



Über ein graphisches Verfahren zum gegenseitigen Einpassen von Luftbildaufnahmen

Josef Krames ¹

¹ *korrespondierendes Mitglied der österr. Akademie der Wissenschaften, Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **37** (1–3), S. 13–29

1949

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Krames_VGI_194905,  
  Title = {{\U}ber ein graphisches Verfahren zum gegenseitigen Einpassen von  
    Luftbildaufnahmen},  
  Author = {Krames, Josef},  
  Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {13--29},  
  Number = {1--3},  
  Year = {1949},  
  Volume = {37}  
}
```



Über ein graphisches Verfahren zum gegenseitigen Einpassen von Luftaufnahmen

Von Josef K r a m e s, Wien, korrespondierendes Mitglied der
österr. Akademie der Wissenschaften

(Mit 6 Textabbildungen)

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

Im Folgenden wird ein neues graphisches Verfahren zur Bestimmung der gegenseitigen Orientierung von Luftaufnahmen abgeleitet, das in mehrfacher Hinsicht gegenüber den bisher verwendeten Orientierungsmethoden den Vorzug verdienen dürfte. Wir stützen uns dabei auf die vom Verfasser entwickelte Theorie der „*gefährlichen Flächen*“ und der mit ihnen verknüpften „*gefährlichen Raumgebiete*“¹⁾. Es gelingt damit, vorerst die der auszuführenden Bündelverlagerung zugeordnete „*Grundfläche*“ dieser Raumgebiete auf einfachem zeichnerischen Wege festzulegen, womit die *Verhältnisse der Orientierungsunknownten* bereits eindeutig bestimmt sind²⁾. Das Einstellen der richtigen Orientierung kann hierauf im wesentlichen mittels einer *linearen Interpolation* erfolgen. Dabei ergibt sich zugleich ein *Kriterium für die Güte der ausgeführten Einpassung* zweier Luftbilder. Eine solche, über das Verschwinden aller beobachteten γ -Parallaxen hinausgehende Kontrolle ist bis jetzt noch nirgends angegeben worden.

Nr. 1. Wir betrachten zunächst zwei (z. B. durch Luftaufnahmen eines Geländes bestimmte) Bündel zugeordneter Zielstrahlen $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ und wählen für die Darstellung des Raummodells den Nullpunkt eines rechtwinkligen Achsenkreuzes (*Rechtssystem*) im linken Zentrum $\mathbf{0}_1$, die positive x -, y -, bzw. z -Achse in der Kernachse (Aufnahmebasis) $\mathbf{0}_1 \rightarrow \mathbf{0}_2$, nach rückwärts, bzw. nach oben gerichtet. Damit sind zugleich die Richtungen der *positiven Drehungen* um die Koordinatenachsen, bzw. um die dazu parallelen Achsen durch $\mathbf{0}_2$ festgelegt. Die Winkel dieser Drehungen seien wie üblich mit $d\omega_1, d\omega_2$ (Querneigungen oder Verkippungen), $d\varphi_1, d\varphi_2$ (Verschwenkungen), $d\kappa_1, d\kappa_2$ (Verkantungen) bezeichnet, ferner die bei den Verschiebungen in den Achsenrichtungen durchmessenen Strecken mit $db_{x_1}, db_{x_2}, db_{y_1}, db_{y_2}, db_{z_1}, db_{z_2}$. Werden diese Orientierungsgrößen so klein vorausgesetzt, daß die Glieder zweiter und höherer Ordnung der bekannten Fehlergleichung vernachlässigt werden dürfen, dann erzeugt die — durch eine gegebene Wertverbindung dieser Größen bestimmte — Bündelverlagerung in einem Punkt \mathbf{P} mit den Koordinaten x, y, z die Parallaxe:

$$dp_y = -\frac{y^2 + z^2}{z} (d\omega_1 - d\omega_2) - \frac{y}{z} dz + dy, \quad (1)$$

¹⁾ Vgl. u. a. J. K r a m e s, Genauigkeitssteigerung der gegenseitigen Einpassung von Luftaufnahmen auf Grund noch nicht beachteter Bedingungsgleichungen zwischen den Orientierungsgrößen, Österr. Z. f. Verm. 36 (1948), S. 25—45, 56—61, Nr. 3 und Fußn. 6, wo auch die übrigen Arbeiten über diese Gegenstände angeführt sind.

²⁾ J. K r a m e s, a. a. O., S. 30, Fußn. 11.

wobei für dy und dz zu setzen ist:

$$\left. \begin{aligned} dy &= x dx_1 - (x - b) dx_2 + db_{y1} - db_{y2}, \\ dz &= -x d\varphi_1 + (x - b) d\varphi_2 + db_{z1} - db_{z2} \end{aligned} \right\}; \quad (2)$$

hierin gibt b die Basislänge an. In dieser Form können diese Gleichungen vorerst noch gemeinsam für das „Winkelverfahren“ und den „Folgebildanschluß“ verwendet werden.

Schneiden sich zwei zugeordnete Strahlen $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ ursprünglich in einem Punkt \mathbf{P} , dann geben dy und dz — wie leicht nachzuweisen wäre — die in der y -, bzw. z -Richtung gemessenen Parallaxen von $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ an, welche zufolge der mit $dx_1, dx_2, db_{y1}, db_{y2}$, bzw. mit $d\varphi_1, d\varphi_2, db_{z1}, db_{z2}$ bestimmten Bündelbewegungen entstehen. Weil diese Werte von dy und dz zugleich für alle Punkte der durch \mathbf{P} gelegten Normalebene v_i zur Basis gelten, läßt sich so auch umgekehrt die Richtigkeit der Gleichungen (1) und (2) bestätigen.

Nr. 2. Ferner ergeben sich folgende einfache geometrische Beziehungen: Wird die Parallaxe zugeordneter Zielstrahlen unmittelbar am Raummodell gemessen und setzt man unter der Annahme

$$d\omega_1 \neq d\omega_2: \quad (3)$$

$$dp_y = S (d\omega_1 - d\omega_2), \quad (4)$$

wobei S eine geeignet ang. nommene Strecke bedeutet, sowie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{-dz}{d\omega_1 - d\omega_2} &= \frac{d\varphi_1 - d\varphi_2}{d\omega_1 - d\omega_2} x + \frac{b d\varphi_2 - db_{z1} + db_{z2}}{d\omega_1 - d\omega_2} = Y \\ \frac{dy}{d\omega_1 - d\omega_2} &= \frac{dx_1 - dx_2}{d\omega_1 - d\omega_2} x + \frac{b dx_2 + db_{y1} - db_{y2}}{d\omega_1 - d\omega_2} = Z \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

so folgt aus (1) und (2):

$$\frac{y}{z} = - \frac{z - (Z - S)}{y - Y}. \quad (6)$$

Dies besagt, daß *innerhalb jeder Ebene v_i ($\dot{x} = x_i$) in allen Punkten \mathbf{P} (y, z) eines Kreises \mathbf{c} dieselbe Parallaxe $dp_y = S (d\omega_1 - d\omega_2)$ erzeugt wird* (siehe Abb. 1). Dieser Kreis \mathbf{c} schneidet die Kernachse ($y = 0, z = 0$) in Punkt \mathbf{B}_i ($x_i, 0, 0$) und enthält auch den Punkt \mathbf{C} mit den Koordinaten $Y, Z - S$ als zweiten Endpunkt des von \mathbf{B}_i ausgehenden Durchmessers.

Derartige Kreise \mathbf{c} sind in allen Normalebene v_i zur Basis vorhanden; sie erfüllen in ihrer Gesamtheit *die Fläche Ω^S , in deren sämtlichen Punkten bei der vorliegenden Bündelverlagerung dieselbe Parallaxe $dp_y = S (d\omega_1 - d\omega_2)$ hervorgerufen wird.* Die Gleichung von Ω^S ergibt sich aus (6) durch Einsetzen von Y, Z gemäß (5) und erhält im allgemeinen die Form:

$$A (y^2 + z^2) + B xy + C xz + D y + (E - S) z = 0 \quad (7)$$

Demnach ist Ω^S eine sogenannte *orthogonale Regelfläche zweiten Grades* mit einer

Haupterzeugenden \mathbf{e}_s in der Kernachse³⁾, d. h. sie enthält \mathbf{e}_s und wird von den dazu normalen Ebenen v_i nach Kreisen geschnitten. Die zweite in der xy -Ebene ($z = 0$) befindliche Erzeugende \mathbf{f} von Ω^S besteht aus den Punkten $\mathbf{F}_i(x_i, Y, 0)$, in denen die Kreise \mathbf{c} die Geraden $x = x_i, z = 0$ zum zweiten Male schneiden.

