Paper-ID: VGI_194812

Genauigkeitsuntersuchung zur flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene

Friedrich Hauer [1]

[1] *Technische Hochschule in Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **36** (5–6), S. 114–123

1948

BibTEX:

```
@ARTICLE{Hauer_VGI_194812,
Title = {Genauigkeitsuntersuchung zur fl{\"a}chentreuen Abbildung kleiner
   Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene},
Author = {Hauer, Friedrich},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {114--123},
Number = {5--6},
Year = {1948},
Volume = {36}
}
```

Genauigkeitsuntersuchung zur flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene

Von F. Hauer, Wien

1. *Die Genauigkeit der Flächen*

Bei der Anwendung der für die flächentreue Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene durch Systeme geringster Streckenverzerrung entwickelten Reihen [1]) tritt die Frage nach der Größe der hiebei vernachlässigten Glieder auf. Sie wird durch die nachfolgenden Überlegungen und Entwicklungen beantwortet.

Die Fehler, die bei der Abbildung von Teilen des Rotationsellipsoids in die Ebene entstehen, wenn Abbildungsgleichungen bis einschließlich Glieder 3. Ordnung verwendet werden, sind von 4. Ordnung in den Abbildungsgleichungen, von 3. Ordnung in den Verzerrungsgrößen, also auch in der Formel für die Flächenverzerrung σ. Zu ihrer Bestimmung werden die partiellen Differentialquotienten der Abbildungsgleichungen benötigt; da die Ordnung der Differentialquotienten um eine Einheit niedriger ist als diejenige der Abbildungsgleichungen, muß folglich auch bei der Ausführung der Formel für σ bei den sich ergebenden Produkten und Reihenentwicklungen mit den Gliedern 2. Ordnung einschließlich abgebrochen werden. Nimmt man hingegen die bei der Ausführung der Formel für σ entstehenden Glieder 3. Ordnung mit, so stellen sie offenbar den aus den Gliedern 4. Ordnung der Abbildungsgleichungen resultierenden Fehler der Flächen dar, der nur durch eine geeignete Bestimmung der Koeffizienten der Glieder 4. Ordnung der Abbildungsgleichungen wieder zum Verschwinden gebracht werden kann und damit die Ordnung der Flächentreue um eine Einheit steigert. Die Glieder höherer als 4. Ordnung üben dabei, wie ohne Schwierigkeit zu zeigen wäre, nur einen unbedeutenden Einfluß aus.

Ausgehend von den bis Glieder 4. Ordnung einschließlich geltenden allgemeinen Abbildungsgleichungen [2])

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{r}{r_0}\, p - 3\, B_{30} m^2 p - \frac{1}{3}\left(3\, B_{30} + \frac{1}{2 \cos^2 \varphi_0}\right) p^3 - \left(7\, B_{30} \tan \varphi_0 + 4\, B_{04} + \right.\\
&\quad \left. + \frac{7}{6} \tan \varphi_0 + \frac{1}{6} \tan^3 \varphi_0\right) m^3 p - (6\, B_{30} \tan \varphi_0 + 4\, B_{04} + \tan \varphi_0)\, m\, p^3,\\
y &= m + \frac{\sin \varphi_0}{2\, r_0}\, p^2 + B_{30} m^3 + \left(3\, B_{30} + \frac{\cos 2\varphi_0}{2 \cos^2 \varphi_0}\right) m\, p^2 + \left(\frac{5}{2} B_{30} \tan \varphi_0 + \right.\\
&\quad \left. + B_{04} + \frac{7}{24} \tan \varphi_0 + \frac{1}{24} \tan^3 \varphi_0\right) m^4 + \left(\frac{9}{2} B_{30} \tan \varphi_0 + 6\, B_{04} + \frac{3}{4} \tan \varphi_0 + \right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \tan^3 \varphi_0\right) m^2 p^2 + B_{04}\, p^4,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

[1]) Zeitschr. f. Vermessungsw., 70. Jg., S. 194—215, 1941: F. Hauer, Flächentreue Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene durch Systeme geringster Streckenverzerrung.

