

Paper-ID: VGI_194907



Über die Bestimmung der Größe des Vermessungsbereiches der Niederen Geodäsie

Friedrich Hauer ¹

¹ *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **37** (1–3), S. 42–55

1949

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Hauer_VGI_194907,  
  Title = {{\U}ber die Bestimmung der Gr{o}{\ss}e des Vermessungsbereiches  
    der Niederen Geod{a}sie},  
  Author = {Hauer, Friedrich},  
  Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {42--55},  
  Number = {1--3},  
  Year = {1949},  
  Volume = {37}  
}
```



4. Zeitschrift für Vermessungswesen, VI/1877, Seiten 278—290: „Internationale Meterkonvention“.
5. C. F. W. Peters: „Zur Geschichte und Kritik der Toisen-Maßstäbe. Ein Beitrag zur definitiven Einordnung der auf das altfranzösische System begründeten Messungen in das metrische System“. Metronomische Beiträge Nr. 5. Herausgegeben von der kaiserl. Normal-Eichungs-Kommission, Berlin, 1885.
6. Mitteilungen des k. u. k. Militär-Geographischen Institutes, 1887 und 1888.
7. F. R. Helmer t: „Die Längengradmessung in 52^o Breite von Greenwich bis Warschau“, I. Band, Berlin, 1893.
8. Travaux et memoires du bureau international des poids et mesures, 1897, X, 1895, XI, 1902/XII.
9. G. Bigourdan: „Le systeme metrique des poids et mesures“, 1901.
10. Dr. Hans Löschner: „Geschichte der Längen- und Flächenmaße mit besonderer Berücksichtigung der österreichischen Verhältnisse“. Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst, Jahrgang XVIII-1912, Seite 770, 793, 812.
11. A. Broch: „Das Normalmaß der österreichischen Katastralvermessung vom Jahre 1817, dessen Vergleichung mit dem Meter und die damaligen Bestrebungen betreffend die Einführung des Metermaßes in Österreich“. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, XI/1913.
12. Die Astronomisch-Geodätischen Arbeiten des k. u. k. Militär-Geographischen Institutes in Wien, XXIII. Band, 1915.
13. Reichsamt für Landesaufnahme, Trigonometrische Abteilung: „Dreiecks- und Höhenmessung“, 1940.
14. Jordan-Egger t: Handbuch der Vermessungskunde, III. Band.
15. K. Ledersteger: „Die Kompensation des Maßstabfehlers des Reichsdreiecksnetzes“. Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, 1944/3.
16. K. Ledersteger: „Theoretische und numerische Studien zur genäherten Ableitung eines bestanschließenden Ellipsoides für Europa“, Wien, 1947. Aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathem.-naturwissensch. Klasse, Abteilung IIa, 156. Bd., 9. und 10. Heft.

Über die Bestimmung der Größe des Vermessungsbereiches der Niederen Geodäsie

Von F. Hauer, Wien

1

Die Größe des Vermessungsbereiches der Niederen Geodäsie wird durch Flächenstücke der Erdoberfläche gegeben, innerhalb deren die Erdoberfläche für Lagemessungen noch als Ebene betrachtet werden kann. Genauer ausgedrückt: es soll das Maß der Verzerrungen, wenn eine Ebene an Stelle der Erdkugel gesetzt wird, nicht größer sein, als die bei der Ausmessung, bzw. Darstellung dieses Bereiches auftretenden unvermeidlichen Messungsfehler. Aus dieser Definition heraus wurde nun die Größe des Bereiches mehrfach bestimmt. Jordan ¹⁾ gibt hierfür die Fläche von 1 Quadratmeile = 55 km² an; Nábauer ²⁾ glaubt, daß relative Längenverzerrungen von 1/50.000 vermieden

¹⁾ W. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, II. Bd., 3. Aufl., Stuttgart 1888, S. 2; ebenso in allen folgenden Auflagen.

²⁾ M. Nábauer, Vermessungskunde, 2. Aufl., Berlin 1932, S. 1.

werden, wenn die äußersten Punkte des Aufnahmegebietes nicht mehr als 40 km von einem das Gebiet der Länge nach teilenden Großkreis abstehen. Alle diese Daten sind ohne Mitteilung einer mathematischen Entwicklung angegeben. Mit der Angabe von Jordan deckt sich nahezu das Ergebnis einer Untersuchung von Hammer ³⁾, bei der die Vermessungsfläche der Niederen Geodäsie aus dem Vergleiche des vom Vermessungszentrum ausgehenden Großkreisbogens mit seiner Sehne, bzw. mit der orthographischen Projektion dieses Bogens auf den scheinbaren Horizont gewonnen wird und zu einer Größe von 50 km² führt. Hammer schließt aber weiter aus seiner Untersuchung, daß dieses Gebiet für viele Zwecke viel größer genommen werden kann und gibt als Beispiel den Radius eines kreisförmig begrenzten Vermessungsgebietes mit 10 km an. Eine geometrische Betrachtung, die im wesentlichen auf Hartner ⁴⁾ zurückgeht und bis in die Gegenwart immer wiederkehrt, wird anschließend kurz dargestellt.