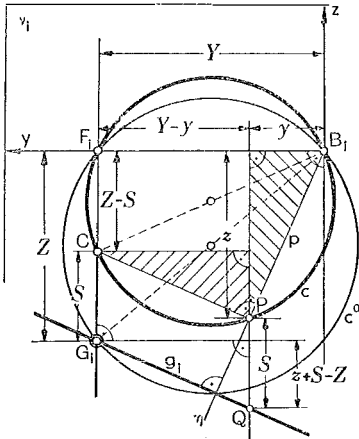


Abb. 1

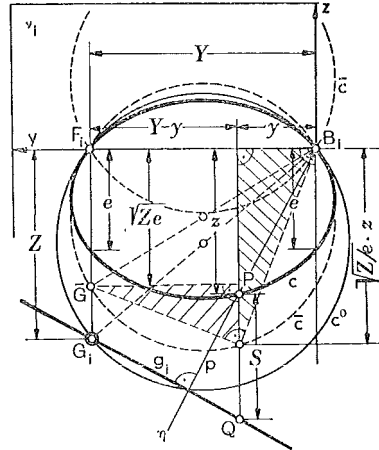


Abb. 2

Nr. 3. Die zu den verschiedenen Werten von S gehörigen ∞^1 Flächen Ω^S dieser Art bilden nach Gl. (7) ein „lineares Büschel“, mit dem die vollständige räumliche Verteilung der verschiedenen Parallaxenwerte sehr anschaulich dargestellt wird⁴⁾. Alle diese Flächen Ω^S haben die Erzeugenden \mathbf{e}_s und \mathbf{f} gemeinsam und sind wegen Gl. (7), in der S bloß beim linearen Glied vorkommt, paarweise zentrisch ähnlich. Erteilt man S insbesondere jene beiden Längen l und $-l$, für die $\pm l$ ($d\omega_1 - d\omega_2$) gleich dem mittleren Fehler $\pm \mu$ der Parallaxenmessung ist, so begrenzen die entsprechenden Flächen Ω^-, Ω^+ des Büschels das „gefährliche Raumgebiet“, in dessen sämtlichen Punkten zufolge der betrachteten Bündelverlagerung eine zwischen den Grenzen $-\mu < dp_y < +\mu$ eingeschlossene (also nicht mehr feststellbare) Parallaxe auftritt.

Die zu $S = 0$ gehörige „Grundfläche“ Ω^0 des Büschels besteht insbesondere aus allen Raumpunkten, deren Zielstrahlenpaare in Schnittlage bleiben ($dp_y = 0$). Ω^0 enthält u. a. alle Punkte \mathbf{G}_i mit den Koordinaten x_i, Y, Z (siehe Gl. 5); denn

³⁾ Wegen anderer Ableitungen dieses Ergebnisses siehe J. K r a m e s, Über die „gefährlichen Raumgebiete“ der Luftphotogrammetrie, Photograph. Korr. 84 (1948), S. 1—16, oder J. K r a m e s, Parallaxeneigenschaften zweier Sehstrahlbündel, Sitzgsber. öst. Akad. d. Wiss., math.-nat. IIa, 156 (1947), S. 233—246. — Eine ähnliche Zerlegung der Fehlergleichung wie die in Gl. (1), (2) des obigen Textes angegebene verwendet auch G. P o i v i l l i e r s, Formation de l'image plastique dans les appareils de restitution, C. R. Ac.Sc. Paris, t. 226 (1948), p. 1770—1772, p. 1938—1941.

⁴⁾ Siehe insbesondere J. K r a m e s, Die Bedeutung der „gefährlichen Raumgebiete“ für das optisch-mechanische Orientieren von Luftaufnahmen, Photograph. Korr. 84 (1948), S. 41—50, und J. K r a m e s, Über die Flächen konstanter Bildparallaxe und die zugehörigen „gefährlichen Raumgebiete“, Anzeiger d. österr. Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl. 85 (1948), S. 8—14, Nr. 3.

für $y = Y$, $z = Z$ folgt aus (6): $S = 0$. In jeder Ebene v_i ($x = \text{konst.} = x_i$) liegt genau ein solcher Punkt, wir nennen ihn den „Grundpunkt“ von v_i . Er ist der Gegenpunkt von \mathbf{B}_i ($x_i, 0, 0$) auf dem Schnittkreis \mathbf{c}^0 von v_i mit Ω^0 und wird nach Gl. (6) auch erhalten, wenn man den Punkt \mathbf{C} ($x_i, Y, Z - S$) in der z -Richtung durch die Strecke S verschiebt (s. Abb. 1). Anders ausgedrückt:

I) Wird ein Modellpunkt \mathbf{P} , in dem die Parallaxe dp_y beträgt, parallel zur z -Achse durch die Strecke $S = dp_y \cdot (d\omega_1 - d\omega_2)$ verschoben und legt man durch den so gewonnenen Punkt \mathbf{Q} die Normale \mathbf{g}_i zur Geraden $\mathbf{p} = \mathbf{B}_i \rightarrow \mathbf{P}$ (also die Normale zur Kernebene η des Punktes \mathbf{P}), so enthält diese Gerade \mathbf{g}_i stets den Grundpunkt \mathbf{G}_i der durch \mathbf{P} gelegten Normalebene v_i zur Basis (Abb. 1).

Aus dem Umstand, daß die Ausdrücke (5) für Y, Z in x linear sind (und aus den geometrischen Eigenschaften der Grundfläche Ω^0) folgt ferner:

II) Die Grundpunkte \mathbf{G}_i aller Normalebenen v_i zur Basis liegen stets auf einer Raumgeraden \mathbf{g} , nämlich auf einer weiteren Haupterzeugenden $\mathbf{e}_t = \mathbf{g}$ von Ω^0 , die zu \mathbf{e}_s im allgemeinen windschief ist⁵⁾.

Die Gleichungen (5) stellen bereits die Normalriss \mathbf{g}' , \mathbf{g}'' der Geraden \mathbf{g} auf die xy -, bzw. xz -Ebene dar. Da jede Normalebene v_i zur Basis von der Kernachse \mathbf{e}_s und der Raumgeraden $\mathbf{g} = \mathbf{e}_t$ in zwei Gegenpunkten \mathbf{B}_i , \mathbf{G}_i des Schnittkreises \mathbf{c}^0 von v_i mit Ω^0 durchschnitten wird, erkennt man schließlich:

III. Mit den Grundpunkten $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ zweier verschiedener Ebenen v_1, v_2 ist die räumliche Lage der Haupterzeugenden $\mathbf{e}_t = \mathbf{g}$ von Ω^0 , also auch die Grundfläche selbst eindeutig bestimmt.

Nr. 4. Werden die Parallaxen zugeordneter Zielstrahlen $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ auf den (angenähert) in der Ebene $z = -f$ befindlichen Bildplatten gemessen, wobei f die Brennweite der Aufnahmekammern angibt, dann erhält man aus der Bildparallaxe dp^0 zweier Strahlen $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ ihre räumliche Parallaxe dp_y gemäß:

$$dp_y = \frac{z}{f} dp^0. \quad (8)$$

Setzt man wieder

$$dp^0 = S^0 (d\omega_1 - d\omega_2), \quad (9)$$

worin S^0 eine geeignet gewählte Strecke und $d\omega_1 \neq d\omega_2$ sein soll (vgl. Gl. 3), so folgt aus (1), (2) und (4):

$$\frac{y}{z} = - \frac{\left(1 + \frac{S^0}{f}\right) z - Z}{y - Y}. \quad (10)$$

Um dies geometrisch zu deuten, betrachten wir innerhalb einer Ebene v_i ($x = x_i$) neben dem Basispunkt \mathbf{B}_i ($x_i, 0, 0$) und dem Grundpunkt \mathbf{G}_i (x_i, Y, Z) — siehe Gl. (5) — nochmals den Kreis \mathbf{c}^0 über dem Durchmesser $\mathbf{B}_i \mathbf{G}_i$ (Abb. 2). Jede Ellipse \mathbf{c} , welche \mathbf{c}^0 in den beiden Punkten \mathbf{B}_i und \mathbf{F}_i ($x_i, Y, 0$) berührt, läßt sich durch zwei *perspektive Affinitäten* mit der Gleichung

⁵⁾ Wegen der vier auf einem orthogonalen Hyperboloid befindlichen Haupterzeugenden vgl. J. K r a m e s, Der einfachste Übergang zur Nebenlösung bei vorliegendem „Gefährlichem Ort“, Monatsh. Math. Phys. 50 (1941), S. 84—100, Nr. 1, insbesondere Fig. 1.