[2]) Zeitschr. f. Vermessungsw., 72. Jg., S. 179—189, 1943: F. Hauer, Entwicklung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene bis einschließlich Glieder 4. Ordnung.

in denen — einer gemeinsamen Behandlung der Systeme geringster Streckenzerrung wegen — die allgemeinen Koeffizienten B_{30} und B_{04} beibehalten werden, ergeben sich zunächst deren partielle Ableitungen mit

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial m} &= \frac{1}{r_0}\frac{\partial r}{\partial m}\,p - 6\,B_{30}\,m\,p - 3\left(7\,B_{30}\tan\varphi_3 + 4\,B_{04} + \frac{7}{6}\tan\varphi_0 + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{6}\tan^3\varphi_0\right) m^2 p - \left(6\,B_{30}\tan\varphi_0 + 4\,B_{04} + \tan\varphi_0\right) p^3,\\
\frac{\partial x}{\partial p} &= \frac{r}{r_0} - 3\,B_{30}\,m^2 - \left(3\,B_{30} + \frac{1}{2\cos^2\varphi_0}\right) p^2 - \left(7\,B_{30}\tan\varphi_0 + 4\,B_{04} + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{7}{6}\tan\varphi_0 + \frac{1}{6}\tan^3\varphi_0\right) m^3 - 3\left(6\,B_{30}\tan\varphi_0 + 4\,B_{04} + \tan\varphi_0\right) m\,p^2,\\
\frac{\partial y}{\partial m} &= 1 + 3\,B_{30}\,m^2 + \left(3\,B_{30} + \frac{\cos 2\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0}\right) p^2 + 4\left(\frac{5}{2}\,B_{30}\tan\varphi_0 + B_{04} + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{7}{24}\tan\varphi_0 + \frac{1}{24}\tan^3\varphi_0\right) m^3 + 2\left(\frac{9}{2}\,B_{30}\tan\varphi_0 + 6\,B_{04} + \frac{3}{4}\tan\varphi_0 + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{4}\tan^3\varphi_0\right) m\,p^2,\\
\frac{\partial y}{\partial p} &= \frac{\sin\varphi_0}{r_0}\,p + 2\left(3\,B_{30} + \frac{\cos 2\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0}\right) m\,p + 2\left(\frac{9}{2}\,B_{30}\tan\varphi_0 + 6\,B_{04} + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{3}{4}\tan\varphi_0 + \frac{1}{4}\tan^3\varphi_0\right) m^2 p + 4\,B_{04}\,p^3.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ihre Einführung in die Formel für die Flächenverzerrung

$$\sigma = \frac{r_0}{r}\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial m} - \frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial y}{\partial p}\right)$$

ergibt — ohne die Glieder 3. Ordnung in den Differentialquotienten —

$$\begin{aligned}
\sigma = \frac{r_0}{r}\Bigg[&\frac{r}{r_0} - 3\,B_{30}\,m^2 - \left(3\,B_{30} + \frac{1}{2\cos^2\varphi_0}\right) p^2 + 3\frac{r}{r_0}\,B_{30}\,m^2 + \frac{r}{r_0}\left(3\,B_{30} + \right.\\
&\left. + \frac{\cos 2\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0}\right) p^2 - \frac{\sin\varphi_0}{r_0^{\,2}}\frac{\partial r}{\partial m}\,p^2 + 6\,B_{30}\frac{\sin\varphi_0}{r_0}\,m\,p^2 - \frac{2}{r_0}\frac{\partial r}{\partial m}\left(3\,B_{30} + \right.\\
&\left. + \frac{\cos 2\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0}\right) m\,p^2\Bigg].
\end{aligned}$$