In Bild 1 stelle M den Mittelpunkt des Vermessungsbereiches, NN den

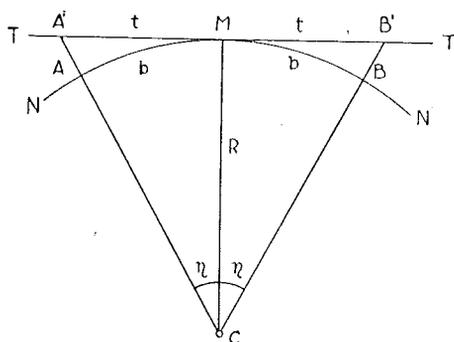


Bild 1

wahren und TT den scheinbaren Horizont des Punktes M vor; A' und B' seien die Zentralprojektionen der im wahren Horizont gelegenen Punkte A und B auf den scheinbaren Horizont; ferner bedeute R den Erdradius, η den Mittelpunktswinkel der im wahren Horizont gemessenen Bogen $AM = MB = b$, denen im scheinbaren Horizont die Tangentenlängen $A'M = MB' = t$ entsprechen.

Der Unterschied Δ zwischen der Länge des scheinbaren Horizonts $A'B'$ und derjenigen des wahren Horizonts AB wird dann durch

$$\Delta = 2(t - b) = 2R(\tan \eta - \eta)$$

gegeben. Hieraus folgt bei Entwicklung von $\tan \eta$ in eine Potenzreihe und bei Beachtung der Beziehung $b = R\eta$ mit Vernachlässigung von Gliedern 5. Ordnung

$$\Delta = \frac{2}{3} \frac{b^3}{R^2}$$

Wird nun die Differenz Δ so klein, daß man sie bei einer zeichnerischen Darstellung nicht mehr ersichtlich machen kann, so ist es gleichgültig, ob man auf den wahren oder auf den scheinbaren Horizont projiziert.

³⁾ E. Hammer, Lehrbuch der elementaren praktischen Geometrie, Bd. 1, Leipzig 1911.

⁴⁾ F. Hartner, Handbuch der Niederen Geodäsie, 4. Aufl., Wien 1872, S. 379—381.

Bezeichnet man mit \varkappa diejenige Größe, die gerade noch dargestellt bzw. dem Plane entnommen werden kann und ist 1 : n der Maßstab der zeichnerischen Darstellung, so muß also

$$\Delta \approx n \varkappa$$

sein, womit sich für den Radius desjenigen Gebietes, das noch als eben bezeichnet werden kann,

$$b \approx \sqrt[3]{\frac{3}{2} R^2 n \varkappa} \dots \dots \dots (1)$$

ergibt. Mit $R = 6370 \text{ km}$, $n = 2500$, $\varkappa = 0,02 \text{ mm}$ erhält man $b = 14,5 \text{ km}$ und damit als Fläche F des zugehörigen Gebietes $F = 660 \text{ km}^2$. Mit zunehmendem Maßstab verkleinert sich der Radius des Bereiches entsprechend Formel (1); er beträgt für $n = 1000$ rund $b = 10,7 \text{ km}$.

Die von den angeführten Autoren gegebenen Grenzbeträge für die Größe des Vermessungsbereiches der Niederen Geodäsie weichen erheblich voneinander ab. Es soll deshalb, bevor die einzelnen Angaben einer kritischen Wertung unterzogen werden, von Seite der Kartenentwurfslehre her versucht werden, eine Lösung des Problems zu finden.

2

Die Vermessungsarbeiten auf der innerhalb des Vermessungsbereiches als Kugel gedachten Erdoberfläche werden längentreu vorgenommen; dort, wo die Erdoberfläche von der Kugelgestalt abweicht, müssen die Messungen auf die Kugeloberfläche, also auf den wahren Horizont reduziert werden. Bildet man nun eine so vermessene sphärische Kalotte auf eine in ihrem Mittelpunkt berührende Ebene azimuthal⁵⁾ ab, so gibt es hierbei vielerlei Möglichkeiten. Zwei Abbildungen mögen im nachstehenden einem besonderen Studium unterzogen werden.

Im ersten Fall sollen sich die Mittelpunktsgroßkreise längentreu darstellen. Man erhält damit die schiefachsige längentreue azimuthale Kegelp Projektion. Da sie azimuthal ist, beträgt der Öffnungswinkel des Kegels 180° ; der Kegel ist somit in eine Ebene ausgeartet.

Die Abbildungsgleichungen dieser Projektion erhält man aus denen der allgemeinen polachsigen Kegelp Projektion in einfacher Weise. Führt man nämlich in der Ebene Polarkoordinaten r , Θ ein, bedeuten φ die Poldistanz und λ die geographische Länge auf der Erdkugel vom Radius R und ist n ein konstanter Faktor, so lauten die Abbildungsgleichungen letzterer Projektion

$$\Theta = n \lambda, \quad r = r(\varphi).$$

⁵⁾ Unter einer azimuthalen Abbildung soll eine solche verstanden werden, bei der die durch das Zentrum der Abbildung gehenden Großkreise in der Ebene in ein Geradenbüschel übergehen und bei der entsprechende Winkel zwischen diesen Großkreisen einerseits und den Geraden, in die sie abgebildet werden, andererseits, einander gleich sind.