$\bar{z} = \pm a \cdot z$ in zwei durch \mathbf{B}_i und \mathbf{F}_i gehende (und zur xy -Ebene symmetrische) Kreise $\bar{\mathbf{c}}$ überführen. Bezeichnet e die Länge der *Ellipsensehne* auf der Geraden $x = x_i, y = 0$ (oder $= Y$), so ist, wie leicht nachzuweisen, $a^2 = Z/e$. Danach haben die Gegenpunkte $\bar{\mathbf{G}}$ von \mathbf{B}_i auf den Kreisen $\bar{\mathbf{c}}$ die Koordinaten: $x_i, Y, \pm \sqrt{Z e}$ und es gilt für alle Punkte $\mathbf{P}(y, z)$ der Ellipse \mathbf{c} (vgl. Abb. 2):

$$\frac{y}{\sqrt{Z/e} \cdot z} = - \frac{Z \sqrt{e \cdot \bar{z}} - \sqrt{Z \cdot e}}{y - Y} \quad \text{oder:}$$

$$\frac{y}{z} = - \frac{\frac{Z}{e} z - Z}{y - Y} \quad (11)$$

Dies bedeutet: Wird die z -Koordinate eines Punktes \mathbf{P} der Ebene v_i ($x = x_i$) mit dem Faktor $a^2 = Z:e$ multipliziert und der so erhaltene Punkt $\mathbf{Q}(x_i, y, \frac{Z}{e}z)$ mit dem Grundpunkt $\mathbf{G}_i(Y, Z)$ von v_i verbunden, so ergibt sich stets eine normale Gerade zum Verbindungsstrahl \mathbf{p} von \mathbf{B}_i mit \mathbf{P} , also eine Normale \mathbf{g}_i zur Kernebene η des Punktes \mathbf{P} (siehe Abb. 2).

Ersetzen wir noch in (10) den Ausdruck $1 + \frac{S^0}{f}$ durch Z/e , dann ergibt sich die Gl. (11). Damit ist gezeigt, daß alle innerhalb einer Ebene v_i gelegenen Punkte $\mathbf{P}(y, z)$, für welche die Bildparallaxe der zugeordneten Strahlen $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ einen konstanten kleinen Wert $dp^0 = S^0(d\omega_1 - d\omega_2)$ annimmt, immer eine Ellipse \mathbf{c} erfüllen. Diese berührt den Kreis \mathbf{c}^0 über dem Durchmesser $\mathbf{B}_i(0, 0), \mathbf{G}_i(Y, Z)$ in den beiden Punkten \mathbf{B}_i und \mathbf{F}_i (siehe Abb. 2). Für alle Punkte auf \mathbf{c}^0 ist insbesondere $dp^0 = 0$ ($S^0 = 0$).

Wegen $\frac{Z}{e} = 1 + \frac{S^0}{f}$ ist die z -Koordinate $\frac{Z}{e} \cdot z$ des Punktes \mathbf{Q} gleich $z + \frac{z}{f} S^0$. Man gelangt daher auch zum Punkt \mathbf{Q} , wenn man \mathbf{P} in der z -Richtung durch die Strecke $S = \frac{z}{f} S^0$ verschiebt. Die damit ausgeführte Umwandlung von S^0 in S steht im Einklang mit Gl. (8). Die durch \mathbf{Q} gelegte Normale \mathbf{g}_i zur Kernebene η von \mathbf{P} enthält nach Obigem wieder den Grundpunkt \mathbf{G}_i der Ebene v_i (Abb. 1).

Nr. 5. Die in allen möglichen Normalebenebenen v_i zur Basis enthaltenen Ellipsen \mathbf{c} erfüllen insgesamt die Fläche Ψ^S der konstanten Bildparallaxe $dp^0 = S^0(d\omega_1 - d\omega_2)$. Ψ^S ist ebenfalls eine Fläche 2. Grades, wie deren aus (5) und (10) durch Eliminieren von Y und Z hervorgehende Gleichung sofort bestätigt. Läßt man S^0 alle reellen Werte annehmen, so bilden deren entsprechende Flächen Ψ^S abermals ein „lineares Büschel“, das die räumliche Verteilung der Bildparallaxen dp^0 lückenlos wiedergibt. Die darin enthaltene Grundfläche Ψ^0 ($dp^0 = 0, S^0 = 0$) deckt sich übrigens mit der Fläche Ω^0 , in deren Punkten durch die vorliegende Bündelverlagerung die räumliche Parallaxe $dp_y = 0$ erzeugt wird. Alle Flächen Ψ^S des Büschels berühren einander nach Obigem längs der beiden Erzeugenden

\mathbf{e}_s ($y =, z = 0$) und \mathbf{f} , die in der xy -Ebene liegen und aus den Punkten \mathbf{B}_i ($x_i, 0, 0$) bzw. \mathbf{F}_i ($x_i, Y, 0$) bestehen.

Bezeichnet μ^0 den *mittleren Fehler der Bildparallaxe*, so begrenzen die zu $S^0 = \pm \frac{\mu^0}{d\omega_1 - d\omega_2}$ gehörigen Büschelflächen Ψ^+ und Ψ^- das „*gefährliche Raumgebiet*“ aller Punkte, deren zugeordnete Zielstrahlen $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ nach der Bündelverlagerung eine (nicht meßbare) Bildparallaxe zwischen den Grenzen $-\mu^0 < dp^0 < \mu^0$ aufweisen.

Bei dem oben ausgeschlossenen Sonderfall $d\omega_1 = d\omega_2$ ergeben sich (nach Gln. 1 und 2) für beide Arten der Parallaxenmessung besondere Büschel von Flächen konstanter Parallaxe. Wie der Verfasser bereits ausführlicher gezeigt hat ⁶⁾, sind sodann alle Flächen Ω^S konstanter Parallaxe dp_y *orthogonale* (d. h. gleichseitige) *Paraboloide* mit der Kernachse als Scheitelerzeugende \mathbf{e}_s ; ihre zweite gemeinsame Erzeugende \mathbf{f} ist zu \mathbf{e}_s normal. Hingegen ist jetzt im Büschel der Flächen Ψ^S konstanter Bildparallaxe *bloß die Grundfläche* Ψ^0 ($= \Omega^0$) ein orthogonales Paraboloid, das von den übrigen Flächen Ψ^S (zweiten Grades) längs \mathbf{e}_s und \mathbf{f} berührt wird. Diese Flächen Ψ^S werden von den Normalebene v_i zur Basis nach Parabeln mit waagrecht Achsen geschnitten usw.

Nr. 6. Die Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie besteht bekanntlich darin, die durch je zwei aufeinanderfolgende Geländebilder bestimmten Zielstrahlbündel in jene gegenseitige Lage zu bringen, die sie im Augenblick der Aufnahmen jeweils inne hatten. Da in der Regel eine von der richtigen Orientierung nur wenig abweichende Lage der Bündel bekannt ist, hat man in der photogrammetrischen Praxis immer wieder folgende Aufgabe zu lösen: *Gegeben sind eine Anzahl von Raumpunkten \mathbf{P}_k und die an diesen Stellen vorhandenen kleinen y -Parallaxen dp_k , wie sie z. B. mittels eines Orientierungsgerätes gemessen werden; man suche eine solche Verlagerung der beiden Zielstrahlbündel, bei der alle diese Parallaxen gleichzeitig zum Verschwinden kommen.*

Auf Grund der oben dargelegten geometrischen Eigenschaften der „*gefährlichen Raumgebiete*“ gelingt es vorerst, die der gesuchten Bündelverlagerung zugeordnete „*Grundfläche*“ Ω^0 auf einfachem graphischen Wege festzulegen. Obige beiden Arten der Parallaxenmessung sind dabei nicht wesentlich verschieden zu behandeln. Wir setzen zuerst voraus, daß die Werte von dp_k unmittelbar am Raummodell beobachtet werden und stellen uns vor, die Differenz $d\omega_1 - d\omega_2$ sei bereits gefunden. Sind sodann zwei Punkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ gegeben (siehe Abb. 3), die einer beliebigen Normalebene v_i zur Kernachse angehören, und kennt man die an diesen Stellen auftretenden Parallaxen dp_1, dp_2 , so können innerhalb von v_i die beiden zu \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_2 zugehörigen Geraden $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$, die durch den Grundpunkt \mathbf{G}_i von v_i gehen, nach Abb. 1 sofort gezeichnet werden. Zu diesem Zwecke hat man nämlich die Punkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ parallel zur z -Achse (*unter Beachtung der Vorzeichen von dp_1, dp_2*) durch die Strecken $S_1 = dp_1 : (d\omega_1 - d\omega_2)$

⁶⁾ Siehe die erste der mit Fußnote 3 zitierten Arbeiten, Nr. 3, Fall **a, g, k** und **s**, sowie J. K r a m e s, Über besondere lineare Büschel von Flächen konstanter Bildparallaxe, Anzeiger der öst. Akad. d. Wiss., math. nat. Kl. 85 (1948), S. 25—31, Fall **a** und **i**.