Werden bei der Ausführung der Formel für σ unter Anwendung der Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned}
r &= r_0 - \sin\varphi_0\,m,\\
r_0 &= \cos\varphi_0,\\
\frac{\partial r}{\partial m} &= -\sin\varphi_0 - \cos\varphi_0\,m,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Glieder 3. Ordnung mitgenommen, so folgt

$$\sigma = \frac{r_0}{r}\Big[\frac{r}{r_0} - 3\,B_{30}\,m^2 - 3\,B_{30}\,p^2 - \frac{1}{2\cos^2\varphi_0}\,p^2 + 3\,B_{30}\,m^2 - 3\,B_{30}\tan\varphi_0\,m^3 +$$

$$+ 3\,B_{30}\,p^2 + \frac{\cos 2\,\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0}\,p^2 - 3\,B_{30}\tan\varphi_0\,m\,p^2 - \tan\varphi_0\,\frac{\cos 2\,\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0}\,m\,p^2 + \tan^2\varphi_0\,p^2 +$$

$$+ \tan\varphi_0\,m\,p^2 + 6\,B_{30}\tan\varphi_0\,m\,p^2 + 6\,B_{30}\tan\varphi_0\,m\,p^2 + 2\tan\varphi_0\,\frac{\cos 2\,\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0}\,m\,p^2\Big]$$

woraus

$$\sigma = 1 - 3\,B_{30}\tan\varphi_0\,m^3 + \left(9\,B_{30}\tan\varphi_0 + \frac{3}{2}\tan\varphi_0 - \frac{1}{2}\tan^3\varphi_0\right) m\,p^2 \quad . . (4)$$

resultiert.

Die Glieder 3. Ordnung in der vorstehenden Formel stellen somit den Fehler dar, der bei der Abbildung der Flächen entsteht, wenn in den Abbildungsgleichungen Glieder 4. Ordnung vernachlässigt werden.

Der Beweis hiefür ist leicht erbracht. Setzt man nämlich die aus den Gliedern 4. Ordnung der Abbildungsgleichungen bei der partiellen Differation folgenden Glieder 3. Ordnung in die Formel für die Flächenverzerrung ein, so ergibt sich

$$\frac{r_0}{r}\Big[-\left(7\,B_{30}\tan\varphi_0 + 4\,B_{04} + \frac{7}{6}\tan\varphi_0 + \frac{1}{6}\tan^3\varphi_0\right)m^3 - 3\,(6\,B_{30}\tan\varphi_0 + 4\,B_{04} +$$

$$+ \tan\varphi_0)\,m\,p^2 + 4\,\frac{r}{r_0}\left(\frac{5}{2}\,B_{30}\tan\varphi_0 + B_{04} + \frac{7}{24}\tan\varphi_0 + \frac{1}{24}\tan^3\varphi_0\right)m^3 +$$

$$+ 2\,\frac{r}{r_0}\left(\frac{9}{2}\,B_{30}\tan\varphi_0 + 6\,B_{04} + \frac{3}{4}\tan\varphi_0 + \frac{1}{4}\tan^3\varphi_0\right)m\,p^2\Big],$$

d. i.

$$+ 3\,B_{30}\tan\varphi_0\,m^3 - \left(9\,B_{30}\tan\varphi_0 + \frac{3}{2}\tan\varphi_0 - \frac{1}{2}\tan^3\varphi_0\right) m\,p^2, \quad . . (4a)$$

also ebenfalls der Fehler in den Flächen, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen, so daß die Hinzunahme der Ausdrücke (4a) zur voranstehenden Formel (4) auf $\sigma = 1$ führt bis einschließlich Glieder 3. Ordnung.

Im einzelnen ergibt sich somit für den Fehler in den Flächen

$$\varepsilon = \sigma - 1$$

nach Einführung der Werte für den Koeffizienten B_{30} in die Formel (4)

1. bei der Abbildung durch eine sphäroidische Kalotte mit $B_{30} = -\frac{1}{12}$

$$\varepsilon_K = \frac{1}{4}\tan\varphi_0\,m^3 + \left(\frac{3}{4}\tan\varphi_0 - \frac{1}{2}\tan^3\varphi_0\right) m\,p^2;$$

2. bei der Abbildung durch Meridianstreifen mit $B_{30} = 0$

$$\varepsilon_M = \left(\frac{3}{2}\tan\varphi_0 - \frac{1}{2}\tan^3\varphi_0\right) m\,p^2;$$

3. bei der Abbildung durch Parallelstreifen mit $B_{30} = -\frac{1}{6}$

$$\varepsilon_P = \frac{1}{2} \tan \varphi_0 \, m^3 \qquad\qquad - \frac{1}{2} \tan^3 \varphi_0 \, m \, p^2.$$