Die durch das Abbildungszentrum gehenden Großkreise, also hier die Meridiane, werden längentreu abgebildet, wenn — in der Bezeichnungsweise nach Tissot ⁶⁾ — die Streckenverzerrung im Meridian

$$h = \frac{1}{R} \frac{dr}{d\varphi} = 1$$

ist, woraus sich, da das Bild des Kugelpoles mit dem Kartenzentrum zusammenfällt, $r = R \varphi$ ergibt. Soll nun die Abbildung auch azimutal sein, so muß der Faktor n gleich der Einheit gesetzt werden, womit $\Theta = \lambda$ wird. Führt man jetzt an Stelle der geographischen Polarkoordinaten φ, λ bei den schiefachsigen Kegelprojektionen die Polarkoordinaten η, ξ ein, so folgen ihre Abbildungsgleichungen mit

$$\Theta = \xi, \quad r = R \eta.$$

Die Untersuchung der schiefachsigen Kegelprojektionen bezüglich ihrer Eigenschaften läßt sich nun sehr einfach auf jene der polachsigen Abbildungen zurückführen, wenn man sich das Abbildungszentrum in einen Kugelpol verlegt denkt. Die Zentrumsgrößkreise gehen dann in die Meridiane über und die Azimute im Mittelpunkt der Abbildung decken sich mit den geographischen Längen im Kugelpol. Jene Kleinkreise, deren Ebenen auf dem gemeinsamen Durchmesser aller Zentrumsgrößkreise senkrecht stehen, und die im folgenden kurz Kleinkreise genannt werden, fallen dann mit denjenigen Parallelkreisen zusammen, deren Polabstand φ dem der Kleinkreise η gleich ist. Der Streckenverzerrung in den Meridianbildern h entspricht jene in den Bildern der Zentrumsgrößkreise h' , die durch

$$h' = \frac{1}{R} \frac{dr}{d\eta} = 1$$

gegeben wird; die Streckenverzerrung in den Parallelkreisbildern

$$k = \frac{1}{R} \frac{nr}{\sin \varphi}$$

geht in die Verzerrungsgröße

$$k' = \frac{1}{R} \frac{nr}{\sin \eta} = \frac{\eta}{\sin \eta}$$

in den Bildern der Kleinkreise über; aus der Verzerrung ζ des rechten Winkels zwischen den Bildern der Meridiane und der Parallelkreise bei den polachsigen Abbildungen ergibt sich die Verzerrung ζ' des rechten Winkels zwischen den Bildern der Zentrumsgrößkreise und der Kleinkreise bei den schiefachsigen Projektionen.

Da η eine kleine Größe ist, kann man den Nenner von k' entwickeln und erhält mit Vernachlässigung von Gliedern 4. Ordnung

$$k' = \eta \left(\eta - \frac{\eta^3}{3!} + \dots \right)^{-1} = 1 + \frac{\eta^2}{6}.$$

⁶⁾ L. Driencourt — J. Laborde, *Traité des projections des cartes géographiques*, Premier fascicule, Paris 1932.

Die Verzerrung der Einheitsstrecke $\varepsilon_{k'}$ in den Kleinkreisen beträgt somit

$$\varepsilon_{k'} = |1 - k'| = \frac{\eta^2}{6} \dots \dots \dots (2)$$

Wegen der Rotationssymmetrie der Abbildung stehen die Bilder der Zentrumsgrößkreise auf den Bildern der Kleinkreise senkrecht. Es ist daher der Winkel $\mathfrak{J}' = 0$ und die Halbachsen a und b der Tissotschen Indikatrix fallen mit den Werten h' und k' zusammen, und zwar, weil $k' > h'$ ist, wird

$$a = k', \quad b = h'.$$

Die Verzerrung der Einheitsstrecke $\varepsilon_{k'}$ ist also das Maximum der Streckenverzerrung für diese Projektion.

Schließlich folgt die Maximalwinkelverzerrung δ mit

$$\sin \frac{1}{2} \delta = \frac{a - b}{a + b} = \frac{\eta - \sin \eta}{\eta + \sin \eta}$$

woraus man mit Vernachlässigung von Größen 4. Ordnung

$$\delta = \frac{\eta^2}{6} \dots \dots \dots (3)$$

erhält.

Bei der zweiten Projektion, die besonders betrachtet werden soll, möge die Abbildung der vermessenen sphärischen Kalotte auf die in ihrem Mittelpunkt berührende Ebene so erfolgen, daß alle jene Kleinkreise, deren Ebenen auf dem durch das Abbildungszentrum gehenden Durchmesser senkrecht stehen, konzentrisch und längentreu in die zu ihnen parallel liegende Tangentialebene projiziert werden. Man hat es also mit der schiefachsigen orthographischen Projektion zu tun, deren Abbildungsgleichungen nach den obenstehenden Bemerkungen sofort angeschrieben werden können. Bezeichnet man mit x, y die rechtwinkligen Koordinaten der Bildpunkte, deren Ursprung im Abbildungszentrum liegen soll und von denen die positive y -Achse nach Norden, die positive x -Achse nach Westen zählt, so werden die Abbildungsgleichungen im Hinblick auf Bild 2 durch

$$x = R \sin \eta \sin \xi, \quad y = -R \sin \eta \cos \xi$$

gegeben. Aus ihnen erhält man die partiellen Differenzialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = R \cos \eta \sin \xi, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = -R \cos \eta \cos \xi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = R \sin \eta \cos \xi, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = R \sin \eta \sin \xi,$$

woraus sich die Streckenverzerrung in den Großkreisen durch das Zentrum der Abbildung M mit

$$h' = \frac{1}{R} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \cos \eta$$

und die Streckenverzerrung in den Kleinkreisen mit

$$k' = \frac{1}{R \sin \eta} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 1$$

ergibt, wie letzteres nach Voraussetzung auch sein muß.

