihrer Entwicklung aus (1) hervor; sie erfüllen demnach die Riemann-Cauchyschen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dq} = \frac{dy}{dl}; \quad \frac{dy}{dq} = -\frac{dx}{dl} \quad (4)$$

und vermitteln eine konforme Abbildung, deren Art von der Wahl der Funktion $f(q)$ abhängig ist. Zählt man q in der üblichen Weise in der Meridianrichtung (isometrische Breite), l als Längenunterschied zu einem Hauptmeridian und nimmt man die Linien $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ des isothermen ebenen Systems als Gerade an, so ist die durch (3) vermittelte Abbildung symmetrisch zum Bild des Meridians $l = 0$; für $l \rightarrow 0$ wird

$$x = f(q) \quad (5)$$

d. h. das Abbildungsgesetz des Hauptmeridians bestimmt die Art der Abbildung.

Wir betrachten nun innerhalb des erwähnten schmalen Streifens beiderseits des Hauptmeridians ein Gebiet in der Umgebung eines Punktes q_0, l_0 , dessen Bildpunkt durch x_0, y_0 gegeben sei. Zählen wir die ebenen Koordinaten x, y diesmal

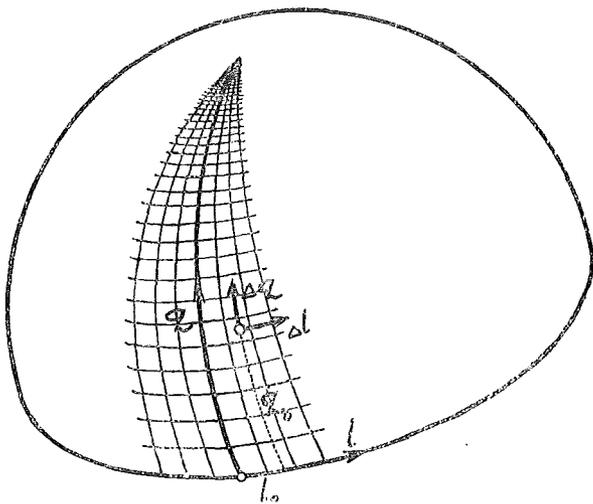


Abb. 1

als Koordinatenunterschiede zu diesem Bildpunkt, so gilt zwischen diesen und den Unterschieden $\Delta q, \Delta l$ zu q_0, l_0 die Entwicklung von (2)

$$\begin{aligned}
 x + iy &= \left[f'(q_0) + if''(q_0)l_0 - \frac{1}{2!}f'''(q_0)l_0^2 - i\frac{1}{3!}f^{IV}(q_0)l_0^3 + \dots \right] (\Delta q + i\Delta l) \\
 &+ \frac{1}{2!} \left[f''(q_0) + if'''(q_0)l_0 - \frac{1}{2!}f^{IV}(q_0)l_0^2 + \dots \right] (\Delta q + i\Delta l)^2 \\
 &+ \frac{1}{3!} \left[f'''(q_0) + if^{IV}(q_0)l_0 - \frac{1}{2!}f^{IV}(q_0)l_0^2 + \dots \right] (\Delta q + i\Delta l)^3 \\
 &+ \dots \quad (6)
 \end{aligned}$$

Allgemein angeschrieben lautet (6)

$$x + i y = a_1 (\Delta q + i \Delta l) + a_2 (\Delta q + i \Delta l)^2 + a_3 (\Delta q + i \Delta l)^3 + \dots \quad (7)$$

wobei die Koeffizienten a_i nach (6) komplexe Größen sind. Wählt man den Nullpunkt der Entwicklung so, daß $l_0 = 0$ und damit $\Delta l = l$ ist, d. h. führt man die Entwicklung (6) in einem Punkt des Hauptmeridians durch, so werden die Koeffizienten in (7) reelle Größen, deren Bedeutung sich durch einen Koeffizientenvergleich mit (6) ergibt. Es ist

$$a_1 = f'(q_0), \quad a_2 = \frac{1}{2!} f''(q_0), \quad a_3 = \frac{1}{3!} f'''(q_0), \quad \dots$$

Damit erhält (7) die Form

$$x + i y = a_1 (\Delta q + i l) + a_2 (\Delta q + i l)^2 + a_3 (\Delta q + i l)^3 + \dots \quad (8)$$

Aus der Trennung nach dem reellen und imaginären Teil folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= a_1 \Delta q + a_2 (\Delta q^2 - l^2) + a_3 (\Delta q^3 - 3 \Delta q l^2) + \dots \\ y &= a_1 l + 2 a_2 \Delta q l + a_3 (\Delta q^2 l - l^3) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Aus diesen geht wieder hervor, daß die Abbildung symmetrisch zum Nullmeridian sein muß; daraus und aus der Folgerung über die Art der Koeffizienten in (8) folgt der Satz, daß die Koeffizienten der Entwicklung (7) dann reelle Größen sind, wenn die Abbildung symmetrisch zum Bild des durch den Nullpunkt gehenden Meridians ist.

Um zur Rückabbildung der Bildebene auf das Ellipsoid zu gelangen, setzen wir zunächst allgemein an

$$\Delta q + i \Delta l = b_1 (x + i y) + b_2 (x + i y)^2 + b_3 (x + i y)^3 + \dots \quad (10)$$

Die Koeffizienten b_i ergeben sich aus (7) durch die Umkehrung dieser Reihe; es ist

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \quad b_3 = -\frac{a_3}{a_1^4} + \frac{2 a_2^2}{a_1^5} \quad (11)$$

$$b_4 = -\frac{a_4}{a_1^5} + 5 \frac{a_2 a_3}{a_1^6} - 5 \frac{a_2^3}{a_1^7}, \quad b_5 = -\frac{a_5}{a_1^6} + 6 \frac{a_2 a_4}{a_1^7} + 3 \frac{a_3^2}{a_1^7} - 21 \frac{a_2^2 a_3}{a_1^8} + 14 \frac{a_2^4}{a_1^9}$$

Auch diese Koeffizienten sind im allgemeinen Fall komplexe Größen; für $\gamma_0(l_0) = 0$ ergibt sich

$$\Delta q + i l = b_1 (x + i y) + b_2 (x + i y)^2 + b_3 (x + i y)^3 + \dots \quad (12)$$

mit reellen Koeffizienten b_i .

