Zur Ausgleichung trigonometrischer Höhenmessungen nach vermittelnden Beobachtungen

Josef Litschauer [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **37** (1–3), S. 55–59

1949


```
@ARTICLE{Litschauer_VGI_194908,
Title = {Zur Ausgleichung trigonometrischer H{\"o}henmessungen nach
    vermittelnden Beobachtungen},
Author = {Litschauer, Josef},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {55--59},
Number = {1--3},
Year = {1949},
Volume = {37}
}
```

Winkelverzerrung wären somit weit kleiner als die bei den modernsten Basismessungen und den besten Triangulierungen I. Ordnung festgestellten Fehler.

2. Auch der von Hammer für viele Zwecke als zulässig angeführte Wert von 10 *km* für den Radius des Vermessungsgebietes ist noch viel zu klein. Die Maximalstreckenverzerrung würde sich aus diesem Wert mit weniger als 1/800.000 ergeben. Abgesehen davon werden, wie dies noch in Punkt 4 ausgeführt wird, nur durchschnittliche Verzerrungen an Stelle der Maximalverzerrungen ermittelt und die Verzerrungen senkrecht zu den vom Vermessungszentrum ausgehenden Großkreisen unbeachtet gelassen.

3. Die Behauptung Näbauers, daß relative Längenverzerrungen von 1/50.000 vermieden werden, wenn die äußersten Punkte des Aufnahmegebietes nicht mehr als 40 *km* von einem das Gebiet der Länge nach teilenden Großkreis abstehen, ist nach den im Abschnitt 3 gefundenen Erkenntnissen nicht mehr haltbar. Es werden jedoch relative Längenverzerrungen dieser Größe vermieden, wenn die äußersten Punkte des Aufnahmegebietes nicht mehr als 40 *km* vom Mittelpunkt desselben entfernt sind, wenn also das Aufnahmegebiet die Form einer sphärischen Kalotte hat, wie aus den Berechnungen des Abschnittes 4 hervorgeht.

Soll ein Gebiet von Streifenform aufgenommen werden, so sind seine Abmessungen — wenn relative Längenverzerrungen von 1/50.000 vermieden werden sollen — durch die in obiger Tabelle zusammengestellten Breiten- und Längenwerte beschränkt. Hierbei erreicht jedoch die Maximalwinkelverzerrung den doppelten Betrag derjenigen, die bei der Vermessung einer sphärischen Kalotte gleicher Ausdehnung auftritt.

4. Die im Bild 1 gegebene Darstellung nach Hartner stellt eine Zentralprojektion der Erdkugel dar, die jedoch gewiß nicht stattfindet, wenn eine an der Erdoberfläche ausgeführte Vermessung in die im Mittelpunkt des Aufnahmegebietes berührende Tangentialebene längentreu ausgebreitet wird. Die ausgeführte Untersuchung ist unvollständig, denn es müßte die Verzerrung nicht nur in den vom Mittelpunkt ausgehenden Radien bestimmt werden, sondern auch in jenen Richtungen, die auf diese Radien senkrecht stehen. Durch die Ermittlung der Größe $\Delta = 2(t - b)$ wird nur eine durchschnittliche Verzerrung, nicht aber deren Maximum bestimmt. Immerhin stellt Hartners Betrachtung einen ersten Versuch dar, das Problem von kartographischer Seite her zu behandeln.

Zur Ausgleichung trigonometrischer Höhenmessungen nach vermittelnden Beobachtungen

Von Dr. techn. Josef Litschauer, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

Vorbemerkung

In Nr. 1—2 aus 1943 der „Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst" (Mitteilungen des Reichsamtes für Landesaufnahme) ist unter dem gleichen Titel ein Aufsatz von A. Haerpfer, Prag, und M. Itze, Berlin (im folgenden zitiert mit H. u. I.), erschienen, der durch einen Irrtum in den Grundlagen zu falschen Ergebnissen kommt. Bald darauf wurden mit den letzten, damals noch bestehenden inländischen Fachzeitschriften auch jene Nachrichten eingestellt, so daß es erst jetzt möglich ist, den dort aufgestellten unrichtigen Schlußfolgerungen für die geodätische Praxis entgegenzutreten. Für diejenigen Leser, welche jenen Aufsatz nicht zur Verfügung haben, sollen seine Grundgedanken vorerst kurz wiederholt werden.