Die Verzerrung der Einheitsstrecke in den Zentrumsgroßkreisen wird somit durch

$$\epsilon_{h'} = |1 - h'| = \frac{\eta^2}{2} \dots \dots \dots (4)$$

ausgedrückt, wenn Größen 4. Ordnung vernachlässigt werden.

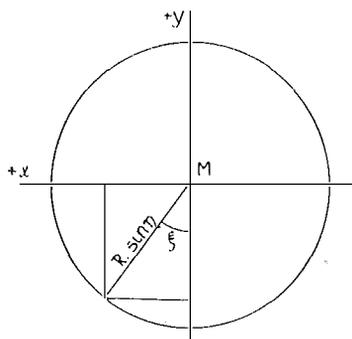


Bild 2

Da bei dieser Abbildung aus denselben Gründen wie bei der voranstehend untersuchten Projektion die Winkelverzerrung $\mathfrak{J}' = 0$ ist, so fallen auch hier die Halbmesser a und b der Tissotschen Indikatrix mit den Werten h' und k' zusammen, und zwar ist wieder, weil $k' > h'$ ist,

$$a = k', \quad b = h';$$

es ist somit die Verzerrung der Einheitsstrecke $\epsilon_{h'}$ die größte Streckenverzerrung dieser Abbildung.

Die Maximalwinkelverzerrung δ ergibt sich schließlich aus

$$\sin \frac{1}{2} \delta = \frac{1 - \cos \eta}{1 + \cos \eta}$$

bei Vernachlässigung von Größen 4. Ordnung mit

$$\delta = \frac{\eta^2}{2} \dots \dots \dots (5)$$

Die Ausbreitung der auf einer sphärischen Kalotte ausgeführten Vermessungen soll möglichst längentreu erfolgen können. Im Hinblick auf die zwei soeben untersuchten Abbildungen kann jedoch Längentreue nur in einer Kurvenschar erreicht werden. Wird das ausgemessene Netz, wie dies in der Praxis der Fall sein wird, vom Zentrum der Abbildung aus entsprechend den auf der Kugeloberfläche gemessenen Längen in die Ebene ausgebreitet, so kann dies auf vielfache Weise geschehen; da jedoch die Kugel in die Ebene nicht

verbiegbar ist, werden Verzerrungen unvermeidlich sein; ihr Maß wird durch die obenstehend abgeleiteten Werte $\varepsilon_{k'}$ und $\varepsilon_{h'}$, die die Extreme darstellen, begrenzt. Der größere von ihnen — es ist dies der durch Gleichung (4) gegebene Wert $\varepsilon_{h'}$ — stellt das Maximum der überhaupt bei der Abbildung durch eine sphärische Kalotte mit einer Schar längentreuer Kurven auftretenden Streckenverzerrung vor; aus ihm kann die Größe des Bereiches bestimmt werden.

3

Wäre nun die Vermessung an der Erdoberfläche längs eines Streifens vorgenommen worden, der sich zu beiden Seiten eines das Gebiet der Länge nach teilenden Großkreises erstreckt und der im folgenden kurz der teilende Großkreis genannt werden soll, so ist die Abbildung dieses Streifens in die Ebene, wobei der teilende Großkreis in eine Gerade übergehen soll, ebenfalls in mannigfacher Art möglich. Auch hier sollen zwei Fälle besonders untersucht werden.

Im ersten Fall mögen alle jene Großkreise, die auf dem teilenden Großkreis senkrecht stehen, bei der Abbildung des Streifens in die Ebene längentreu abgewickelt werden. Man hat es dann mit einer schiefachsigen Zylinderprojektion zu tun, und zwar mit der schiefachsigen quadratischen Plattkarte, die ident ist mit der schiefachsigen Abbildung nach Cassini-Soldner. Ihre Abbildungsgleichungen ergeben sich nach den im Abschnitt 2 angeführten Bemerkungen aus den Abbildungsgleichungen der polachsigen quadratischen Plattkarte

$$x = R \lambda, \quad y = R \varphi,$$

— bei der von dem als Ursprung gewählten Äquatorpunkt die positive y -Achse nach Norden, die positive x -Achse nach Westen weist —, mit

$$x = R \xi, \quad y = R \eta,$$

wenn nun der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des in die Ebene abzubildenden Streifens gewählt wird, die positive x -Achse in das Bild des teilenden Großkreises fällt und die positive y -Achse durch eine Rechtsdrehung der positiven x -Achse um 90° aus dieser hervorgeht. Die Winkel η und ξ , die an die Stelle der geographischen Koordinaten φ und λ getreten sind, stellen gewissermaßen schiefachsige geographische Koordinaten vor.

Da für alle Zylinderabbildungen

$$h = \frac{1}{R} \frac{d y}{d \varphi}, \quad k = \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{d x}{d \lambda}$$

ist, erhält man im Hinblick auf die Bemerkungen im Abschnitt 2 die Streckenverzerrungen bei der schiefachsigen quadratischen Plattkarte mit

$$h' = 1, \quad k' = \sec \eta.$$

Wie vorausgesetzt, ergibt sich Streckentreue in allen Großkreisen, die auf dem teilenden Großkreis senkrecht stehen; dagegen findet Streckenverzerrung in jenen Kleinkreisen statt, deren Ebenen parallel zur Ebene des teilenden Großkreises liegen.