bzw. $S_2 = dp_2 : (d\omega_1 - d\omega_2)$ (nach aufwärts oder abwärts) zu verschieben und durch die so gewonnenen Punkte Q_1, Q_2 die Normalen g_1, g_2 zu den Verbindungsstrahlen p_1, p_2 von $B_i(x_i, 0, 0)$ mit $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ zu legen (vgl. Nr. 3, I).

Ist jedoch $d\omega_1 - d\omega_2$ nicht gegeben oder kennt man bloß das Verhältnis der Parallaxen $dp_1 : dp_2$ (z. B. = 5 : -2, siehe Abb. 3), dann kann man sich S_1, S_2 mit irgend einem positiven oder negativen Faktor multipliziert denken, d. h. anstatt S_1, S_2 alle möglichen zu $dp_1 : dp_2$ proportionalen Verschiebungsstrecken K_1, K_2 verwenden. Jede der Geraden g_1, g_2 erhält danach ∞^1 untereinander parallele Lagen q_1, q_2 , und diese Geraden q_1, q_2 erfüllen zwei ähnlich aufeinander bezogene Parallelstrahlbüschel. Zwei solche besitzen stets eine Perspektivitätsachse s , auf der alle Paare entsprechender Geraden q_1, q_2 sich schneiden (Abb. 3). Insbesondere bilden die durch P_1, P_2 gelegten Normalen n_1, n_2 zu den Kernebenen η_1, η_2 dieser Punkte zwei zusammengehörige Büschelstrahlen ($K_1 = 0, K_2 = 0$). Damit kann s rasch gezeichnet werden.

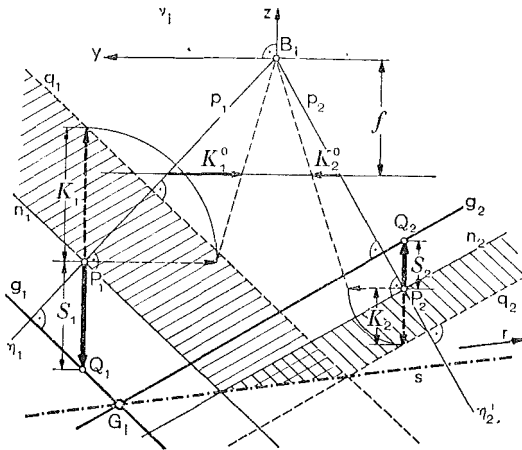


Abb. 3

Erfolgt hingegen die Parallaxenmessung auf der Ebene $z = -f$ (vgl. Nr. 4) und besitzen die zu den Punkten $P_1(y_1, z_1), P_2(y_2, z_2)$ einer Ebene $v_i(x = x_i)$ gehörigen Bildparallaxen dp_1^0, dp_2^0 das Verhältnis $K_1^0 : K_2^0$, so kann man P_1 und P_2 nach Nr. 4 nacheinander durch alle möglichen Strecken

$$\frac{z_1}{f} K_1^0 = K_1, \text{ bzw. } \frac{z_2}{f} K_2^0 = K_2$$

— je nach dem Vorzeichen nach aufwärts oder abwärts — verschieben, womit die bereits erwähnten *ähnlichen Parallelstrahlbüschel* abermals festgelegt sind. Die Umwandlung von K_1^0, K_2^0 in K_1, K_2 ist aus Abb. 3 ersichtlich. Die Perspektivitätsachse s wird hierauf wie vorhin gefunden.

Nr. 7. Wir betrachten nun drei Punkte P_1, P_2, P_3 , die einer Ebene $v_i(x = x_i)$ angehören (Abb. 4). Kennt man die Verhältnisse der an diesen Stellen des Raummodells vorhandenen Parallaxen $dp_1 : dp_2 : dp_3 = K_1 : K_2 : K_3$ oder die

Verhältnisse der entsprechenden Bildparallaxen $dp_1^0 : dp_2^0 : dp_3^0 = K_1^0 : K_2^0 : K_3^0$, so ist der Grundpunkt dieser Ebene v_i bereits eindeutig bestimmt. Um ihn zu erhalten, kann man dreimal zu je zwei der gegebenen Punkte P_i die Perspektivitätsachse s wie in Abb. 3 zeichnen. Diese drei Geraden s haben im allgemeinen einen eigentlichen Punkt G_i gemeinsam, nämlich das *Ähnlichkeitszentrum der beiden* (in Abb. 4 geschrafften) *Dreiecke*, die von den paarweise parallelen Geraden n_1, n_2, n_3 , bzw. q_1, q_2, q_3 gebildet werden. G_i deckt sich mit dem Grundpunkt von v_i , weil nur für ihn alle nach Nr. 3, **I**, gegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Legt man noch durch den gefundenen Punkt G_i die in den verwendeten Parallelstrahlbüscheln enthaltenen Geraden g_1, g_2, g_3 , so begrenzen diese die von P_1, P_2, P_3 ausgehenden lotrechten Strecken S_1, S_2, S_3 , von denen jede nach Gl. (4) oder (9) die Differenz $d\omega_1 - d\omega_2 = dp_1 : S_1 = dp_2 : S_2 = dp_3 : S_3$ ergibt. Man kann daher auch sagen:

IV: *Mit dem Grundpunkt G_i einer Normalebene v_i zur Basis und dem wahren Betrag dp_k (dp_k^0) der zu einem Punkt P_k von v_i gehörigen Raumparallaxe (Bildparallaxe) ist die Differenzkipfung $d\omega_1 - d\omega_2 = dp_k : S_k$ eindeutig bestimmt ⁷⁾.*

Der Grundpunkt G_i einer Ebene v_i fällt dann und nur dann in einen *unendlichfernen Punkt* von v_i , wenn die oben erwähnten Dreiecke *kongruent* sind und durch eine Verschiebung ineinander übergehen. In einem solchen Fall sind alle Strecken $S_i = \infty$, so daß $d\omega_1 - d\omega_2 = 0$ wird, was in Nr. 2 und 4 ausdrücklich ausgenommen wurde. Wir kommen jedoch in Nr. 10 darauf noch zurück.

⁷⁾ Eine andere (etwas umständlichere) graphische Ermittlung der Differenzkipfung findet sich bereits in E. G o t t h a r d t, Rechnerische und zeichnerische Verfahren zur Verbesserung und Beschleunigung der Orientierung von Senkrechtbildpaaren gebirgigen Geländes, Dissertation, Berlin, 1938, oder: Mitteilungen d. Dtsch. Ges. f. Photogrammetrie, 1, 2. Heft (1939), S. 33—90. — Vgl. auch G. P o i v i l l i e r s, a. a. O., wo dieselbe Aufgabe auf eine angenehmere graphische Bestimmung des sogenannten „Rückwärtseinschnittes in der Ebene“ zurückgeführt wird. Vergleichende Betrachtungen über diese beiden Verfahren und die in obigem Text beschriebenen Konstruktionen bleiben einer späteren Gelegenheit vorbehalten. — Hingegen sei noch erwähnt, daß die von H. K a s p e r vor kurzem in der Schweiz. Zeitschr. f. Vermessung u. Kulturtechnik, 47 (1949), Heft 5, mitgeteilte *graphische Ermittlung der „Überkorrektur“* auch durch einfache Spezialisierungen aus obigen Abbildungen 3 und 4 ableitbar ist. Wären nämlich in den Punkten P_1 und P_3 von Abb. 4 die Parallaxen dp_1 und dp_3 gleich 0, dann müßten sich die Geraden n_1 und n_3 mit g_1 , bzw. g_3 vereinigen, also im Grundpunkt G_i ihren Schnittpunkt haben. Die zu P_2 gehörige Strecke S_2 ergäbe wieder die noch erforderliche Verkippung $d\omega_1 - d\omega_2 = dp_2 / S_2$ (vgl. oben **IV**). Beim Wegschaffen von dp_2 *mittels einer Verkippung allein* fällt jedoch der Grundpunkt G_i (wegen der Gln. (5), wo für $d\varphi_1 = 0, d\varphi_2 = 0, dx_1 = 0, dx_2 = 0, dy_1 = 0, dy_2 = 0, db_{z_1} = 0, db_{z_2} = 0$ die Größen Y und Z verschwinden) mit dem Basispunkt B_i zusammen, sodaß dabei die Strecke S_2 bis zu der durch B_i gelegten Parallelen \bar{g}_2 zu $g_2 \parallel n_2$ zu verlängern ist (Abb. 4). Die so gewonnene neue Strecke \bar{S}_2 bestimmt aber die Verkippung $d\omega_1 - d\omega_2 = dp_2 / \bar{S}_2$. Hieraus erhält man nun den richtigen Wert $d\omega_1 - d\omega_2$ durch *Multiplikation mit \bar{S}_2 / S_2* , und dies stimmt tatsächlich mit dem Quotienten der von H. K a s p e r, a. a. O., betrachteten Strecken d und a (siehe obige Abb. 4) überein.