In den bisher entwickelten Ausdrücken wurden die Längen des Meridianbogens m und des Parallelbogens p in Einheiten des Äquatorradius a eines Rotationsellipsoids gegeben gedacht. Da diese Größen jedoch im allgemeinen in einem in der Praxis geläufigeren Längenmaße angegeben werden, scheint es vorteilhaft, diese Ausdrücke hiefür umzustellen, womit sie sich, wie folgt, ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_K &= \frac{1}{4} \tan \varphi_0 \frac{m^3}{a^3} + \left(\frac{3}{4} \tan \varphi_0 - \frac{1}{2} \tan^3 \varphi_0\right) \frac{m}{a} \frac{p^2}{a^2}, \\ \varepsilon_M &= \left(\frac{3}{2} \tan \varphi_0 - \frac{1}{2} \tan^3 \varphi_0\right) \frac{m}{a} \frac{p^2}{a^2}, \\ \varepsilon_P &= \frac{1}{2} \tan \varphi_0 \frac{m^3}{a^3} - \frac{1}{2} \tan^3 \varphi_0 \frac{m}{a} \frac{p^2}{a^2}. \end{aligned}\right| \quad \ldots (5)$$

Angewendet auf die Abbildung eines sich nach allen Richtungen ziemlich gleich weit erstreckenden Landes mittlerer Größe, wie etwa Deutschland, Frankreich, Spanien, mit größten Nord-Süd-, bzw. Ost-West-Erstreckungen von rund 1000 km und mit $a = 6380\,km$ für den Äquatorradius des Besselschen Ellipsoides ergeben sich

1. bei der Abbildung durch eine sphäroidische Kalotte mit

$$m_{\max} = 500\,km, \quad p_{\max} = 500\,km$$

die in Tabelle 1 zusammengestellten Verzerrungen ε_K der Einheitsfläche.

Tabelle 1. Verzerrung der Einheitsfläche bei der Abbildung durch eine sphäroidische Kalotte

φ_0	ε_K	$1/\varepsilon_K$
0^0	0,000 000	∞
10	+ 0,000 084	+ 11 920
20	+ 0,000 163	+ 6 130
30	+ 0,000 232	+ 4 310
40	+ 0,000 262	+ 3 820
50	+ 0,000 166	+ 6 020
60	− 0,000 413	− 2 420
70	− 0,003 66	− 273

Man entnimmt dieser Tabelle, daß außer der Nullstelle für $\varphi_0 = 0^0$ noch eine weitere Nullstelle zwischen 50^0 und 60^0 vorkommt. Der ihr zugehörige Wert φ_0 folgt aus der ersten Gleichung (5) für $p = m$ mit

$$\varepsilon_K = 0 = \left(\tan\varphi_0 - \frac{1}{2}\tan^3\varphi_0\right)\frac{m^3}{a^3}.$$

Die drei Wurzeln dieser kubischen Gleichung sind

$$\tan\varphi_0 = 0 \text{ und } \tan\varphi_0 = \pm\sqrt{2};$$

ihnen entsprechen der schon bekannte Wert $\varphi_0 = 0^0$ und die beiden symmetrischen Werte $\varphi_0 = \pm 54^0\,44'$.

Zwischen den Nullstellen für $\varphi_0 = 0^0$ und $\varphi_0 = \pm 54^0\,44'$ liegt je ein relatives Maximum. Seine Größe errechnet sich aus der Gleichung

$$\frac{d\,\varepsilon_K}{d\,\varphi_0} = 0 = \frac{1}{\cos^2\varphi_0}\left(1 - \frac{3}{2}\tan^2\varphi_0\right)$$

mit

$$\tan\varphi_{0\,\max} = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \text{ d. i. } \varphi_{0\,\max} = \pm 39^0\,14'.$$

Die diesem Betrag zugehörige Verzerrung der Einheitsfläche ergibt sich mit

$$\varepsilon_{K\,\max} = +0{,}000\,262 = +\frac{1}{3820}.$$

2. Bei der Abbildung durch Meridianstreifen mit

$$m_{\max} = 500\,km,\quad p_{\max} = 120\,km$$

folgen die in Tabelle 2 angeführten Verzerrungsgrößen ε_M der Einheitsfläche.