Nimmt man am Ellipsoid geographische Koordinaten an, so ist in (8) und (12) der isometrische Breitenunterschied durch den entsprechenden geographischen Breitenunterschied zu ersetzen; wir benützen dazu die Entwicklung

$$\Delta q = \frac{d q}{d \varphi} \Delta \varphi + \frac{1}{2!} \frac{d^2 q}{d \varphi^2} \Delta \varphi^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 q}{d \varphi^3} \Delta \varphi^3 + \dots$$

deren Koeffizienten u. a. in [5] schon vorliegen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x = & \left[\frac{a_1}{\cos \varphi_0} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \right] \Delta \varphi + \left[\frac{a_1 t_0}{2 \cos \varphi_0} (1 + \eta_0^2 - 3 \eta_0^4) + \right. \\ & \left. + \frac{a_2}{\cos^2 \varphi_0} (1 - 2 \eta_0^2 + 3 \eta_0^4) \right] \Delta \varphi^2 + \left[-a_2 \right] \Delta \varphi^3 \\ & + \left[\frac{a_1}{6 \cos \varphi_0} (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2 - 3 \eta_0^4 + 6 t_0^2 \eta_0^4) + \frac{a_2 t_0}{\cos^2 \varphi_0} (1 - 3 \eta_0^4) + \right. \\ & \left. + \frac{a_3}{\cos^3 \varphi_0} (1 - 3 \eta_0^2 + 6 \eta_0^4) \right] \Delta \varphi^3 \\ & + \left[-\frac{3 a_3}{\cos \varphi_0} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) \right] \Delta \varphi^4 \\ & + \left[\frac{a_1 t_0}{24 \cos \varphi_0} (5 + 6 t_0^2 - \eta_0^2) + \frac{a_2}{12 \cos^2 \varphi_0} (4 + 11 t_0^2 - 2 t_0^2 \eta_0^2) + \right. \\ & \left. + \frac{3 a_3 t_0}{2 \cos^3 \varphi_0} (1 - \eta_0^2) + \frac{a_4}{\cos^4 \varphi_0} (1 - 4 \eta_0^2) \right] \Delta \varphi^4 \\ & + \left[-\frac{3 a_3 t_0}{2 \cos \varphi_0} (1 + \eta_0^2) - \frac{6 a_4}{\cos^2 \varphi_0} (1 - 2 \eta_0^2) \right] \Delta \varphi^5 + \left[a_4 \right] \Delta \varphi^6 \quad (13) \\ & + \left[\frac{a_1}{120 \cos \varphi_0} (5 + 28 t_0^2 + 24 t_0^4) + \frac{a_2 t_0}{12 \cos^2 \varphi_0} (7 + 10 t_0^2) + \right. \\ & \left. + \frac{a_3}{4 \cos^3 \varphi_0} (2 + 7 t_0^2) + \frac{2 a_4 t_0}{\cos^4 \varphi_0} + \frac{a_5}{\cos^5 \varphi_0} \right] \Delta \varphi^5 \\ & + \left[-\frac{a_3}{2 \cos \varphi_0} (1 + 2 t_0^2) - \frac{6 a_4 t_0}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{10 a_5}{\cos^3 \varphi_0} \right] \Delta \varphi^6 + \left[\frac{5 a_5}{\cos \varphi_0} \right] \Delta \varphi^7 \\ y = & [a_1] l + \left[\frac{2 a_2}{\cos \varphi_0} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) \right] \Delta \varphi l + \left[\frac{a_2 t_0}{\cos \varphi_0} (1 + \eta_0^2 - 3 \eta_0^4) + \right. \\ & \left. + \frac{3 a_3}{\cos^2 \varphi_0} (1 - 2 \eta_0^2 + 3 \eta_0^4) \right] \Delta \varphi^2 l \\ & + [-a_3] l^3 + \left[\frac{a_2}{3 \cos \varphi_0} (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2) + \frac{3 a_3 t_0}{\cos^2 \varphi_0} + \frac{4 a_4}{\cos^3 \varphi_0} (1 - 3 \eta_0^2) \right] \Delta \varphi^3 l \\ & + \left[-\frac{4 a_4}{\cos \varphi_0} (1 - \eta_0^2) \right] \Delta \varphi^4 l \\ & + \left[\frac{a_2 t_0}{12 \cos \varphi_0} (5 + 6 t_0^2) + \frac{a_3}{4 \cos^2 \varphi_0} (4 + 11 t_0^2) + \frac{6 a_4 t_0}{\cos^3 \varphi_0} + \frac{5 a_5}{\cos^4 \varphi_0} \right] \Delta \varphi^4 l \\ & + \left[-\frac{2 a_4 t_0}{\cos \varphi_0} - \frac{10 a_5}{\cos^2 \varphi_0} \right] \Delta \varphi^5 l + [a_5] l^5 \end{aligned}$$

1) Bezeichnungen nach Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde. Es bedeutet $t = t \varphi$, $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$