Weil bei allen Zylinderprojektionen die Bilder der Meridiane auf den Bildern der Parallelkreise senkrecht stehen, ist die Verzerrung \mathfrak{J} des rechten Winkels, den die Meridiane und Parallelkreise miteinander einschließen, bei der Abbildung gleich Null; es ist also für die vorliegende Abbildung

$$\mathfrak{J}' = 0,$$

womit die Halbachsen a und b der Tissotschen Indikatrix wieder mit den Streckenverzerrungen h' und k' paarweise zusammen fallen, und zwar ist auch für diese Abbildung, da $k' > h'$ ist,

$$a = k', \quad b = h'.$$

Die Verzerrung der Einheitsstrecke $\varepsilon_{k'}$ wird also, wenn wieder Glieder 4. Ordnung vernachlässigt werden, mit

$$\varepsilon_{k'} = \frac{\eta^2}{2} \dots \dots \dots (6)$$

die größte Streckenverzerrung für diese Abbildung überhaupt.

Endlich erhält man noch die Maximalwinkelverzerrung δ aus

$$\sin \frac{1}{2} \delta = \frac{\sec \eta - 1}{\sec \eta + 1}$$

bei Vernachlässigung von Größen 4. Ordnung mit

$$\delta = \frac{\eta^2}{2} \dots \dots \dots (7)$$

Der zweite Kartenentwurf, der bei der Abbildung eines auf der Erdkugel vermessenen Streifens untersucht werden soll, möge dadurch entstehen, daß nun jene Kleinkreise, die zum teilenden Großkreis parallel liegen, streckentreu abgebildet werden. Man hat es also mit einer schiefachsigen Halbzylinderprojektion zu tun, und zwar mit der schiefachsigen halbzyklindrischen Abbildung nach Sanson-Flamsteed. Ihre Abbildungsgleichungen ergeben sich aus jenen der polachsigen Abbildung mit Rücksicht auf die eingeführten Bezeichnungen und unter Beibehaltung des bei der schiefachsigen Zylinderprojektion definierten Koordinatensystemes mit

$$x = R \xi \cos \eta, \quad y = R \eta.$$

Aus den partiellen Ableitungen dieser Abbildungsgleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -R \xi \sin \eta, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = R, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = R \cos \eta, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0$$

folgen die Ausdrücke für die Streckenverzerrung mit

$$h' = \sqrt{1 + \xi^2 \sin^2 \eta}, \quad k' = 1;$$

die zweite Gleichung sagt aus, daß die Bedingung der Streckentreue in den Kleinkreisen, die parallel zum teilenden Großkreis liegen, erfüllt ist.

Da bei dieser Abbildung, wie ein Blick auf Bild 3 lehrt und wie dies der Formel

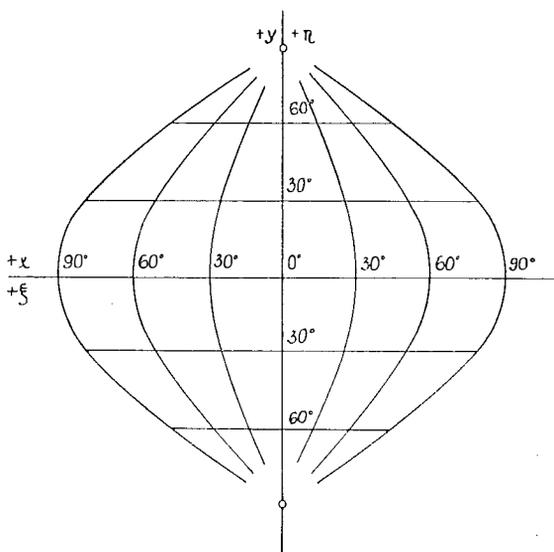


Bild 3

$$\tan \mathfrak{J}' = \frac{\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} = \frac{\partial x}{\partial \eta} : \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

d. i.

$$\tan \mathfrak{J}' = -\xi \sin \eta$$

sofort entnommen werden kann, im allgemeinen $\mathfrak{J}' \neq 0$ ist, so fallen die Halbachsen a und b der Tissotschen Indikatrix nicht in die Richtungen der Streckenverzerrungen h' und k' . Um daher die Maximalstreckenverzerrung ermitteln zu können, ist noch die Berechnung dieser Halbachsen erforderlich. Man erhält nach Bestimmung der Flächenverzerrung σ mit Hilfe der Formel $\sigma = h' k' \cos \mathfrak{J}'$, also

$$\sigma = \sqrt{1 + \xi^2 \sin^2 \eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \mathfrak{J}'}} = 1,$$

zunächst aus der Doppelgleichung

$$(a \pm b)^2 = h'^2 + k'^2 \pm 2 \sigma$$

die Summe und die Differenz der beiden Halbachsen mit

$$a + b = \sqrt{4 + \xi^2 \sin^2 \eta}, \quad a - b = \xi \sin \eta,$$

woraus sich die Halbachsen selbst mit

$$a = \frac{1}{2} (\sqrt{4 + \xi^2 \sin^2 \eta} + \xi \sin \eta), \quad b = \frac{1}{2} (\sqrt{4 + \xi^2 \sin^2 \eta} - \xi \sin \eta)$$

ergeben. Entwickelt man nach Potenzen von η , so bekommt man die beiden Reihen

$$a = \frac{1}{2} \left\{ 2 \left[1 + \frac{\xi^2}{8} (\eta - \dots)^2 \right] + \xi (\eta - \dots) \right\}, \quad b = \frac{1}{2} \left\{ 2 \left[1 + \frac{\xi^2}{8} (\eta - \dots)^2 \right] - \xi (\eta - \dots) \right\}$$

und daraus schließlich

$$a = 1 + \frac{\xi \eta}{2} + \frac{\xi^2 \eta^2}{8} - \dots, \quad b = 1 - \frac{\xi \eta}{2} + \frac{\xi^2 \eta^2}{8} + \dots$$

Die Maximalverzerrung der Einheitsstrecke für diese Abbildung wird somit bei Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung durch

$$\epsilon_a = \frac{\xi \eta}{2} \quad \dots \quad (8)$$

gegeben.