Tabelle 2. Verzerrung der Einheitsfläche bei der Abbildung durch Meridianstreifen

φ_0	ε_M	$1/\varepsilon_M$
0^0	0,000 0000	∞
10	+ 0,000 0073	+ 137 000
20	+ 0,000 0145	+ 69 000
30	+ 0,000 0214	+ 46 700
40	+ 0,000 0267	+ 37 500
50	+ 0,000 0261	+ 38 300
60	0,000 0000	∞
70	− 0,000 174	− 5 750

In dieser Tabelle scheinen zwei Nullstellen auf. Sie folgen natürlich auch aus der zweiten Gleichung (5) mit

$$\varepsilon_M = 0 = (3\tan\varphi_0 - \tan^3\varphi_0)\frac{1}{2}\,\frac{m}{a}\,\frac{p^2}{a^2},$$

die durch die drei Wurzeln

$$\tan\varphi_0 = 0 \text{ und } \tan\varphi_0 = \pm\sqrt{3}$$

erfüllt wird. Die ihnen entsprechenden Werte φ_0 sind die bereits in Tabelle 2 vorhandenen Werte $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_0 = +60^0$ sowie der zu diesem symmetrische Wert $\varphi_0 = -60^0$.

Die zwischen den Nullstellen liegenden relativen Maxima errechnen sich aus

$$\frac{d\,\varepsilon_M}{d\,\varphi_0} = 0 = \frac{1}{\cos^2\varphi_0}(3 - 3\tan^2\varphi_0)$$

mit

$$\tan\varphi_{0\,\max} = \pm 1, \text{ d. i. } \varphi_{0\,\max} = \pm 45^0.$$

Die dieser Größe entsprechende Verzerrung der Einheitsfläche beträgt

$$\varepsilon_{M\,\max} = +0{,}000\,0277 = +\frac{1}{36\,100}.$$

3. Schließlich resultieren bei der Abbildung durch Parallelstreifen mit

$$m_{\max} = 120\,km, \quad p_{\max} = 500\,km$$

die in Tabelle 3 ausgewiesenen Verzerrungsgrößen ε_P der Einheitsfläche.

Tabelle 3. Verzerrung der Einheitsfläche bei der Abbildung durch Parallelstreifen

φ_0	ε_P	$1/\varepsilon_P$
0^0	0,000 000 000	∞
10	+ 0,000 000 269	+ 3,720 000
20	− 0,000 001 57	− 637 000
30	− 0,000 009 14	− 109 000
40	− 0,000 031 3	− 31 900
50	− 0,000 093 8	− 10 700
60	− 0,000 293	− 3 410
70	− 0,001 187	− 842

Auch aus dieser Tabelle ist zu ersehen, daß für drei Werte φ_0 die Verzerrung der Einheitsfläche verschwindet. Diese Werte errechnen sich aus der dritten Gleichung (5)

$$\varepsilon_P = 0 = \left(\tan\varphi_0 - \frac{p^2}{m^2}\tan^3\varphi_0\right)\frac{m^3}{2\,a^3}$$

mit

$$\tan\varphi_0 = 0 \text{ und } \tan\varphi_0 = \pm\frac{m}{p},$$

woraus sich für φ_0 die Beträge $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_0 = \pm 13^0\,30'$ ergeben.

Die relativen Maxima zwischen diesen Nullstellen folgen aus der Gleichung

$$\frac{d\,\varepsilon_P}{d\,\varphi_0} = 0 = \frac{1}{\cos^2\varphi_0}\left(1 - \frac{3\,p^2}{m^2}\tan^2\varphi_0\right)$$

mit

$$\tan\varphi_{0\,\max} = \pm\frac{m}{p\sqrt{3}}, \text{ d. i. } \varphi_{0\,\max} = \pm 7^0\,53'.$$

Daraus erhält man die zugehörige Verzerrung der Einheitsfläche mit

$$\varepsilon_{P\,\max} = +\,0{,}000\,000\,323 = +\,\frac{1}{3\,090\,000}.$$

2. Die Genauigkeit des rechten Winkels zwischen den Bildern der Meridiane und Parallelkreise

In gleicher Weise wie bei der Flächenverzerrung läßt sich der Fehler des rechten Winkels zwischen den Bildern der Meridiane und Parallelkreise herleiten.