Nach (12) ergeben sich die Umkehrungen dieser allgemeinen Formeln mit

$$\begin{aligned}
 \Delta \varphi = & [b_1 \cos \varphi_0 (1 + \eta_0^2)] x + \left[b_2 \cos \varphi_0 (1 + \eta_0^2) - \right. \\
 & \left. - b_1^2 \frac{\cos^2 \varphi_0 t_0}{2} (1 + 4 \eta_0^2 + 3 \eta_0^4) \right] x^2 + [- b_2 \cos \varphi_0 (1 + \eta_0^2)] y^2 \\
 & + \left[b_3 \cos \varphi_0 (1 + \eta_0^2) - b_1 b_2 \cos^2 \varphi_0 t_0 (1 + 4 \eta_0^2 + 3 \eta_0^4) - \right. \\
 & \left. - b_1^3 \frac{\cos^3 \varphi_0}{6} (1 - t_0^2 + 5 \eta_0^2 - 13 t_0^2 \eta_0^2 + 7 \eta_0^4 - 27 t_0^2 \eta_0^4) \right] x^3 \\
 & + [- 3 b_3 \cos \varphi_0 (1 + \eta_0^2) + b_1 b_2 \cos^2 \varphi_0 t_0 (1 + 4 \eta_0^2 + 3 \eta_0^4)] x y^2 \\
 & + \left[b_4 \cos \varphi_0 (1 + \eta_0^2) - (b_2^2 + 2 b_1 b_3) \frac{\cos^2 \varphi_0 t_0}{2} (1 + 4 \eta_0^2) - \right. \\
 & \quad - b_1^2 b_2 \frac{\cos^3 \varphi_0}{2} (1 - t_0^2 + 5 \eta_0^2 - 13 t_0^2 \eta_0^2) + \\
 & \quad \left. + b_1^4 \frac{\cos^4 \varphi_0 t_0}{24} (5 - t_0^2 + 56 \eta_0^2 - 40 t_0^2 \eta_0^2) \right] x^4 \\
 & + \left[- 6 b_4 \cos \varphi_0 (1 + \eta_0^2) + (b_2^2 + 3 b_1 b_3) \cos^2 \varphi_0 t_0 (1 + 4 \eta_0^2) + \right. \\
 & \quad \left. + b_1^2 b_2 \frac{\cos^3 \varphi_0}{2} (1 - t_0^2 + 5 \eta_0^2 - 13 t_0^2 \eta_0^2) \right] x^2 y^2 \quad (14)^1 \\
 & + \left[b_4 \cos \varphi_0 (1 + \eta_0^2) - b_2^2 \frac{\cos^2 \varphi_0 t_0}{2} (1 + 4 \eta_0^2) \right] y^4 \\
 & + \left[b_5 \cos \varphi_0 - (b_1 b_4 + b_2 b_3) \cos^2 \varphi_0 t_0 - (b_1 b_2^2 + b_1^2 b_3) \frac{\cos^3 \varphi_0}{2} (1 - t_0^2) + \right. \\
 & \quad \left. + b_1^3 b_2 \frac{\cos^4 \varphi_0 t_0}{6} (5 - t_0^2) + b_1^5 \frac{\cos^5 \varphi_0}{120} (5 - 18 t_0^2 + t_0^4) \right] x^5 \\
 & + \left[- 10 b_5 \cos \varphi_0 + (6 b_1 b_4 + 4 b_2 b_3) \cos^2 \varphi_0 t_0 + \right. \\
 & \quad \left. + (2 b_1 b_2^2 + 3 b_1^2 b_3) \frac{\cos^3 \varphi_0}{2} (1 - t_0^2) - b_1^3 b_2 \frac{\cos^4 \varphi_0 t_0}{6} (5 - t_0^2) \right] x^3 y^2 \\
 & + \left[5 b_5 \cos \varphi_0 - (b_1 b_4 + 3 b_2 b_3) \cos^2 \varphi_0 t_0 - b_1 b_2^2 \frac{\cos^3 \varphi_0}{2} (1 - t_0^2) \right] x y^4 \\
 l = & [b_1] \gamma + [2 b_2] x \gamma + [3 b_3] x^2 \gamma + [- b_3] \gamma^3 + [4 b_4] x^3 \gamma + [- 4 b_4] x \gamma^3 + \\
 & + [5 b_5] x^4 \gamma + [- 10 b_5] x^2 \gamma^3 + [b_5] \gamma^5
 \end{aligned}$$

Die konforme Kegelprojektion mit zwei längentreu abgebildeten Parallelkreisen

Entsprechend dem Netzbild der Lambertschen Kegelprojektion verfügen wir über die entstehende Abbildung so, daß sich die Parallelkreise in einer konzentrischen Kreisschar, die Meridiane in hiezu orthogonalen Radien abbilden.

¹⁾ Bezeichnungen nach J o r d a n - E g g e r t, Handbuch der Vermessungskunde. Es bedeutet $t = t_0 \varphi$, $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$

Dazu sei in der Bildebene nach Abb. 2 ein Polarkoordinatensystem angenommen, dessen Zentrum die Abbildung eines Pols darstelle. Dieses System r, l' führen wir in ein isothermes System mit den thermischen Parametern q', l' über, wozu wir ansetzen

$$\frac{dr}{r dl'} = - \frac{dq'}{dl'} \quad (15)$$

Der isotherme Radius q' zähle dabei entgegen dem polaren Radius r . Die Integration von (15) ergibt

$$r = c e^{-q'} \quad (16)$$

worin c die Integrationskonstante darstellt.

Durch
$$q' + i l' = f(q + i l) \quad (17)$$

bilden wir nun das Ellipsoid in die Bildebene ab; wir wählen dazu — dem Netzentwurf entsprechend — die einfache Form

$$q' + i l' = n (q + i l) \quad (18)$$

wobei n eine reelle Zahl sein soll. Mit (16) folgt daraus

$$r = c e^{-nq}, \quad l' = n l \quad (19)$$

Nehmen wir weiter ein rechtwinkliges System x', y' nach Abb. 2 an, dessen x' -Achse im Bild eines als Hauptmeridian angenommenen Meridians liegt, so erhalten wir