Die Maximalwinkelverzerrung δ folgt nun einfach aus

$$\sin \frac{1}{2} \delta = \frac{\xi \sin \eta}{\sqrt{4 + \xi^2 \sin^2 \eta}}$$

nach Potenzreihenentwicklung mit

$$\delta = \xi \eta. \quad \dots \quad (9)$$

Die Ausbreitung eines zu beiden Seiten eines Großkreises vermessenen Gebietsstreifens von der Kugel in die Ebene ist nun wieder auf viele Arten möglich. Wird sie so vorgenommen, daß die Darstellung der auf der Erdkugel ermittelten Längen vom teilenden Großkreis aus längentreu erfolgt, ohne daß weitere Vorschriften gemacht werden, so werden mit zunehmender Entfernung von diesem Großkreis Verzerrungen unvermeidlich sein. Ihre Größe wird sich zwischen den beiden bei der Untersuchung der voranstehenden Abbildungen ermittelten Extremen halten. Während jedoch die Maximalverzerrung der Einheitsstrecke bei den Abbildungen einer sphärischen Kalotte klein von zweiter Ordnung ist, zeigt sich bei den Kartenentwürfen des längs eines Großkreises sich erstreckenden Gebietes — wenn die Größe ξ nicht beschränkt wird — nur der kleinere der beiden Werte, nämlich die nach Gleichung (6) bei der Abbildung durch eine schiefachsige quadratische Plattkarte errechnete Maximalverzerrung der Einheitsstrecke ϵ_k , gleich der größten Verzerrung der Einheitsstrecke bei der Abbildung einer sphärischen Kalotte. Der größere Wert, nämlich die durch Gleichung (8) gegebene Maximalverzerrung der Einheitsstrecke ϵ_a bei der schiefachsigen Abbildung nach Sanson-Flamsteed ist dagegen nur von erster Ordnung klein.

Nur dann, wenn die Längenausdehnung ξ des Streifens der Breitenerstreckung η desselben gleich wäre, würde sich auch die Maximalverzerrung der Einheitsstrecke ϵ_a als klein von zweiter Ordnung erweisen. In diesem Falle aber wäre der Streifen zu einer Figur zusammengeschrumpft, die im nachstehenden als sphärisches Quadrat bezeichnet werden soll; die Länge seiner Mittellinien käme dann dem Durchmesser der sphärischen Kalotte gleich. Aber selbst in diesem Falle würde sich eine Maximalwinkelverzerrung δ ergeben, die doppelt so groß wäre, wie jene bei der Abbildung der sphärischen Kalotte. Die

Begründung hierfür ist in dem Umstand gelegen, daß die Ausdehnung des sphärischen Quadrates größer ist als die der sphärischen Kalotte ⁷⁾.

Nur für den Fall, daß die in der Natur ausgeführten Messungen so kartiert würden, daß jeweils von dem das Gebiet teilenden Großkreis weg in Abständen, die kleiner sein müßten, als die Breite des Streifens, senkrechte Ordinaten errichtet und weiter von diesen aus die Messungsergebnisse aufgetragen würden, also kurz gesagt, wenn man die Darstellung durch eine schiefachsige quadratische Platkarte ausführen würde, blieben die Längenverzerrungen auch für einen Gebietsstreifen in der Größenordnung des für eine sphärische Kalotte ermittelten Maximalbetrages. In diesem Falle würden die Verzerrungen längs aller zum teilenden Großkreis parallelen Kleinkreise gleichmäßig aufgeteilt. Man hätte es also gewissermaßen mit fortgesetzt längs des teilenden Großkreises aneinandergfügten sphärischen Kalotten zu tun. Dreiecksketten an den Rändern eines solchen Streifens könnten daher ohne Längenreduktion nicht mehr kartiert werden.

Sollen die Verzerrungen, wenn längs eines Streifens vermessen wird, nicht größer sein als innerhalb einer sphärischen Kalotte, so muß der Ausdruck (8) für die Maximalstreckenverzerrung stets konstant von zweiter Ordnung bleiben. Jeder Zunahme der Längenerstreckung ξ des Vermessungsbereiches muß eine entsprechende Abnahme der Breitenausdehnung η desselben entsprechen. Immer wird aber die Maximalwinkelverzerrung δ , wie ein Vergleich der Formel (9) mit den Ausdrücken (5) bzw. (7) zeigt, doppelt so groß bleiben, wie bei der Vermessung einer sphärischen Kalotte ⁸⁾.