Die Verzerrung dieses Winkels wird allgemein durch die Formel

$$\sin \mathfrak{J} = \frac{1}{h\,k}\,\frac{r_0}{r}\left(\frac{\partial x}{\partial m}\,\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial m}\,\frac{\partial y}{\partial p}\right)$$

gegeben. Voraussetzungsgemäß wurde $\mathfrak{J}$ und damit auch $\sin \mathfrak{J}$ gleich Null bestimmt sowohl bei der Herleitung der Glieder 3. Ordnung als auch der Glieder 4. Ordnung in den Abbildungsgleichungen. Werden nun die aus den bis Glieder 3. Ordnung gebildeten Abbildungsgleichungen hergeleiteten partiellen Differentialquotienten — die bis einschließlich Glieder 2. Ordnung gehen — in die Formel für $\sin \mathfrak{J}$ eingeführt, so ergibt sich durch deren Ausführung bis Glieder 3. Ordnung einschließlich der Sinus desjenigen Winkels $\mathfrak{J}$, um den der Winkel zwischen den Bildern der Meridiane und Parallelkreise bei Vernachlässigung der Glieder 4. Ordnung in den Abbildungsgleichungen von einem rechten Winkel abweicht. Dieser Winkel $\mathfrak{J}$ ergibt sich demnach aus der Formel

$$\sin \mathfrak{J} = \frac{1}{h\,k}\,\frac{r_0}{r}\Bigg[\frac{r}{r_0^2}\,\frac{\partial r}{\partial m}\,p - 6\,\frac{r}{r_0}\,B_{30}\,m\,p - 3\,\frac{1}{r_0}\,B_{30}\,\frac{\partial r}{\partial m}\,m^2\,p -$$

$$-\,\frac{1}{r_0}\,\frac{\partial r}{\partial m}\left(3\,B_{30} + \frac{1}{2\cos^2\varphi_0}\right)p^3 + \frac{\sin\varphi_0}{r_0}\,p + 2\left(3\,B_{30} + \frac{\cos 2\,\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0}\right)m\,p\,+$$

$$+\,3\,B_{30}\,\frac{\sin\varphi_0}{r_0}\,m^2 p + \frac{\sin\varphi_0}{r_0}\left(3\,B_{30} + \frac{\cos 2\,\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0}\right)p^3\Bigg];$$

bei Anwendung der bekannten Entwicklung

$$r\,\frac{\partial r}{\partial m} = -\,r_0\sin\varphi_0 - \cos 2\,\varphi_0\,m + \sin 2\,\varphi_0\,m^2 + \ldots$$

erhält man

$$\sin \mathfrak{J} = \frac{1}{h\,k}\,\frac{r_0}{r}\Bigg[-\,\frac{\sin\varphi_0}{r_0}\,p - \frac{\cos 2\,\varphi_0}{r_0^2}\,m\,p + \frac{\sin 2\,\varphi_0}{r_0^2}\,m^2\,p - 6\,B_{30}\,m\,p\,+$$

$$+\,6\,B_{30}\tan\varphi_0\,m^2\,p + 3\,B_{30}\tan\varphi_0\,m^2\,p + 3\,B_{30}\tan\varphi_0\,p^3 + \tan\varphi_0\,\frac{1}{2\cos^2\varphi_0}\,p^3\,+$$

$$+\,\frac{\sin\varphi_0}{r_0}\,p + 6\,B_{30}\,m\,p + \frac{2\cos 2\,\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0}\,m\,p + 3\,B_{30}\tan\varphi_0\,m^2 p + 3\,B_{30}\tan\varphi_0\,p^3\,+$$

$$+\,\tan\varphi_0\,\frac{\cos 2\,\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0}\,p^3\Bigg]$$

woraus nach passender Zusammenfassung

$$\sin \mathfrak{J} = (1 + 6\,B_{30})\tan\varphi_0\,(2\,m^2\,p + p^3) \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

folgt. Dieser Ausdruck gibt den Fehler im rechten Winkel zwischen den Bildern der Meridiane und Parallelkreise bei Vernachlässigung von Gliedern 4. Ordnung in den Abbildungsgleichungen.