I. Methode

In einem System von n der Lage nach bestimmten Punkten sei die Meereshöhe eines Punktes bekannt, zur Bestimmung der übrigen werden Zenitdistanzen gemessen, und zwar in mehr als n-1 Verbindungen. Unter der „Methode MI" verstehen nun H. u. I. ein Rechenverfahren, das diese Zenitdistanzen als vermittelnde Beobachtungen im Sinne der Ausgleichungsrechnung behandelt, um n-1 voneinander unabhängige Höhenunterschiede als Ausgleichungsunbekannte zu ermitteln. Im Anschluß an die bekannte Gleichung

$$h = s \,.\, \mathrm{ctg}\, z + J - m + s^2 \frac{1-k}{2R}$$

ergibt sich z. B. für die Unbekannte x

$$x = x_0 + \xi = s \,.\, \mathrm{ctg}\,(z + \nu) + J - m + s^2 K = s \,.\, \mathrm{ctg}\, z - \frac{s}{\sin^2 z}\, \nu + J - m + s^2 K$$

$$x_0 = s \,.\, \mathrm{ctg}\, z_0 + J - m + s^2 K = s \,.\, \mathrm{ctg}\, z - \frac{s}{\sin^2 z}(z_0 - z) + J - m + s^2 K$$

$$\xi = \frac{s}{\sin^2 z}(z_0 - z - \nu)$$

Es werden also für die Unbekannten $x, y, \ldots$ Näherungswerte $x_0, y_0, \ldots$ angenommen und damit vorläufige Zenitdistanzen z_0 gerechnet; mit den Widersprüchen $1 = z - z_0$, den unbekannten Zuschlägen $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$, ... und den Koeffizienten $a = -\frac{\sin^2 z}{s}$ werden die Fehlergleichungen $\nu = a\xi - 1$. Für solche Punktverbindungen, denen nicht unmittelbar eine Ausgleichungsunbekannte, sondern auf Grund von Polygonschlußbedingungen eine lineare Funktion mehrerer Unbekannten entspricht, enthalten die Fehlergleichungen mehr Glieder. Allgemein ist also $\nu = a\xi + b\eta + \ldots - 1$, wobei die Koeffizienten, soweit sie nicht Null sind, innerhalb ein und derselben Fehlergleichung den gleichen absoluten Wert haben $a = b = \ldots = \mp \frac{\sin^2 z}{s} \rho$ (für Widersprüche und Verbesserungen im Winkelmaß). Bei Zenitdistanzen in der Nähe von 90° kann näherungsweise $a = b = \ldots = \mp \frac{\rho}{s}$ gesetzt werden. Zur Aufstellung der

Normalgleichungen werden noch die Gewichte benötigt; dafür gilt

$$\frac{1}{g_h} = m_h^2 = c_1 + c_2 \,.\, s^2 + c_3 \,.\, s^4$$

$$\frac{1}{g_z} = m_z^2 = c_4 + c_5 \,.\, s^2$$

wobei
$$c_1 = m_J^2 + m_m^2, \quad c_2 = \frac{m_{z'}^2}{\rho^2}, \quad c_3 = \frac{m_k^2}{4R^2}$$

$$c_4 = m_{z'}^2 = \rho^2 c_2, \quad c_5 = \frac{\rho^2 m_k^2}{4R^2} = \rho^2 c_3.$$

Für die mittleren Fehler der Instrumentenhöhe m_J, der Zielhöhe m_m, der gemessenen Zenitdistanz $m_{z'}$ und des Refraktionskoeffizienten m_k sind den Beobachtungsverhältnissen entsprechende Werte einzusetzen. Schließlich wählen H. u. I. die Gewichte mit

$$g_z = \frac{1}{m_h{}^2}.$$

II. Methode

Als „Methode MII" wird das bekannte und allgemein übliche Verfahren bezeichnet, aus den gemessenen Zenitdistanzen nach der ersten oben angeführten Gleichung Höhenunterschiede zu berechnen und diese Rechnungswerte als fingierte vermittelnde Beobachtungen zu betrachten. Die Unbekannten sind wie vorher $n-1$ voneinander unabhängige Höhenunterschiede, die Koeffizienten der Fehlergleichungen sind $+1$, -1 oder 0, die Gewichte werden nach der vorerwähnten Beziehung $\frac{1}{g_h} = m_h^2 = \ldots$ eingeführt.