4

In der Niederen Geodäsie gilt eine Aufnahmegenaugigkeit von 1/20.000 seit langem als erstrebenswertes Ziel ⁹⁾; sie wird bisher im allgemeinen nicht

⁷⁾ Schreibt man jedoch diesem sphärischen Quadrat eine sphärische Kalotte ein, die die Seiten des sphärischen Quadrates berührt, so wird der Maximalbetrag des Produktes $\xi \eta$, wie leicht einzusehen ist, auf den Wert $\frac{1}{2} \xi \eta$ verkleinert, wodurch die Maximalwinkelverzerrung auf jenen Betrag herunter geht, den sie auch bei der sphärischen Kalotte einnimmt. In diesem Falle würde sich die Maximalverzerrung der Einheitsstrecke auf $\frac{1}{4} \xi \eta$ verringern.

⁸⁾ Auch im Falle eines Streifens ließe sich die Maximalwinkelverzerrung auf den Betrag $\frac{1}{2} \xi \eta$ herunterdrücken, nämlich dann, wenn in das sogenannte sphärische Rechteck, das den hier betrachteten Streifen begrenzt, eine sphärische elliptische Kalotte von solcher Größe eingeschrieben würde, daß sie die Seiten des sphärischen Rechteckes berührt. Die Maximalverzerrung der Einheitsstrecke würde sich auch in diesem Falle sodann auf $\frac{1}{4} \xi \eta$ verkleinern.

⁹⁾ Man vgl. hierzu die „Äußerung des k. k. Triangulierungs- und Kalkülbureaus zu den mit dem Erlasse des k. k. Finanzministeriums vom 2. Juni 1909, Z. 19912, eingeholten Gutachten, betreffend die Neutriangulierung des Gebietes der im Reichsrate vertretenen Königreiche und Länder.“

erreicht, wie z. B. die für Neuvermessungen in Österreich auf Grund der Auswertung eines außerordentlich umfangreichen Messungsmaterials aufgestellten Fehlergrenzen¹⁰⁾ zeigen. Auch bei Polygonzügen mit Zwangszentrierung und Seitenmessung mit Basislatten für Entfernungsmessung mit Hilfe des parallaktischen Winkels ist es bisher noch nicht gelungen, die Genauigkeit von 1/20.000 zu erreichen. Desgleichen erscheint auch die Darstellungsgenauigkeit in den Plänen, da man den mittleren Fehler eines sorgfältig kartierten Punktes mit etwa $\pm 0,05 \text{ mm}$ annehmen muß, bei Blattabmessungen von 1 m mal 1 m mit 1/20.000 begrenzt, selbst wenn von der Veränderlichkeit des Planmaterials ganz abgesehen wird.

Werden daher für den Vermessungsbereich der Niederen Geodäsie relative Längenverzerrungen von höchstens 1/50.000 zugelassen, so ist durch diese Festsetzung eine gewiß recht enge Grenze gezogen. Sie ist von einem solchen Ausmaß, das der bei den Triangulierungen niederer Ordnung erreichten Genauigkeit ungefähr entspricht¹¹⁾. Führt man den Wert 1/50.000 in die Gleichung (4) ein, so kann dadurch der Halbmesser b jener Kreisfläche berechnet werden, bis zu deren Rand die Erdkugel für Lagemessungen noch als eben betrachtet werden kann. Mit

$$\varepsilon_{h' \text{ max}} = \frac{1}{50.000} = \frac{\eta^2}{2}$$

erhält man aus

$$b = R \eta = \sqrt{\frac{1}{25.000}} \cdot 6370 \text{ km}$$

den Halbmesser b mit

$$b_{\text{Kalotte}} = 40 \text{ km.} \quad \dots \dots \dots (10)$$

Die zugehörige Maximalwinkelverzerrung δ ergibt sich nach Gleichung (5) im Winkelmaße mit

$$\delta = \frac{\eta^2}{2} \rho'' = \frac{206.265''}{50.000},$$

d. i. mit

$$\delta_{\text{Kalotte}} = 4''. \quad \dots \dots \dots (11)$$

Mit dem Radius $b = 40 \text{ km}$ errechnet sich der Flächeninhalt des Vermessungsbereiches mit rund

$$F_{\text{Kalotte}} = 5000 \text{ km}^2$$

und daraus sein sphärischer Exzeß mit rund 25''. In diese Kreisfläche von 5000 km² lassen sich sechs gleichseitige Dreiecke mit 40 km langen Seiten, einem Flächeninhalt von je rund 700 km² und einem sphärischen Exzeß von je 3'',5 einschreiben; auf einen Dreieckswinkel entfällt demnach ein sphärischer Exzeß von 1'',2.

¹⁰⁾ Dienstvorschrift Nr. 14 des Österr. Bundesvermessungsdienstes, Wien 1937.

¹¹⁾ Man vgl. hierzu z. B. die „Mitteilungen des Reichsamtes für Landesaufnahme“, Berlin 1935, S. 20; 1936, S. 179; 1940, S. 239/40.

Das Maximum der Verzerrung der Einheitsfläche $\epsilon_{\sigma \max} = |1 - \sigma_{\max}|$ folgt für $h' = \cos \eta$, $k' = 1$, $\mathfrak{J}' = 0$ aus der Formel $\sigma = h' k' \cos \mathfrak{J}'$ mit

$$\epsilon_{\sigma \max} = \frac{\eta^2}{2};$$

es ist also ebenso groß wie das Maximum der Verzerrung der Einheitsfläche, das mit 1/50.000 begrenzt erscheint.