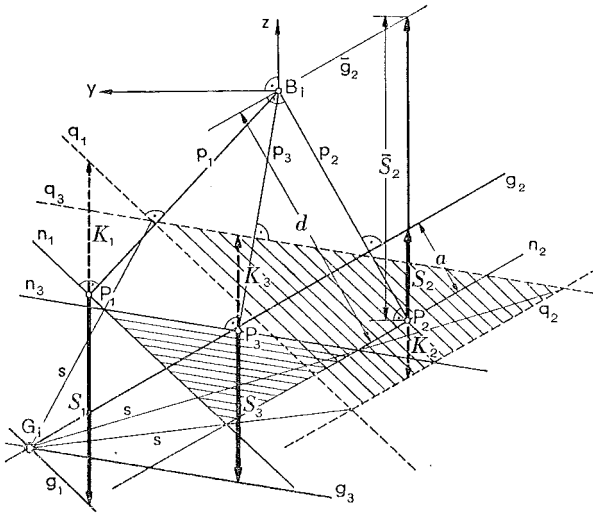


Abb. 4

Zur Festlegung der Grundfläche Ω^0 hat man auf Grund von Nr. 3, **II**, neben \mathbf{G}_i nur noch den Grundpunkt einer zweiten Normalebene zur Basis zu ermitteln, wie dies später unter Nr. 11 vorausgesetzt wird. Ω^0 kann nach obigem u. a. bereits gefunden werden, wenn in zwei Normalebene v_i zur Basis je drei Raumpunkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ und $\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6$ samt den Verhältnissen der dort auftretenden Parallaxen $dp_1 : dp_2 : dp_3$, bzw. $dp_4 : dp_5 : dp_6$ (oder samt den Verhältnissen der entsprechenden Bildparallaxen) gegeben sind. Um die für Späteres wichtigen Grundpunkte $\mathbf{G}^a, \mathbf{G}^b$ der durch die Zentren $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ gelegten Ebenen v^a ($x = 0$) und v^b ($x = b$) zu erhalten, hat man nur die Durchstoßpunkte der Verbindungsgeraden $\mathbf{g} = \mathbf{e}_t$ zweier Grundpunkte $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ mit v^a , bzw. v^b aufzusuchen (vgl. unten Abb. 5).

Nr. 8. Wie der Verfasser an anderer Stelle dargelegt hat⁸⁾, ist die Fläche Ω^0 auch eindeutig konstruierbar, wenn bloß fünf beliebig im Raume verteilte Punkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5$ und die Verhältnisse der daselbst vorhandenen kleinen Parallaxen

$$dp_1 : dp_2 : dp_3 : dp_4 : dp_5 \quad (12)$$

bekannt sind. Da jedoch für die zeichnerische Lösung dieser allgemeinen Aufgabe einige Kenntnisse aus der *Liniengeometrie* vorauszusetzen sind, beschränken wir uns hier auf zwei einfache Sonderfälle.

a) Liegen drei der gegebenen Punkte, etwa $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ in derselben Normalebene v_1 ($= v_2 = v_3$) zur Basis und die restlichen Punkte $\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5$ in zwei dazu

⁸⁾ J. K r a m e s, Gegenseitige Orientierung von Luftaufnahmen mittels liniengeometrischer Konstruktionen, Anzeiger der öst. Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl. 86 (1949).

parallelen, jedoch verschiedenen Ebenen v_4, v_5 (Abb. 5), so kann zunächst der Grundpunkt G_1 von v_1 wie in Abb. 4 gefunden werden. Mit G_1 sind ferner jene Strecken S_1, S_2, S_3 bestimmt, welche von den in G_1 zusammentreffenden Geraden g_1, g_2, g_3 begrenzt werden (vgl. Abb. 4). Wir bezeichnen die auf der Basis gelegenen Punkte von v_4, v_5 mit B_4, B_5 und verschieben P_4, P_5 innerhalb von v_4 , bzw. v_5 in der z -Richtung durch jene (vorzeichenbegabte) Strecken S_4, S_5 , für die $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 : S_5$ gleich den gegebenen Verhältnissen (12) sind. Durch die zweiten Endpunkte Q_4, Q_5 dieser Strecken S_4, S_5 gehen sodann (normal zu den Verbindungsgeraden $p_4 = B_4 \rightarrow P_4, p_5 = B_5 \rightarrow P_5$) die Geraden g_4, g_5 , auf welchen die Grundpunkte G_4, G_5 der Ebenen v_4, v_5 liegen müssen (Nr. 3, I).

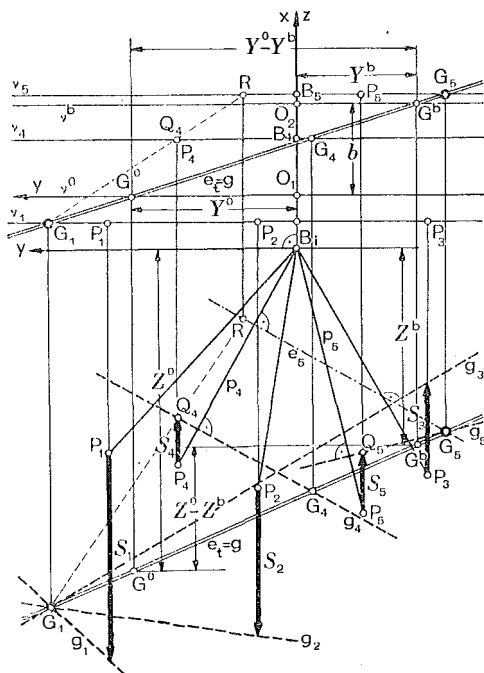


Abb. 5

Die gesuchte Haupterzeugende $e_t = g$ der Grundfläche Ω^0 (siehe Nr. 3, II) deckt sich nun mit der durch G_1 gelegten gemeinsamen Transversalen von g_4 und g_5 . Um z. B. den Schnittpunkt von g mit der Ebene v_5 , also den Grundpunkt G_5 von v_5 , zu erhalten, hat man durch G_1 die Verbindungsebene ϵ mit g_4 zu legen, deren Spur e_5 auf v_5 zu zeichnen und den Schnittpunkt G_5 von e_5 mit g_5 aufzusuchen. In Abb. 5 wurde zu diesem Zweck ein oberhalb des Normalrisses (Aufrisses) auf die Ebene v_5 angeordneter Grundriß verwendet und Q_4 aus dem Zentrum G_1 auf v_5 in den Punkt R projiziert. Durch R geht sodann parallel zu g_4 die Gerade e_5 .

b) Befinden sich die gegebenen fünf Punkte P_k zu je drei und zwei in zwei verschiedenen Normalebene v_1 und v_2 zur Basis, so hat man sich die soeben betrachteten Ebenen v_4 und v_5 etwa in v_2 vereinigt zu denken. Der Grundpunkt

G_2 von v_2 ist sodann unmittelbar als Schnittpunkt der beiden wie oben bestimmten Geraden g_4, g_5 gegeben.

Sind im Falle **a)** oder **b)** nicht bloß die Verhältnisse (12) der Parallaxen, sondern auch deren wahre Beträge dp_k bekannt, dann erhält man nach Nr. 7, **IV**, sogleich die Differenz

$$d\omega_1 - d\omega_2 = dp_k : S_k.$$

Darin bezeichnet S_k wieder jene Strecke, durch welche die in P_k errichtete Normale n_k zum Strahl p_k parallel zur z -Achse zu verschieben ist, um die durch G_i gehende Gerade g_k zu erhalten.

Nr. 9. Die in Nr. 7 und Nr. 8 beschriebenen Konstruktionen können für beide Arten der Parallaxenmessung noch auf verschiedene andere Arten ausgeführt werden. Ist insbesondere eine der gegebenen Parallaxen $dp_k = 0$, so ergeben sich naheliegende Vereinfachungen. Dieser Fall kann vor Beginn der letzten Orientierungsbewegungen durch geeignete Drehungen oder y -Schiebungen der Bündel immer herbeigeführt werden. Auf ähnliche Weise ließe sich auch der bisher außer Betracht gelassene Sonderfall $d\omega_1 = d\omega_2$ leicht umgehen (vgl. hiezu noch Nr. 10). Mittels praktischer Versuche wird sich ferner noch erweisen, welche Verteilung der in der Ausgangsstellung vorhandenen Parallaxen für die Erzielung genauer Resultate am zweckmäßigsten ist. Auf eine weitere Diskussion verschiedener Einzelheiten und Sonderfälle wird hier verzichtet. Es sei bloß hervorgehoben, daß dieses Verfahren für beliebig geformtes Gebirge wie auch für ebenes Gelände gleichermaßen anwendbar ist.