Gegenüberstellung bei H. u. I.

Den zweiten Teil der zitierten Veröffentlichung bildet ein Zahlenbeispiel mit 7 Netzpunkten und 30 gemessenen Zenitdistanzen, das nach beiden Verfahren durchgerechnet wird. Die Summe $[gvv)$ ist bei MI gleich 1207, bei MII (nach Umrechnung der Verbesserungen aus dem Längen- in das Winkelmaß) 1419, also merklich größer. Die mittleren Fehler der Unbekannten sind nach MI ungefähr proportional den zugehörigen Seitenlängen, nach MII sind sie ungefähr einander gleich. Aus beiden Ergebnissen wird gefolgert, daß das übliche Verfahren nur eine Näherungslösung darstellt: „Die ältere Methode II aber der neuen Methode theoretisch als ebenbürtig und gleichartig entgegenzustellen, ist unter allen Umständen unstatthaft. Der Vorrang, der ihr gebührt, kann auch durch den etwaigen Einwand, sie sei mit einem größeren Rechenaufwand verbunden, nicht bestritten werden."

Soweit der Inhalt jenes Aufsatzes.

Neue Gegenüberstellung

Irrtümlicherweise werden bei H. u. I. den Zenitdistanzen die Gewichte der zugehörigen Höhenunterschiede beigelegt, im wesentlichen umgekehrt proportional dem Quadrat der Seitenlängen. Die Genauigkeit der eigentlichen Zenitdistanzmessung ist aber ebensowenig von der Zielweite abhängig wie die der Horizontalwinkelmessung. Nur die Unsicherheit des Refraktionskoeffizienten wird bei längeren Entfernungen stärker fühlbar, wirkt aber erst in zweiter Linie; und die Ungenauigkeit der Instrumenten- und Zielhöhen hat auf die Zenitdistanzen überhaupt keinen Einfluß. Übrigens werden diese Höhen, wie auch bei H. u. I. angegeben, meist so genau gemessen, daß sie von vorneherein als verhältnismäßig fehlerfrei angesehen werden können. Auch der Refraktionskoeffizient kann je nach den Umständen als sicher angenommen werden oder durch seine (geschätzte) Unsicherheit die Gewichte beeinflussen oder selbst als weitere Ausgleichungsunbekannte mitbestimmt werden. Die Gewichte g_z und g_h nach den oben angeführten Formeln sind also ausdrücklich auseinander zu halten. Da das besprochene Zahlenbeispiel falsche Gewichte verwendet, sind die daraus abgeleiteten Folgerungen hinfällig. Nichtsdestoweniger sind die beiden Methoden gegeneinander abzuwägen.

Bei Verwendung richtiger Gewichte entspricht MI ohne weiteres dem Grundgedanken der Ausgleichungsrechnung, liefert also streng richtige Ergebnisse. Demgegenüber erscheint MII von vorneherein als Näherung, da die als „vermittelnde Beobachtungen“ eingeführten vorläufigen Höhenunterschiede ja gar nicht selbst beobachtet sind. Es bleibt noch zu untersuchen, wie weit die Ergebnisse in beiden Fällen voneinander abweichen. Als Unbekannte treten beide Male dieselben Größen auf, es kommt also auf die Koeffizienten und Absolutglieder der beiden Normalgleichungssysteme an, aus denen die Unbekannten errechnet werden.