Will man nun längs eines sich zu beiden Seiten eines Großkreises erstreckenden Streifens vermessen und dabei ebenfalls relative Längenverzerrungen größer als 1/50.000 vermeiden, so muß mit Beachtung des Ergebnisses (10) für den Halbmesser einer sphärischen Kalotte das Produkt aus Längen- und Breitenausdehnung konstant sein. Im Hinblick auf Formel (8) ergeben sich daher die in der angeschlossenen Tabelle zusammengestellten Werte.

Ausdehnung eines Geländestreifens
mit relativen Längenverzerrungen kleiner 1/50.000

| | | | | | | | | |
|---------------------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Breite in <i>km</i> | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 |
| Länge in <i>km</i> | 80 | 92 | 107 | 128 | 160 | 213 | 320 | 640 |

Wie ein Vergleich der Formel (9) mit der Gleichung (5) zeigt, wird die Maximalwinkelverzerrung δ mit Rücksicht auf das Ergebnis (11) hierbei den Betrag

$$\delta_{\text{Streifen}} = 8''$$

erreichen.

5

Vergleicht man nun die Abmessungen für den Vermessungsbereich der Niederen Geodäsie auf Grund der im Abschnitt 1 zitierten Arbeiten mit den in der vorliegenden Untersuchung erzielten Resultaten, so ist folgendes zu sagen:

1. Die Begrenzung des Vermessungsbereiches nach Jordan ist viel zu eng gehalten. Aus der Fläche von 1 Quadratmeile = 55 km^2 errechnet sich deren Radius mit 4,2 km . Für eine Kalotte von diesem Radius beträgt die maximale Verzerrung der Einheitsstrecke nach Formel (4)

$$\epsilon_{\max} = \frac{\eta^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{4,2}{6370} \right)^2,$$

d. i. nur

$$\epsilon_{\max} = 1/4,600.000.$$

Die Maximalwinkelverzerrung δ wird nach Formel (5)

$$\delta = \frac{\eta^2}{2} \rho'' = \frac{206.265''}{4,600.000}$$

mit

$$\delta = 0'',045$$

gegeben.

Die auf Grund einer derart engen Begrenzung des Vermessungsgebietes der Niederen Geodäsie auftretenden Maximalbeträge für die Strecken- und

Winkelverzerrung wären somit weit kleiner als die bei den modernsten Basismessungen und den besten Triangulierungen 1. Ordnung festgestellten Fehler.

2. Auch der von Hammer für viele Zwecke als zulässig angeführte Wert von 10 km für den Radius des Vermessungsgebietes ist noch viel zu klein. Die Maximalstreckenverzerrung würde sich aus diesem Wert mit weniger als 1/800.000 ergeben. Abgesehen davon werden, wie dies noch in Punkt 4 ausgeführt wird, nur durchschnittliche Verzerrungen an Stelle der Maximalverzerrungen ermittelt und die Verzerrungen senkrecht zu den vom Vermessungszentrum ausgehenden Großkreisen unbeachtet gelassen.

3. Die Behauptung Näubauers, daß relative Längenverzerrungen von 1/50.000 vermieden werden, wenn die äußersten Punkte des Aufnahmegebietes nicht mehr als 40 km von einem das Gebiet der Länge nach teilenden Großkreis abstehen, ist nach den im Abschnitt 3 gefundenen Erkenntnissen nicht mehr haltbar. Es werden jedoch relative Längenverzerrungen dieser Größe vermieden, wenn die äußersten Punkte des Aufnahmegebietes nicht mehr als 40 km vom Mittelpunkt desselben entfernt sind, wenn also das Aufnahmegebiet die Form einer sphärischen Kalotte hat, wie aus den Berechnungen des Abschnittes 4 hervorgeht.

Soll ein Gebiet von Streifenform aufgenommen werden, so sind seine Abmessungen — wenn relative Längenverzerrungen von 1/50.000 vermieden werden sollen — durch die in obiger Tabelle zusammengestellten Breiten- und Längenwerte beschränkt. Hierbei erreicht jedoch die Maximalwinkelverzerrung den doppelten Betrag derjenigen, die bei der Vermessung einer sphärischen Kalotte gleicher Ausdehnung auftritt.

4. Die im Bild 1 gegebene Darstellung nach Hartner stellt eine Zentralprojektion der Erdkugel dar, die jedoch gewiß nicht stattfindet, wenn eine an der Erdoberfläche ausgeführte Vermessung in die im Mittelpunkt des Aufnahmegebietes berührende Tangentialebene längentreu ausgebreitet wird. Die ausgeführte Untersuchung ist unvollständig, denn es müßte die Verzerrung nicht nur in den vom Mittelpunkt ausgehenden Radien bestimmt werden, sondern auch in jenen Richtungen, die auf diese Radien senkrecht stehen. Durch die Ermittlung der Größe $\Delta = 2(t - b)$ wird nur eine durchschnittliche Verzerrung, nicht aber deren Maximum bestimmt. Immerhin stellt Hartners Betrachtung einen ersten Versuch dar, das Problem von kartographischer Seite her zu behandeln.

Zur Ausgleichung trigonometrischer Höhenmessungen nach vermittelnden Beobachtungen

Von Dr. techn. Josef L i t s c h a u e r, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

Vorbemerkung

In Nr. 1—2 aus 1943 der „Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst“ (Mitteilungen des Reichsamtes für Landesaufnahme) ist unter dem