Beim praktischen Einpassen von Luftbildern stehen in der Regel eine sehr große Anzahl von Punktpaaren aufgenommener Geländepunkte und die an diesen Stellen beobachteten Parallaxenwerte (oder deren Verhältnisse) zur Verfügung. Verwendet man davon mehr als zur eindeutigen Bestimmung der Grundfläche Ω^0 erforderlich sind, so entsteht die weitere Aufgabe, die Lage des Grundpunktes G_i innerhalb jeder herangezogenen Ebene v_i derart festzulegen, daß G_i *möglichst widerspruchstlos als gemeinsamer Punkt* aller in Frage kommenden Perspektivitätsachsen s (vgl. Abb. 3 und 4) gelten kann. Sind ferner die Grundpunkte G_i von mehr als zwei Normalebene zur Basis ermittelt worden, so hat man die Lage dieser Punkte nach bekannten Regeln *derart auszugleichen, daß alle auf derselben Raumgeraden g liegen* (vgl. Nr. 3, **II**).

Nr. 10. Wir wollen noch kurz zeigen, wie die Grundfläche Ω^0 der gesuchten Bündelverlagerung auf zeichnerischem Wege gefunden wird, wenn der Sonderfall $d\omega_1 - d\omega_2 = 0$ vorliegt, bei dem die in Nr. 7 und Nr. 8 angegebenen Konstruktionen versagen. Wie schon am Schluß von Nr. 7 erwähnt wurde, sind in diesem Falle alle in einer Normalebene v_i zur Basis nach Abb. 3 oder 4 gezeichneten *Perspektivitätsachsen s untereinander parallel*. Die Richtung r einer solchen Achse hängt aber nur von den *Richtungen und Breiten der Streifen* ab, die zur Ermittlung von s verwendet wurden und wie in Abb. 3 z. B. von den Geraden $n_1 \parallel q_1$ und $n_2 \parallel q_2$ begrenzt sind.

Wir setzen bloß voraus, daß die Parallaxen am Raummodell gemessen werden (vgl. Nr. 6) und tragen jetzt geeignet angenommene Strecken K_k , die

das gegebene Parallaxenverhältnis aufweisen, von den Punkten \mathbf{P}_k einer Ebene ν_i aus auf, jedoch nicht mehr in lotrechter Richtung, sondern parallel zur y -Achse, und zwar je nach dem Vorzeichen nach rechts oder links. Ferner legen wir durch die Endpunkte dieser Strecken die Parallelen \mathbf{h}_k zu den Verbindungsgeraden \mathbf{p}_k der Punkte \mathbf{P}_k mit dem Basispunkt \mathbf{B}_i von ν_i (Abb. 6). Weil die

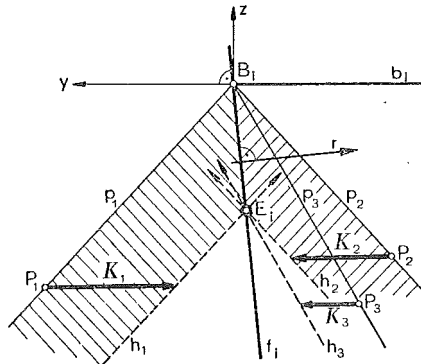


Abb. 6

von je zwei Geraden $\mathbf{p}_k \parallel \mathbf{h}_k$ gebildeten Streifen aus den Geradenpaaren $\mathbf{n}_k \parallel \mathbf{q}_k$ (Abb. 3) durch gleichsinnige Vierteldrehungen hervorgehen, fällt die Perspektivitätsachse der durch irgend zwei Paare $\mathbf{p}_k \parallel \mathbf{h}_k$ bestimmten ähnlichen Parallelstrahlbüschel stets mit der Geraden \mathbf{f}_i zusammen, die durch \mathbf{B}_i geht und zur Richtung \mathbf{r} von \mathbf{s} normal ist. Man erkennt daraus letzten Endes, daß $d\omega_1 = d\omega_2$ dann und nur dann zutrifft, wenn alle mit den Punkten \mathbf{P}_k einer Ebene ν_i nach obigem verbundenen Strahlen \mathbf{h}_k durch einen festen Punkt \mathbf{E}_i von ν_i gehen. Ändert man alle waagrecht aufgetragenen Strecken proportional, so geht bloß \mathbf{E}_i in einen anderen Punkt von \mathbf{f}_i über. Ferner ergibt sich, daß bei $d\omega_1 - d\omega_2 = 0$ in allen Punkten \mathbf{P}_k einer durch \mathbf{B}_i gehenden Geraden \mathbf{p}_k von ν_i stets dieselbe Parallaxe dp_y erzeugt wird. Insbesondere ist dp_y in den ∞^1 Punkten der Geraden \mathbf{f}_i gleich null, hingegen gilt für alle Punkte auf der durch \mathbf{B}_i gelegten Parallelen \mathbf{b}_i zur y -Achse: $dp_y = \infty$.

Die Gerade \mathbf{f}_i ist zugleich die in ν_i befindliche Erzeugende des orthogonalen Paraboloides, das hier als „Grundfläche“ Ω^0 des „gefährlichen Raumbgebietes“ in Erscheinung tritt (vgl. Schluß von Nr. 5). Um \mathbf{f}_i zeichnen zu können, genügt nach dem Gesagten die Kenntnis des Verhältnisses $K_1 : K_2$ der in zwei gegebenen Punkten $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ von ν_i gemessenen Parallaxen.

Überdies ist die Grundfläche Ω^0 nunmehr eindeutig bestimmt, wenn in zwei verschiedenen Normalebene ν_1, ν_2 zur Basis je zwei Modellpunkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$, bzw. $\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ samt allen Verhältnissen der dasebst beobachteten Parallaxen bekannt sind. Zunächst können nämlich innerhalb von ν_1 und ν_2 die Punkte \mathbf{E}_1 bzw. \mathbf{E}_2 und damit auch die Erzeugenden \mathbf{f}_1 bzw. \mathbf{f}_2 wie in Abb. 6 gefunden werden. Verwendet man dabei insbesondere solche vier waagrechte Strecken K_k , für die $K_1 : K_2 : K_3 : K_4$ durchgehends gleich den gegebenen Parallaxenverhältnissen sind, so bildet die räumliche Verbindungsgerade von \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 bereits eine weitere

Erzeugende \mathbf{e} von Ω^0 (die mit der Kernachse \mathbf{e}_s derselben Schar angehört). Man bestätigt dies u. a. auf Grund der Gln. (1) und (2), aus denen zu entnehmen ist, daß für $d\omega_1 = d\omega_2$ die Parallaxe dp_y in allen Punkten \mathbf{P}_k der beiden Ebenen:

$$\bar{v} \dots \dots \dots \bar{x} + \frac{b \, d\varphi_2 - db_{z1} + db_{z2}}{d\varphi_1 - d\varphi_2} = 0, \quad (13)$$

$$\bar{\eta} \dots \dots \dots \bar{y} + \frac{dx_1 - dx_2}{d\varphi_1 - d\varphi_2} \bar{z} = 0 \quad (14)$$

denselben Wert annimmt, und zwar:

$$d\bar{p} = - (b \cdot d\varphi_2 - db_{z1} + db_{z2}) \frac{dx_1 - dx_2}{d\varphi_1 - d\varphi_2} + b \cdot dx_2 + db_{y1} - db_{y2}. \quad (15)$$

Wie nun die aus (1), (2) ableitbare Gleichung

$$xy + \frac{dx_1 - dx_2}{d\varphi_1 - d\varphi_2} xz + \frac{b \cdot d\varphi_2 - db_{z1} + db_{z2}}{d\varphi_1 - d\varphi_2} y - \frac{b \cdot dx_2 + db_{y1} - db_{y2}}{d\varphi_1 - d\varphi_2} z = 0 \quad (16)$$

des Paraboloides Ω^0 unmittelbar zeigt, sind \bar{v} und $\bar{\eta}$ parallel zu den Richtebenen der beiden Erzeugendenscharen von Ω^0 . Da je einer der betrachteten Punkte \mathbf{P}_k von v_1 und v_2 ohne Einschränkung der Allgemeinheit innerhalb der Ebene $\bar{\eta}$ angenommen werden darf, erkennt man unschwer, daß die Verbindungsgerade \mathbf{e} von \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 zur Richtebene $\bar{\eta}$ parallel ist; ferner schneidet \mathbf{e} die Paraboloiderzeugenden \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 . Somit deckt sich \mathbf{e} tatsächlich mit einer Erzeugenden von Ω^0 .