$$x' + i y' = c e^{-nq} (\cos n l - i \sin n l)$$

oder

$$x' + i y' = c e^{-nq - i n l} \quad (20)$$

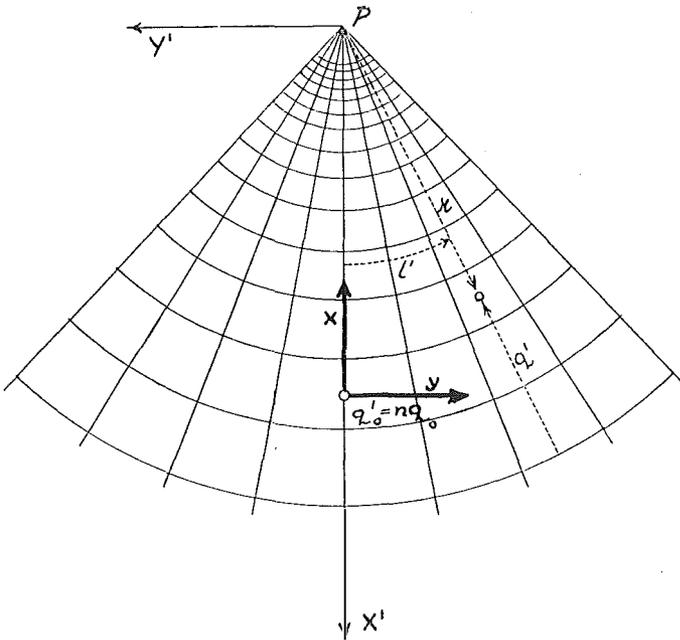


Abb. 2

Dies ist der der Form (1) entsprechende Ansatz für eine konforme Kegelprojektion; für $l = 0$ ist

$$x' = c e^{-nq} = f(q) \quad (21)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten a_i und b_i für einen Nullpunkt q_0 (x_0') bilden wir

$$\begin{aligned} a_1 &= f'(q_0) = -c e^{-nq_0} \cdot n \\ a_2 &= \frac{1}{2!} f''(q_0) = \frac{1}{2!} c e^{-nq_0} \cdot n^2 \\ a_3 &= \frac{1}{3!} f'''(q_0) = -\frac{1}{3!} c e^{-nq_0} \cdot n^3 \\ a_4 &= \frac{1}{4!} f^{IV}(q_0) = \frac{1}{4!} c e^{-nq_0} \cdot n^4 \\ a_5 &= \frac{1}{5!} f^V(q_0) = -\frac{1}{5!} c e^{-nq_0} \cdot n^5 \end{aligned} \quad (22)$$

Wir setzen noch $c e^{-nq_0} = r_0$ und beachten, daß die Zählung von Δq und l mit jener von x und y übereinstimmen soll; letztere Forderung bedingt eine Umkehrung der Vorzeichen der Koeffizienten a_i in (22). Damit ergibt sich

$$a_1 = r_0 n, \quad a_2 = -\frac{1}{2!} r_0 n^2, \quad a_3 = \frac{1}{3!} r_0 n^3, \quad a_4 = -\frac{1}{4!} r_0 n^4, \quad a_5 = \frac{1}{5!} r_0 n^5 \quad (23)$$

und nach (11)

$$b_1 = \frac{1}{r_0 n}, \quad b_2 = \frac{1}{2 r_0^2 n}, \quad b_3 = \frac{1}{3 r_0^3 n}, \quad b_4 = \frac{1}{4 r_0^4 n}, \quad b_5 = \frac{1}{5 r_0^5 n} \quad (23a)$$

Zur Aufstellung der Abbildungsgleichungen sind nun noch die Größen r_0 und n zu bestimmen. Wir nehmen den allgemeinen Fall zweier längentreu abgebildeter Parallelkreise an; für diese gilt, wenn wir deren Breiten mit φ_1 und φ_2 bezeichnen

$$\begin{aligned} N_1 \cos \varphi_1 &= n r_1 = n c e^{-nq_1} \\ N_2 \cos \varphi_2 &= n r_2 = n c e^{-nq_2} \end{aligned} \quad (24)$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{N_1 \cos \varphi_1}{N_2 \cos \varphi_2} = \left(\frac{e^{-q_1}}{e^{-q_2}} \right)^n \quad (25)$$

und

$$n = \frac{\log(N_1 \cos \varphi_1) - \log(N_2 \cos \varphi_2)}{\mu(q_2 - q_1)} \quad (26)$$

Die Integrationskonstante c ergibt sich aus

$$c = \frac{N_1 \cos \varphi_1}{n e^{-nq_1}} = \frac{N_2 \cos \varphi_2}{n e^{-nq_2}} \quad (27)$$

In (23) wurde der Wert $c e^{-nq_0} = r_0$ für die Breite φ_0 (q_0) bezeichnet; dieser ergibt sich demnach mit

$$r_0 = \frac{N_1 \cos \varphi_1}{n e^{-nq_1}} e^{-nq_0} = \frac{N_2 \cos \varphi_2}{n e^{-nq_2}} e^{-nq_0} \quad (28)$$

und, logarithmiert

$$\log r_0 = \log (N_1 \cos \varphi_1) + \mu \cdot \mu (q_1 - q_0) - \log \mu = \log (N_2 \cos \varphi_2) + \mu \cdot \mu (q_2 - q_0) - \log \mu \quad (29)$$

Die Ausdrücke (26) und (28) sollen noch auf eine andere Form gebracht werden.

Wir gehen von einem Punkt $\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ aus und entwickeln mit $\Delta = \varphi_1 - \varphi_0$

$$\begin{aligned} \log (N_1 \cos \varphi_1) &= \log N_0 \cos \varphi_0 - \frac{\mu}{6} t_0 (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \Delta - \\ &\quad - \frac{\mu}{2} (1 + t_0^2 - \eta_0^2 + t_0^2 \eta_0^2 + \eta_0^4 - 3 t_0^2 \eta_0^4) \Delta^2 \\ &\quad - \frac{\mu t_0}{6} (2 + 2 t_0^2 + 4 \eta_0^2 - 10 \eta_0^4 + 6 t_0^2 \eta_0^4) \Delta^3 - \\ &\quad - \frac{\mu}{24} (2 + 8 t_0^2 + 6 t_0^4 + 4 \eta_0^2 - 4 t_0^2 \eta_0^2) \Delta^4 \\ &\quad - \frac{\mu t_0}{120} (16 + 40 t_0^2 + 24 t_0^4) \Delta^5 - \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Die gleiche Entwicklung läßt sich für $\log (N_2 \cos \varphi_2)$ ausführen; ebenso setzen wir an Stelle des Nenners in (26)