Trägt man nun zur Erprobung die aus den Gliedern 4. Ordnung der Abbildungsgleichungen bei der partiellen Differentiation folgenden Glieder 3. Ordnung in die Formel für $\mathfrak{J}$ ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{h\,k}\,\frac{r_0}{r}\left[-3\frac{r}{r_0}\left(7\,B_{30}\tan\varphi_0+4\,B_{04}+\frac{7}{6}\tan\varphi_0+\frac{1}{6}\tan^3\varphi_0\right)m^2\,p-\right.$$
$$-\frac{r}{r_0}(6\,B_{30}\tan\varphi_0+4\,B_{04}+\tan\varphi_0)\,p^3+2\left(\frac{9}{2}\,B_{30}\tan\varphi_0+6\,B_{04}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{3}{4}\tan\varphi_0+\frac{1}{4}\tan^3\varphi_0\right)m^2p+4\,B_{04}\,p^3\right]$$

d. i.
$$-(1+6\,B_{30})\tan\varphi_0\,(2\,m^2\,p+p^3). \qquad \text{(6a)}$$

Es ist dies jener Betrag, dessen Hinzufügung zum voranstehend hergeleiteten Ausdruck (6) für die Verzerrung des rechten Winkels diese nun gleich Null macht bis Glieder 4. Ordnung einschließlich in den Abbildungsgleichungen, bzw. Glieder 3. Ordnung in den Verzerrungsgrößen.

Für die Systeme geringster Streckenverzerrung folgen somit die Formeln für die Verzerrung des rechten Winkels zwischen den Bildern der Meridiane und Parallelkreise nach Eintragen der Werte für den Koeffizienten B_{30} in die Gleichung (6)

1. bei der Abbildung durch eine sphäroidische Kalotte mit $B_{30}=-\frac{1}{12}$

$$\sin\mathfrak{J}_K=\frac{1}{2}\tan\varphi_0\,(2\,m^2+p^2)\,p;$$

2. bei der Abbildung durch Meridianstreifen mit $B_{30}=0$

$$\sin\mathfrak{J}_M=\tan\varphi_0\,(2\,m^2+p^2)\,p;$$

3. bei der Abbildung durch Parallelstreifen mit $B_{30}=-\frac{1}{6}$.

$$\sin\mathfrak{J}_P=0.$$

Wird wieder vom Äquatormaß als Einheit auf ein konventionelles Längenmaß übergegangen, so ergeben sich obige Ausdrücke mit

$$\left.\begin{aligned}\sin\mathfrak{J}_K&=\frac{1}{2}\tan\varphi_0\left[2\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{p}{a}\right)^2\right]\frac{p}{a},\\ \sin\mathfrak{J}_M&=\tan\varphi_0\left[2\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{p}{a}\right)^2\right]\frac{p}{a},\\ \sin\mathfrak{J}_P&=0.\end{aligned}\right\}\qquad \text{(7)}$$

Sie verschwinden alle für $\varphi_0=0$.

Auf das vorhin gewählte Beispiel angewendet, ergibt sich für den Wert $\varphi_0 = 45^0$

1. bei der Abbildung durch eine sphärische Kalotte mit

$$m_{\max} = 500\ km,\quad p_{\max} = 500\ km,$$

$$\sin \mathfrak{J}_K = 0{,}000\,721,\ \text{also}\ \mathfrak{J}_K = 2'\,29'';$$

2. bei der Abbildung durch Meridianstreifen mit

$$m_{\max} = 500\ km,\quad p_{\max} = 120\ km,$$

$$\sin \mathfrak{J}_M = 0{,}000\,237,\ \text{also}\ \mathfrak{J}_M = 0'\,49'';$$

3. bei der Abbildung durch Parallelstreifen

$$\sin \mathfrak{J}_P = 0,\ \text{also}\ \mathfrak{J}_P = 0.$$

Für die Werte $\varphi_0 = 40^0$, bzw. 50^0 ergeben sich Beträge gleicher Größenordnung, nämlich $\mathfrak{J}_K = 2'\,05''$, bzw. $2'\,57''$, $\mathfrak{J}_M = 0'\,41''$, bzw. $0'\,58''$, $\mathfrak{J}_P = 0$.