Die Durchstoßpunkte von \mathbf{e} mit beliebigen weiteren Normalebene v_i zur Basis bestimmen sofort die in diesen Ebenen befindlichen Erzeugenden \mathbf{f}_i des Paraboloides Ω^0 , die alle die Kernachse \mathbf{e}_s rechtwinklig schneiden. Mithin lassen sich insbesondere die durch die Zentren $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ gehenden Erzeugenden $\mathbf{f}^a, \mathbf{f}^b$ und die zweite in der xy -Ebene liegende Erzeugende \mathbf{f} von Ω^0 rasch festlegen. Man ersieht daraus, daß hier mit den Punkten \mathbf{E}_i und ihrer Verbindungsgeraden \mathbf{e} im wesentlichen ebenso verfahren werden kann wie mit den Grundpunkten \mathbf{G}_i und der Haupterzeugenden $\mathbf{e}_t = \mathbf{g}$ in allgemeinen Fällen (vgl. Schluß von Nr. 7). Die zuletzt genannte Gerade \mathbf{g} fällt beim Grundparaboloid Ω^0 ($d\omega_1 = d\omega_2$) in die gemeinsame Ferngerade der Ebenen v_i .

Hat umgekehrt die Parallaxe dp_y in allen Punkten \mathbf{P}_k einer Ebene \bar{v} oder einer Kernebene $\bar{\eta}$ einen bestimmten festen Wert $d\bar{p}$, so ist wegen Gln. (1), (2), (15) usw. leicht zu zeigen, daß sodann stets $d\omega_1 - d\omega_2 = 0$ gilt. Wir können daher feststellen:

V: Die Differenzkipfung $d\omega_1 - d\omega_2$ der gesuchten Bündelverlagerung ist dann und nur dann gleich null, wenn eine Normalebene \bar{v} zur Basis und eine Kernebene $\bar{\eta}$ vorhanden sind, in deren sämtlichen Punkten dieselbe Parallaxe bestimmter Größe (beispielsweise = 0) auftritt; die Existenz der einen Ebene hat

die der anderen zur Folge⁹⁾. Dieser Sonderfall liegt immer vor, sobald innerhalb einer Kernebene $\bar{\eta}$ (oder in einer Normalebene $\bar{\nu}$ zur Basis) wenigstens drei in nicht auf einer Geraden (bzw. auf keinem die Basis schneidenden Kreis) liegende Punkte \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 festzustellen sind, in denen die räumliche Parallaxen denselben Wert $dp_1 = dp_2 = dp_3$ haben¹⁰⁾.

Daraus ergeben sich neue Möglichkeiten, die Größe $d\omega_1 - d\omega_2$ im Verlaufe des Einpassens der Luftbilder zu eliminieren, bzw. das Verschwinden dieser Differenz zu kontrollieren.

Nr. 11. Für die weitere Lösung der Orientierungsaufgabe beschränken wir uns nunmehr auf die beiden wichtigsten Sonderfälle, nämlich A) auf das „Winkelverfahren“ (für unabhängige Bildpaare), wo $d\omega_1 - d\omega_2 = d\omega$, $db_{y1} = db_{y2} = db_{z1} = db_{z2} = 0$ anzunehmen ist, und B) auf den „Folgebildanschluß“, bei dem etwa $d\omega_1 = d\varphi_1 = dx_1 = db_{y1} = db_{z1} = 0$ vorausgesetzt sei. Es zeigt sich vor allem, daß in diesen beiden Fällen mit der Grundfläche Ω^0 bereits die Verhältnisse

$$A) \quad d\omega : d\varphi_1 : d\varphi_2 : dx_1 : dx_2,$$

bzw.

$$B) \quad d\omega_2 : d\varphi_2 : dx_2 : db_{y2} : db_{z2}$$

aller fünf Orientierungsgrößen eindeutig bestimmt sind. Für diese besonderen Annahmen reduzieren sich nämlich die Koordinaten Y, Z des Grundpunktes \mathbf{G}_i (siehe Gl. 5) auf:

$$A) \quad \left. \begin{aligned} Y &= \frac{d\varphi_1 - d\varphi_2}{d\omega} x + \frac{d\varphi_2}{d\omega} b \\ Z &= \frac{dx_1 - dx_2}{d\omega} x + \frac{dx_2}{d\omega} b \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

$$B) \quad \left. \begin{aligned} Y &= \frac{d\varphi_2}{d\omega_2} x - \frac{b \cdot d\varphi_2 + db_{z2}}{d\omega_2} b \\ Z &= \frac{dx_2}{d\omega_2} x - \frac{b \cdot dx_2 - db_{y2}}{d\omega_2} b \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

⁹⁾ Diese Ergebnis ist implizite schon in der ersten mit Fußnote 3 zitierten Arbeit des Verfassers (Nr. 2, Gl. (12) usw.) enthalten. — Die Ebenen $\bar{\nu}$ und $\bar{\eta}$ können auch außerhalb des Gesichtsfeldes verlaufen; so liegt $\bar{\nu}$ nach obiger Gl. (13) insbesondere im Unendlichen, wenn neben $d\omega_1 = d\omega_2$ auch gilt $d\varphi_1 = d\varphi_2$. Die Ebene $\bar{\eta}$ fällt wegen Gl. (14) für $d\varphi_1 = d\varphi_2$ bzw. für $dx_1 = dx_2$ mit der xy -Ebene bzw. mit der xz -Ebene zusammen. Die in sämtlichen Punkten von $\bar{\nu}$ und $\bar{\eta}$ erzeugte konstante Parallaxe $d\bar{p}$ verschwindet nach Gl. (15), sobald folgende Relationen erfüllt sind: $dx_1 = 0$, $dx_2 = 0$, $db_{y1} = 0$, $db_{y2} = 0$, $d\varphi_1 \neq d\varphi_2$ (vgl. auch die soeben erwähnte Arbeit, Nr. 3, Fall \mathbf{g} und \mathbf{s}).

¹⁰⁾ Vgl. hiezu die in Fußn. 1 zitierte Arbeit, Nr. 5, Satz 1, 2 u. 3, wo bereits die für verschwindende Parallaxen geltenden Sonderfälle obiger Ergebnisse gekennzeichnet sind.

Diese Gleichungen bestimmen nach Nr. 3 die Normalrisse $\mathbf{g}' \mathbf{g}''$, der Haupterzeugenden $\mathbf{e}_t = \mathbf{g}$ von Ω^0 auf die xy -, bzw. xz -Ebene. Bei dem in Abb. 5 behandelten Beispiel wurden mit Hilfe dieser Risse auch die Grundpunkte der durch die Zentren $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ gelegten Ebenen $v^0 (x=0)$ und $v^b (x=b)$ als Durchstoßpunkte $\mathbf{G}^0, \mathbf{G}^b$ der Geraden \mathbf{g} mit diesen Ebenen ermittelt (vgl. Schluß von Nr. 8). Die Koordinaten $0, Y^0, Z^0$, bzw. b, Y^b, Z^b dieser Punkte lassen sich übrigens auch aus den Koordinaten zweier beliebiger Grundpunkte $\mathbf{G}_1 (x_1, y_1, z_1), \mathbf{G}_2 (x_2, y_2, z_2)$ wie folgt leicht berechnen:

$$\left. \begin{aligned} Y^0 &= Y_1 - x_1 \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1}, & Y^b &= Y_1 + (b - x_1) \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1} \\ Z^0 &= Z_1 - x_1 \frac{Z_2 - Z_1}{x_2 - x_1}, & Z^b &= Z_1 + (b - x_1) \frac{Z_2 - Z_1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Aus (17) und (18) folgt in allgemeinen Fällen:

$$\left. \begin{aligned} \text{A)} \quad d\varphi_1 &= \frac{Y^b}{b} d\omega, & \text{B)} \quad d\varphi_2 &= -\frac{Y^0 - Y^b}{b} d\omega_2, \\ d\kappa_1 &= \frac{Z^b}{b} d\omega, & d\kappa_2 &= -\frac{Z^0 - Z^b}{b} d\omega_2, \\ d\varphi_2 &= \frac{Y^0}{b} d\omega, & db_{y_2} &= Z^b d\omega_2, \\ d\kappa_2 &= \frac{Z^0}{b} d\omega; & db_{z_2} &= -Y^b d\omega_2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Kann man jedoch die Grundpunkte $\mathbf{G}^0, \mathbf{G}^b$ der Ebenen v^0, v^b aus je drei, in bekannten Punkten dieser Ebenen beobachteten Parallaxen unmittelbar nach Abb. 4 ermitteln, dann gelangt man ohne weitere Konstruktion oder Rechnung sogleich zu den Gln. (20).