Die Produkte von der Form $g\,.\,a\,.\,b$ sind bei MI

$$g_z\,.\,a\,.\,b = \frac{1}{c_4 + c_5\,s^2}\cdot\frac{\rho}{s}\cdot\frac{\rho}{s} = \frac{1}{\rho^2\,c_2 + \rho^2\,c_3\,s^2}\cdot\frac{\rho^2}{s^2} = \frac{1}{c_2\,s^2 + c_3\,s^4}$$

bei MII $\quad g_h\,.\,a\,.\,b = \dfrac{1}{c_2\,s^2 + c_3\,s^4}\,.\,1\,.\,1 \quad$ (c_1 ist wie erwähnt zu vernachlässigen). Die einzelnen Produkte haben somit in beiden Fällen den gleichen Wert, und da auch ihre Anzahl und Verteilung übereinstimmt, gilt dasselbe von den Summen, d. h. von den Normalgleichungskoeffizienten. Ebenso ist für die Absolutglieder bei MI

$$g_z.\,a.\,l = \frac{1}{c_4 + c_5 s^2}\cdot\frac{\rho}{s}\,.\,(z - z_0) = \frac{1}{\rho^2 c_2 + \rho^2 c_3 s^2}\cdot\frac{\rho^2}{s^2}\cdot\frac{s\,(z - z_0)}{\rho} = \frac{1}{c_2 s^2 + c_3 s^4}\cdot\frac{s\,(z - z_0)}{\rho}$$

bei MII $\quad g_h\,.\,a\,.\,(h' - h_0) = \dfrac{1}{c_2\,s^2 + c_3\,s^4}\,.\,1\,.\,(h' - h_0)$

Da zwischen einer Änderung der Zenitdistanz und einer Änderung des zugehörigen Höhenunterschiedes die Beziehung

$$h' - h_0 = s\,\frac{z - z_0}{\rho}$$

besteht, sind auch die Absolutglieder der Normalgleichungen bei beiden Verfahren einander zahlenmäßig gleich. Damit müssen auch die Ergebnisse in beiden Fällen genau dieselben sein. Es besteht also hier der gleiche Zusammenhang wie zwischen dem üblichen Rechenverfahren für das kombinierte Einschneiden und der „Ermittlung der wahrscheinlichsten Punktlage mit Hilfe von Achsenabschnitten" (Ing. L. Maly in der Festschrift Eduard Doležal, 1932). Hinsichtlich der Rechengenauigkeit entsprechen einander:

bei MI		bei MII	
$\|a\|$	g_z	$\|a\|$	g_h
$\frac{\rho}{s}$	1	1	$\frac{\rho^2}{s^2}$
$\frac{\rho}{s}$	$\frac{1}{c_4 + c_5 s^2}$	1	$\frac{1}{c_2 s^2 + c_3 s^4}$
$\frac{\rho \sin^2 z}{s}$	$\frac{1}{c_4 + c_5 s^2}$	1	$\frac{\sin^4 z}{c_2 s^2 + c_3 s^4}$

Die Quadratsumme der Verbesserungen, die bei H. u. I. als Hauptkriterium für die Güte des Rechenverfahrens herangezogen ist, kann einen Irrtum in den Gewichten nicht aufdecken. Es ist ja gerade das Wesen der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, daß sie die Unbekannten so bestimmt, daß für ein bestimmtes System von Fehlergleichungen mit vorgegebenen Gewichten g die Summe $[gvv]$ ein Minimum wird, ganz gleichgiltig, wie die einzelnen g erhalten wurden, also auch dann, wenn sie falsch oder überhaupt willkürlich angesetzt worden sind.

Zusammenfassend ist zu sagen: Die von H. u. I. empfohlene Methode MI liefert nur dann richtige Ergebnisse, wenn die in der obigen Gegenüberstellung angeführten Gewichte verwendet werden. Die in der Praxis übliche Methode MII ist ebenfalls streng richtig, hat aber gegenüber MI die Vorteile geringerer Rechenarbeit und größerer Anschaulichkeit, insbesondere was den Zusammenhang mit der Berechnung nach dem Verfahren für bedingte Beobachtungen betrifft.

Abbé Joseph Liesganig

zur 150. Wiederkehr seines Todestages

Herr Oberbaurat i. R. Ing. u. Dr. phil. Eduard Fluck machte die Redaktion auf den am 4. März l. J. zum 150. Male wiederkehrenden Todestag des bekannten Jesuitenpaters Joseph Liesganig aufmerksam, der als Mathematiker, Astronom, Geodät, Geograph und Ingenieur zu den führenden Persönlichkeiten des geistigen Lebens des 18. Jahrhunderts gehörte und in der Geschichte des österreichischen Vermessungswesens einen hervorragenden Platz