$$\mu (q_2 - q_1) = \mu (q_2 - q_0 - (q_1 - q_0))$$

und entwickeln die Differenzen $q_2 - q_0$ und $q_1 - q_0$ in Potenzreihen nach Potenzen des entsprechenden Breitenunterschiedes. Nach einigen Rechnungen ergibt

$$\begin{aligned} \text{sich mit } \Delta &= \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ \mu &= \sin \varphi_0 + \frac{\sin \varphi_0}{6} (1 + 4 \eta_0^2 - 4 \eta_0^4) \Delta^2 + \frac{\sin \varphi_0}{360} (23 + 16 t_0^2) \Delta^4 + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

$$\log \mu = \log \sin \varphi_0 + \frac{\mu}{6} (1 + 4 \eta_0^2 - 4 \eta_0^4) \Delta^2 + \frac{\mu}{360} (18 + 16 t_0^2) \Delta^4 + \dots \quad (31a)$$

und

$$\begin{aligned} r_0 &= N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0 + \frac{N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0}{6} (-4 - \eta_0^2 + \eta_0^4) \Delta^2 + \\ &\quad + \frac{N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0}{360} (32 - 31 t_0^2) \Delta^4 + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \log r_0 &= \log N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0 + \frac{\mu}{6} (-4 - \eta_0^2 + \eta_0^4) \Delta^2 + \\ &\quad + \frac{\mu}{360} (-48 - 31 t_0^2) \Delta^4 + \dots \end{aligned} \quad (32a)$$

Soll nur ein Parallelkreis ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$) längentreu abgebildet werden, so ist in (31) und (32) $\Delta = 0$ zu setzen. Daraus folgt

$$\mu = \sin \varphi_0 \quad (33)$$

und

$$r_0 = N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0 \quad (34)$$

Zur Aufstellung der Abbildungsgleichungen geht man, wenn die Parallelkreise in den Breiten φ_1 und φ_2 längentreu abgebildet werden sollen, zweckmäßig

von einem Punkt mittlerer Breite $\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ aus. Mit (23) und (31) folgt aus (13) und (14)

$$\begin{aligned}
 x = r_0 t_0 \left[(1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) + \frac{1}{6} (1 + 3 \eta_0^2 - 7 \eta_0^4) \Delta^2 + \right. \\
 \left. + \frac{1}{360} (23 + 16 t_0^2) \Delta^4 + \dots \right] \Delta \varphi \\
 + \frac{r_0 t_0^2}{2} \left[(3 \eta_0^2 - 6 \eta_0^4) + \frac{1}{6} (-1 + \eta_0^2 + 15 \eta_0^4) \Delta^2 + \right. \\
 \left. + \frac{1}{360} (-33 - 16 t_0^2) \Delta^4 + \dots \right] \Delta \varphi^2 + \\
 + \frac{r_0 t_0^2 \cos^2 \varphi_0}{2} \left[1 + \frac{1}{3} (1 + 4 \eta_0^2 - 4 \eta_0^4) \Delta^2 + \frac{1}{360} (56 + 32 t_0^2) \Delta^4 + \dots \right] l^2 \\
 + \frac{r_0 t_0}{6} \left[(1 + \eta_0^2 - 3 t_0^2 \eta_0^2 - 3 \eta_0^4 + 21 t_0^2 \eta_0^4) + \right. \\
 \left. + \frac{1}{6} (1 - t_0^2 + 5 \eta_0^2 - 13 t_0^2 \eta_0^2) \Delta^2 + \dots \right] \Delta \varphi^3 + \\
 + \frac{r_0 t_0^3 \cos^2 \varphi_0}{2} \left[(-1 + \eta_0^2 - \eta_0^4) + \frac{1}{2} (-1 - 3 \eta_0^2) \Delta^2 + \dots \right] \Delta \varphi l^2 \\
 + \frac{r_0 t_0^2}{24} \left[(1 - \eta_0^2) + \frac{1}{6} (-3 - 2 t_0^2) \Delta^2 + \dots \right] \Delta \varphi^4 + \\
 + \frac{r_0 t_0^4 \cos^2 \varphi_0}{4} \left[(-3 \eta_0^2) + \frac{1}{6} \Delta^2 + \dots \right] \Delta \varphi^2 l^2 + \\
 + \frac{r_0 t_0^4 \cos^4 \varphi_0}{24} \left[-1 - \frac{2}{3} \Delta^2 - \dots \right] l^4 \\
 + \frac{r_0 t_0}{120} [(5 + 3 t_0^2) + \dots] \Delta \varphi^5 + \frac{r_0 t_0^3 \cos^2 \varphi_0}{12} [-1 + \dots] \Delta \varphi^3 l^2 + \\
 + \frac{r_0 t_0^5 \cos^4 \varphi_0}{24} [1 + \dots] \Delta \varphi l^4 \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y = r_0 t_0 \cos \varphi_0 \left[1 + \frac{1}{6} (1 + 4 \eta_0^2 - 4 \eta_0^4) \Delta^2 + \frac{1}{360} (23 + 16 t_0^2) \Delta^4 + \dots \right] l \\
 + r_0 t_0^2 \cos \varphi_0 \left[(-1 + \eta_0^2 - \eta_0^4) + \frac{1}{3} (-1 - 3 \eta_0^2 + 7 \eta_0^4) \Delta^2 + \right. \\
 \left. + \frac{1}{360} (-56 - 32 t_0^2) \Delta^4 + \dots \right] \Delta \varphi l \\
 + \frac{r_0 t_0^3 \cos \varphi_0}{2} \left[(-3 \eta_0^2 + 6 \eta_0^4) + \frac{1}{6} (1 - 4 \eta_0^2) \Delta^2 + \dots \right] \Delta \varphi^2 l + \\
 + \frac{r_0 t_0^3 \cos^3 \varphi_0}{6} \left[-1 + \frac{1}{2} (-1 - 4 \eta_0^2) \Delta^2 + \dots \right] l^3 \\
 + \frac{r_0 t_0^4 \cos^3 \varphi_0}{6} \left[(1 - \eta_0^2) + \frac{1}{3} (2 + 6 \eta_0^2) \Delta^2 + \dots \right] \Delta \varphi l^3 + \\
 + \frac{r_0 t_0^2 \cos \varphi_0}{6} \left[(-1 - \eta_0^2 + 3 t_0^2 \eta_0^2) + \frac{1}{6} (-2 + t_0^2) \Delta^2 + \dots \right] \Delta \varphi^3 l \\
 + \frac{r_0 t_0^3 \cos \varphi_0}{24} [-1 + \dots] \Delta \varphi^4 l + \frac{r_0 t_0^5 \cos^3 \varphi_0}{12} [0 + \dots] \Delta \varphi^2 l^3 + \\
 + \frac{r_0 t_0^5 \cos^5 \varphi_0}{120} [1 + \dots] l^5
 \end{aligned}$$