Bei dem in Nr. 10 erörterten Sonderfall $d\omega_1 - d\omega_2 = 0$ läßt sich das Verhältnis der restlichen vier Orientierungsgrößen ebenfalls leicht angeben, sobald die in den Ebenen $x=0, x=b$ und $z=0$ vorhandenen Paraboloiderzeugenden $\mathbf{f}^0, \mathbf{f}^b$, bzw. \mathbf{f} bereits konstruiert sind (siehe Schluß von Nr. 10). Wir schreiben die Gleichungen dieser drei Geraden in der Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^0 &\dots\dots\dots x = 0, & y &= R^0 z, \\ \mathbf{f}^b &\dots\dots\dots x = b, & y &= R^b z, \\ \mathbf{f} &\dots\dots\dots x = \frac{t}{t-1} b, & z &= 0, \end{aligned}$$

wobei R und R^b durch die Richtungen der gefundenen Geraden \mathbf{f}^0 bzw. \mathbf{f}^b bestimmt sind und t das Teilverhältnis $\mathbf{0}_1\mathbf{B} : \mathbf{0}_2\mathbf{B}$ des auf der Basis gelegenen Punktes \mathbf{B} von \mathbf{f} bezüglich der beiden Zentren angibt. Aus der Gleichung (16) für das „Grundparaboloid“ Ω^0 (siehe auch Nr. 5, 10) ergibt sich sodann nach einfachen Zwischenrechnungen:

A) Beim „Winkelverfahren“:

$$d\varphi_1 : d\varphi_2 : dx_1 : dx_2 = 1 : t : -R^b : -tR^0, \quad (21)$$

sowie

B) beim „Folgebildanschluß“:

$$d\varphi_2 : dx_2 : db_{y_2} : db_{z_2} = (t - 1) : (R^b - tR^0) : bR^b : b. \quad (22)$$

Nr. 12. Mit Hilfe der nach Nr. 11 gewonnenen Verhältnisse der Orientierungsgrößen läßt sich schließlich die endgültige Einpassung der beiden Zielstrahlbündel u. a. auf folgende Weise bewerkstelligen: *Man wählt eine beliebige Größe $d\omega'$ von $d\omega$ (bzw. von $d\omega_2$) und stellt vorerst die damit gemäß (20) bestimmten Werte der Orientierungsunbekannten am Auswertgerät ein.* Wäre $d\omega$ (oder $d\omega_2$) = 0 (vgl. Nr. 5, 10, 11), dann hätte man $d\omega$ (bzw. $d\omega_2$) durch eine der übrigen Orientierungsgrößen zu ersetzen und die Gln. (21) oder (22) anzuwenden. In beiden Fällen müssen sich *bei diesem Vorgang die ursprünglich beobachteten Parallaxen dp_k oder dp^0 wegen der Gln. (1), (2) proportional ändern*, und zwar gilt dies umso genauer, je weniger die Ausgangsstellung von der richtigen Orientierung abweicht.

Hat sich nun eine der Parallaxen dp_k , etwa dp_1 , zufolge der Einstellung mittels $d\omega'$ in eine Parallaxe dp' verwandelt, und führt man anstatt $d\omega'$ den Wert

$$d\omega'' = \frac{dp_1}{dp_1 - dp'} d\omega' \quad (23)$$

in die Gleichungen (20) ein, so ergibt die (von der Anfangslage aus vorgenommene) Einstellung der so proportional geänderten Orientierungsgrößen im Punkt \mathbf{P}_1 (und daher in allen Punkten \mathbf{P}_k) genau die Parallaxe Null. Zum gleichen Ergebnis gelangt man ferner, wenn man nach der Einstellung mittels des Wertes $d\omega'$ zusätzlich noch die zu

$$d\bar{\omega} = d\omega'' - d\omega' = \frac{dp'}{dp_1 - dp'} d\omega' \quad (24)$$

gehörigen Größen (20) oder (21, 22) zur Anwendung bringt.

Mit dieser einfachen linearen Interpolation eröffnet sich mithin die Möglichkeit, ins Innere des mit der Orientierungsbewegung verknüpften „gefährlichen Raumbgebietes“ einzudringen, was bisher noch nirgends gelungen ist.

Zugleich gewinnen wir hier ein für die praktischen Anwendungen wichtiges Kriterium für die Güte der hergestellten gegenseitigen Orientierung der beiden Bündel. Während man sich bisher (abgesehen von der Heranziehung geeigneter Paßpunkte) mit dem Verschwinden aller beobachteten γ -Parallaxen zufriedengeben mußte, kann jetzt auf Grund der oben abgeleiteten Ergebnisse u. a. folgende Überprüfung der erzielten Einpassung vorgenommen werden:

Man verdoppelt den (der zuletzt ausgeführten Orientierungsbewegung zu Grunde gelegten) Wert von $d\omega''$ (oder $d\varphi_1$ usw.) und stellt die zu 2 . $d\omega''$ gehörigen Orientierungsgrößen (20) oder (21), (22) am Gerät ein: Die mit $d\omega''$ erreichte Bündel-lage kann nur dann die richtige Orientierung darstellen, wenn für 2 . $d\omega''$ bei allen

Punkten \mathbf{P}_k durchwegs Parallaxen entstehen, die den ursprünglich (d. h. vor Anwendung von $d\omega'$) beobachteten Werten dp_k negativ gleich sind.

Wäre dies nicht der Fall, oder ergeben sich bereits beim Einstellen mittels $d\omega'$ neue Parallaxenwerte, die den ursprünglichen (in auffallendem Ausmaß) nicht proportional sind, dann ist entweder eine Korrektur gemäß (23), (24) anzubringen oder das beschriebene Verfahren muß unter Heranziehung anderer Modellpunkte oder auch anderer Normalebenen zur Basis neuerdings durchgeführt werden.

Abschließend seien die einzelnen Operationen, wie sie bei Anwendung des beschriebenen Verfahrens in *allgemeinen Fällen* auszuführen sind, nochmals kurz zusammengefaßt:

1. In der Ausgangslage der beiden Bündel, in der die gegenseitige Orientierung bereits angenähert vorliegen muß, sind in wenigstens zwei Normalebenen v_i ($x = x_i$) zur Basis bei wenigstens je drei Modellpunkten \mathbf{P}_k die Koordinaten x_i, y_k, z_k und die daselbst auftretenden Parallaxen dp_k festzustellen. Wenn möglich, sind dabei vor allem die durch die Aufnahmezentren gehenden Ebenen v^0 und v^b heranzuziehen.

2. Für jede Ebene v_i ist eine Darstellung der Punkte \mathbf{P}_k samt ihren Verbindungsgeraden \mathbf{p}_k mit dem Basispunkt $\mathbf{B}_i(x_i, 0, 0)$ zu zeichnen.

3. Von den Punkten \mathbf{P}_k aus sind parallel zur z-Achse (unter Beachtung der Vorzeichen) Strecken K_k aufzutragen, die sich wie die an diesen Stellen gemessenen Parallaxen verhalten.

4. Durch jeden Punkt \mathbf{P}_k und den Endpunkt der hier angefügten Strecke K_k sind die Normalen \mathbf{n}_k , bzw. \mathbf{q}_k zum Strahl \mathbf{p}_k zu legen.

5. Hierauf ist das Ähnlichkeitszentrum \mathbf{G}_i der Dreiecke zu suchen, die von je drei entsprechenden Geraden $\mathbf{n}_k, \mathbf{q}_k$ begrenzt werden. Falls mehr als drei Punkte der Ebene v_i verwendet wurden, ist dieser „Grundpunkt“ \mathbf{G}_i von v_i so auszuwählen, daß er am besten als gemeinsamer Ähnlichkeitspunkt aller in v_i vorliegenden Dreieckspaare gelten kann.

6. Hierauf ist die räumliche Verbindungsgerade \mathbf{g} aller gefundenen Grundpunkte — allenfalls mittels Ausgleichens — festzulegen.

7. Falls die Ebenen v^0 und v^b noch nicht einbezogen wurden, sind deren Grundpunkte als Durchstoßpunkte $\mathbf{G}^0, \mathbf{G}^b$ der Geraden \mathbf{g} mit v^0, v^b aufzusuchen.

8. Die Koordinaten dieser Punkte bestimmen sodann die Verhältnisse der Orientierungsgrößen gemäß (20), wonach die endgültige Einpassung mittels der linearen Interpolation (23), (24) gewonnen wird.

9. Ist die wahre Größe einer Parallaxe dp_k hinreichend genau bekannt, dann können alle Orientierungsgrößen sofort angegeben und am Gerät eingestellt werden.

10. Schließlich läßt sich die Genauigkeit des Ergebnisses auf Grund der Tatsache überprüfen, daß bei Einstellung der doppelten Werte dieser Größen jede ursprünglich gemessene Parallaxe ihren negativ gleichen Wert annehmen muß.