Meridiankonvergenz und Maßstabsverhältnis

Die ebene Meridiankonvergenz in einem Bildpunkt ist der negative Richtungswinkel des durch diesen Punkt gehenden Meridianbildes. Sind die geographischen Koordinaten dieses Punktes gegeben, so ist nach (19) die Meridiankonvergenz aus

$$\gamma = n l = \left[\sin \varphi_0 + \frac{\sin \varphi_0}{6} (1 + 4 \eta_0^2 - 4 \eta_0^4) \Delta^2 + \frac{\sin \varphi_0}{360} (23 + 16 \eta_0^2) \Delta^4 + \dots \right] l \quad (37)$$

gegeben; für deren Berechnung aus den ebenen Koordinaten ist lediglich der Längenunterschied l durch dessen Entwicklung nach den ebenen Koordinaten zu ersetzen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \gamma = & \left[\frac{1}{r_0} \right] y + \left[\frac{1}{r_0^2} \right] x y + \left[\frac{1}{r_0^3} \right] x^2 y + \left[-\frac{1}{3 r_0^3} \right] y^3 + \left[\frac{1}{r_0^4} \right] x^3 y + \left[-\frac{1}{r_0^4} \right] x y^3 \\ & + \left[\frac{1}{r_0^5} \right] x^4 y + \left[-\frac{2}{r_0^5} \right] x^2 y^3 + \left[\frac{1}{5 r_0^5} \right] y^5 + \dots \end{aligned} \quad (38)$$

Das Maßstabsverhältnis ist durch den Quotienten

$$\frac{d S}{d s} = m \quad (39)$$

gegeben, wobei $d s$ ein Linienelement am Ellipsoid, $d S$ dessen Abbildung darstellt. Eine konforme Abbildung ist nun bekanntlich dadurch definiert, daß dieses Verhältnis in einem betrachteten Punkt unabhängig von der Richtung des Linienelements besteht; es genügt also, dieses in irgendeiner Richtung zu bestimmen. Da nach dem Ansatz der konformen Kegelprojektion das Maßstabsverhältnis nur vom Breitenunterschied zu einem Ausgangspunkt abhängig sein kann, genügt es, zu dessen Bestimmung etwa die Abbildung eines Meridians zu untersuchen. Wir wählen dafür jenen Meridian, dessen Bild in der x -Achse des ebenen Systems liegt. Zählen wir x und den zugehörigen Meridianbogen ΔB ebenso wie die entsprechenden Differenzen Δq und $\Delta \varphi$ vom gewählten Nullpunkt aus, so ist

$$m = \frac{d x}{d \Delta B} \quad (40)$$

Um diesen Differentialquotienten zu bilden, schreiben wir

$$m = \frac{d x}{d \Delta q} \cdot \frac{d \Delta q}{d \Delta B} \quad (41)$$

Nach (9) ist mit $l = 0$

$$\frac{d x}{d \Delta q} = a_1 + 2 a_2 \Delta q + 3 a_3 \Delta q^2 + 4 a_4 \Delta q^3 + 5 a_5 \Delta q^4 + \dots \quad (42)$$

Weiter ist nach [6]

$$\begin{aligned} \frac{d \Delta q}{d \Delta B} = & \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} + \frac{t_0}{N_0^2 \cos \varphi_0} \Delta B + \frac{1}{2 N_0^3 \cos \varphi_0} (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2) \Delta B^2 + \\ & + \frac{t_0}{6 N_0^4 \cos \varphi_0} (5 + 6 t_0^2 + \eta_0^2 - 4 \eta_0^4) \Delta B^3 + \\ & + \frac{1}{24 N_0^5 \cos \varphi_0} (5 + 28 t_0^2 + 24 t_0^4) \Delta B^4 + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Durch Einsetzen von (42) und (43) in (41) bei gleichzeitiger Substitution durch

$$\begin{aligned} \Delta B = & N_0 \cos \varphi_0 \Delta q - \frac{N_0^2 \cos^2 \varphi_0 t_0}{2} \Delta q^2 - \frac{N_0 \cos^3 \varphi_0}{6} (1 - t_0^2 + \eta_0^2) \Delta q^3 + \\ & + \frac{N_0 \cos^4 \varphi_0 t_0}{24} (5 - t_0^2 + 9 \eta_0^2) \Delta q^4 + \dots \\ \Delta B^2 = & N_0^2 \cos^2 \varphi_0 \Delta q^2 - N_0^2 \cos^3 \varphi_0 t_0 \Delta q^3 - \frac{N_0 \cos \varphi_0}{12} (4 - 7 t_0^2 + 4 \eta_0^2) \Delta q^4 + \dots \\ \Delta B^3 = & N_0^3 \cos^3 \varphi_0 \Delta q^3 - \frac{3 N_0^3 \cos^4 \varphi_0 t_0}{2} \Delta q^4 + \dots \\ \Delta B^4 = & N_0^4 \cos^4 \varphi_0 \Delta q^4 + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

ergibt sich das Maßstabsverhältnis als Funktion des isometrischen Breitenunterschiedes; man erhält

$$\begin{aligned} m = & \frac{n r_0}{N_0 \cos \varphi_0} + \left[\frac{n r_0 t_0}{N_0} - \frac{n^2 r_0}{N_0 \cos \varphi_0} \right] \Delta q + \left[\frac{n r_0 \cos \varphi_0}{2 N_0} (1 + t_0^2 + \eta_0^2) - \right. \\ & \left. - \frac{n^2 r_0 t_0}{N_0} + \frac{n^3 r_0}{2 N_0 \cos \varphi_0} \right] \Delta q^2 \\ & + \left[\frac{n r_0 t_0}{6 N_0} (1 + t_0^2 - 3 \eta_0^2) - \frac{n^2 r_0 \cos \varphi_0}{2 N_0} (1 + t_0^2 + \eta_0^2) + \frac{n^3 r_0 t_0}{2 N_0} - \right. \\ & \left. - \frac{n^4 r_0}{6 N_0 \cos \varphi_0} \right] \Delta q^3 \\ & + \left[\frac{n r_0 \cos^3 \varphi_0}{24 N_0} (1 + 2 t_0^2 + t_0^4) - \frac{n^2 r_0 t_0 \cos^2 \varphi_0}{6 N_0} (1 + t_0^2) + \right. \\ & \left. + \frac{n^3 r_0 \cos \varphi_0}{4 N_0} (1 + t_0^2) - \frac{n^4 r_0 t_0}{6 N_0} + \frac{n^5 r_0}{24 N_0 \cos \varphi_0} \right] \Delta q^4 + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Ersetzt man hierin einmal den isometrischen Breitenunterschied durch jenen der geographischen Breite, zum andernmal nach (12) durch die ebenen Koordinaten, so ergibt sich mit (31) und (32)

$$\begin{aligned}
m = & \left[1 + \frac{1}{2} (-1 + \eta_0^2 - \eta_0^4) \Delta^2 + \frac{1}{24} (1 - t_0^2) \Delta^4 + \dots \right] \\
& + \frac{t_0}{6} \left[(-1 - 3\eta_0^2 + 7\eta_0^4) \Delta^2 + \frac{1}{60} (7 - 16t_0^2) \Delta^4 + \dots \right] \Delta \varphi \\
& + \frac{1}{2} \left[(1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) + \frac{1}{6} (-3 - t_0^2) \Delta^2 + \dots \right] \Delta \varphi^2 \\
& + \frac{t_0}{6} \left[(1 + 3\eta_0^2 - 7\eta_0^4) + \frac{1}{6} (-7 - 2t_0^2) \Delta^2 + \dots \right] \Delta \varphi^3 \quad (46) \\
& + \frac{1}{24} \left[(5 + 3t_0^2 - 2\eta_0^2 - 3t_0^2\eta_0^2) + \frac{1}{6} (-15 - 24t_0^2 - 6t_0^4) \Delta^2 + \dots \right] \Delta \varphi^4 \\
& + \frac{t_0}{40} \left[(7 + 4t_0^2) + \dots \right] \Delta \varphi^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = & \left[1 + \frac{1}{2} (-1 + \eta_0^2 - \eta_0^4) \Delta^2 + \frac{1}{24} (1 - t_0^2) \Delta^4 + \dots \right] \\
& + \frac{t_0}{6 N_0} \left[(-1 - 4\eta_0^2 + 4\eta_0^4) \Delta^2 + \frac{1}{60} (-23 - 16t_0^2) \Delta^4 + \dots \right] x \\
& + \frac{1}{2 N_0^2} \left[(1 + \eta_0^2) + \frac{1}{6} (3 - t_0^2 + 3\eta_0^2 - 4t^2\eta_0^2) \Delta^2 + \dots \right] x^2 + \\
& \quad \quad \quad + \frac{t_0^2}{12 N_0^2} \left[(1 + 4\eta_0^2) \Delta^2 + \dots \right] y^2 \quad (47) \\
& + \frac{t_0}{6 N_0^3} \left[(1 - 3\eta_0^2) + \frac{1}{3} (3 - t_0^2 - 12\eta_0^2 - 4t_0^2\eta_0^2) \Delta^2 + \dots \right] x^3 + \\
& \quad + \frac{t_0}{2 N_0^3} \left[(-1 - \eta_0^2) + \frac{1}{6} (-7 + 2t_0^2 - 5\eta_0^2 + 8t_0^2\eta_0^2) \Delta^2 + \dots \right] x y^2 \\
& + \frac{1}{24 N_0^4} [(1 + 3t_0^2) + \dots] x^4 + \frac{1}{4 N_0^4} [(-3t_0^2) + \dots] x^2 y^2 + \\
& \quad \quad \quad + \frac{1}{8 N_0^4} [t_0^2 + \dots] y^4 + \dots
\end{aligned}$$

Auch diese Formeln führen mit $\Delta = 0$ auf die in [2] für das Maßstabsverhältnis entwickelten Reihen.

Beispiel für die Anwendung der konformen Kegelprojektion mit zwei längentreu abgebildeten Parallelkreisen

Abschließend sei ein Beispiel für die Anwendung der Formeln (35), (36), (37), (38), (46) und (47) angeführt, welches etwa der Anwendung der genannten Ab-

bildung für Österreich entspricht. Mit den längentreu abgebildeten Parallelkreisen in den Breiten $\varphi_1 = 47^0 15'$ und $\varphi_2 = 48^0 45'$ ergeben sich mit der Mittelbreite $\varphi_0 = 48^0 00'$ unter Zugrundelegung der Dimensionen des Besselschen Ellipsoids folgende Potenzreihen^{*}) (es sind, in Klammern gesetzt, die Logarithmen der Koeffizienten angegeben).

$$\begin{array}{rcl}
 x = & (1,489\ 6785\ 349) \triangle \varphi & \gamma = (1,316\ 4940\ 147) l \\
 + & (3,872\ 5383\ 4\ -10) \triangle \varphi^2 & - (6,046\ 3394\ 1\ -10) \triangle \varphi l \\
 + & (5,572\ 1248\ 9\ -10) l^2 & - (8,429\ 199\ -20) \triangle \varphi^2 l \\
 + & (0,080\ 520\ -10) \cdot \triangle \varphi^3 & - (9,651\ 664\ -20) \cdot l^3 \\
 - & (0,301\ 971\ -10) \cdot \triangle \varphi l^2 & - (4,637\ 08\ -20) \triangle \varphi^3 l \\
 + & (4,211\ 66\ -20) \cdot \triangle \varphi^4 & + (4,381\ 46\ -20) \triangle \varphi l^3 \\
 - & (2,687\ 44\ -20) \cdot \triangle \varphi^2 l^2 & - (8,770\ -30) \triangle \varphi^4 l \\
 - & (3,606\ 26\ -20) \cdot l^4 & + (7,464\ -30) l^5 \\
 + & (9,093\ -30) \triangle \varphi^5 & \\
 - & (8,896\ -30) \triangle \varphi^3 l^2 & \\
 + & (8,337\ -30) \triangle \varphi l^4 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \triangle \varphi = & (8,510\ 3214\ 649\ -10) \cdot x & l = (8,683\ 5059\ 848\ -10) \cdot \gamma \\
 - & (9,403\ 5146\ 0\ -20) x^2 & + (1,923\ 6728\ 5\ -10) x \gamma \\
 - & (1,449\ 1583\ 3\ -10) \cdot \gamma^2 & + (5,163\ 840\ -20) x^2 \gamma \\
 - & (4,121\ 642\ -20) \cdot x^3 & - (4,686\ 718\ -20) \gamma^3 \\
 - & (4,685\ 701\ -20) \cdot x \gamma^2 & + (8,404\ 01\ -30) x^3 \gamma \\
 - & (6,722\ 81\ -30) \cdot x^4 & - (8,404\ 01\ -30) x \gamma^3 \\
 - & (7,697\ 20\ -30) x^2 \gamma^2 & + (1,644\ -30) x^4 \gamma \\
 + & (7,323\ 82\ -30) \gamma^4 & - (1,945\ -30) x^2 \gamma^3 \\
 + & (9,322\ -40) x^5 & + (0,945\ -30) \gamma^5 \\
 - & (0,831\ -30) x^3 \gamma^2 & \\
 + & (0,907\ -30) x \gamma^4 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \gamma = & (9,871\ 0860\ 108) \cdot l & \gamma = (8,554\ 5919\ 956\ -10) \cdot \gamma \\
 & & + (1,794\ 75886\ -10) x \gamma \\
 & & + (5,034\ 926\ -20) x^2 \gamma \\
 & & - (4,557\ 804\ -20) \gamma^3 \\
 & & + (8,275\ 1\ -30) x^3 \gamma \\
 & & - (8,275\ 1\ -30) x \gamma^3 \\
 & & + (1,515\ -30) x^4 \gamma \\
 & & - (1,816\ -30) x^2 \gamma^3 \\
 & & + (0,816\ -30) \gamma^5
 \end{array}$$

^{*}) Die zahlenmäßige Durchrechnung besorgte Herr cand. ing. W. L ö s c h e r, wissensch. Hilfskraft an der Lehrkanzel für Geodäsie der Techn. Hochschule Graz.

$$\begin{array}{rcl}
 m = 0,999\ 9145\ 830 & & m = 0,999\ 9145\ 830 \\
 - (0,190\ 7537 - 10) \triangle \varphi & & - (8,701\ 07 - 20) \cdot x \\
 + (9,068\ 7624 - 20) \triangle \varphi^2 & & + (6,089\ 4058 - 20) x^2 \\
 + (3,327\ 90 - 20) \triangle \varphi^3 & & + (1,640 - 20) \gamma^2 \\
 + (8,301\ 31 - 30) \triangle \varphi^4 & & + (8,847\ 181 - 30) x^3 \\
 + (2,948 - 30) \triangle \varphi^5 & & - (9,329\ 542 - 30) x \gamma^2 \\
 & & + (2,070 - 30) x^4 \\
 & & - (2,744 - 30) x^2 \gamma^2 \\
 & & + (1,966 - 30) \gamma^4
 \end{array}$$

Für $\triangle \varphi = 1^0 = 3600''$, $l = 2^0 = 7200''$ ergeben sich aus den Reihen für die ebenen Koordinaten diese mit

$$x = 113\ 081, 594 \quad y = 146\ 319, 149$$

Die Berechnung der geographischen Koordinaten aus den eben mitgeteilten Werten ergibt

$$\triangle \varphi = 3600''\ 000\ 01 \quad l = 7200''\ 000\ 02$$

Die ebene Meridiankonvergenz ist für die gleiche Annahme aus den geographischen Koordinaten mit

$$\gamma = 5350''\ 7974$$

und aus ebenen Koordinaten mit

$$\gamma = 5350''\ 7974$$

gegeben; das Maßstabsverhältnis ergibt sich aus den geographischen Koordinaten für den angenommenen Punkt mit

$$m = 1,000\ 0668\ 847$$

und aus den ebenen Koordinaten mit

$$m = 1,000\ 0668\ 851$$

Literatur

- [1] Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde III/2, Seite 204, § 41—43.
- [2] Hristow, Die Mecklenburgischen Koordinaten (normale konforme Kegelprojektion), Zeitschrift für Vermessungswesen, 1943, Seite 230.
- [3] Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde III/2, Seite 216, § 44.
- [4] Young, Some investigations in the theory of map projections, London, Royal Geographical Society, 1920, Seite 59—61 (erwähnt in [3]).
- [5] Hristow, Potenzreihen zwischen den geographischen und isometrischen Koordinaten, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1935, Seite 649.
- [6] Hristow, Über die Transformation von Mercatorkoordinaten in Gauß-Krügersche Koordinaten und umgekehrt, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1934, Seite 467, Formel (7), (10)—(12).