3. *Schlußfolgerungen*

Von den drei betrachteten Systemen geringster Streckenverzerrung ist die Abbildung durch Meridianstreifen als die günstigste zu bezeichnen. Es sind nicht nur die zugehörigen Abbildungsgleichungen die einfachsten — ein Umstand, der für die praktische Anwendung jeder Abbildung besonders wichtig ist —, sondern es entstehen hier bei der Vernachlässigung von Gliedern 4. Ordnung in den Abbildungsgleichungen in mittleren Breiten die kleinsten Fehler in den Flächen. Die kleinsten Verzerrungen des Gradnetzes ergeben sich wohl bei der Abbildung durch Parallelstreifen — sie sind dort in den Gliedern 3. Ordnung überhaupt Null; dieser Umstand ist aber weniger wichtig als kleinste Flächenfehler, denn eine allfällige Netzverzerrung wirkt sich nicht auf die Genauigkeit der Flächen, sondern nur in der Schönheit des Netzes aus. Außerdem beträgt der Maximalbetrag der Verzerrung des rechten Winkels zwischen den Bildern der Meridiane und Parallelkreise für Meridianstreifen in Breiten unter 50^0 weniger als eine Minute, eine Größe, die bei der Darstellung eines Landes ohne besondere Hilfsmittel überhaupt nicht feststellbar ist.

Beschränkt man sich bei der Abbildung durch eine sphäroidische Kalotte auf Gebiete unter 63^0 Breite, bei der Abbildung durch Meridianstreifen auf Gebiete unter 76^0 Breite und bei der Abbildung durch Parallelstreifen auf Gebiete unter 60^0 Breite, so bleibt, wie durch einfache Überschlagsrechnungen festgestellt werden kann, die Verzerrung der Einheitsfläche stets kleiner als $^1/_{3800}$. Es wird also der größte Fehler in den Flächen bei Vernachlässigung der Glieder 4. Ordnung in den Abbildungsgleichungen durch

$$\varepsilon_{K\,\max} \leqq \frac{1}{3800} < 0{,}03\%$$

gegeben. Wenn also bei der Verwendung solcher Abbildungen Vernachlässigungen von 0,03% zulässig sind, so können die Glieder 4. Ordnung unberücksichtigt bleiben.

In der Regel wird man den Inhalt unregelmäßig begrenzter Flächen aus Karten mit Hilfe eines Polarplanimeters bestimmen. Seine Genauigkeit wird durch die Formel

$$\Delta F = \pm 0{,}02 \sqrt{F}$$

gegeben[3]), wobei F die umfahrene Fläche bedeutet. Da der gestreckte Fahrarm eines Polarplanimeters r rund 36 cm beträgt, so ergibt sich bei „Pol innen" für die größte überhaupt umfahrbare Fläche ein Ausmaß von $r^2 \pi = 4071{,}5\ cm^2$ und somit für

$$\Delta F = \pm 0{,}02 \,.\, 63{,}8\ cm^2 = \pm 1{,}276\ cm^2,$$

d. i. in bezug auf die umfahrene Gesamtfläche $0{,}0313\% > 0{,}03\%$.

Die größte Verzerrung, die es im Gesamtbereiche aller betrachteten Abbildungen überhaupt gibt, ist kleiner als 0,03%; sie wird im allgemeinen viel geringer sein. Andererseits ist der kleinste Fehler bei der planimetrischen Bestimmung einer Fläche größer als 0,03%; er wird im allgemeinen mehr betragen. Es können daher, wenn die abgebildeten Teile des Rotationsellipsoids durch planimetrische Bestimmungen berechnet werden, die Glieder 4. Ordnung in den Abbildungsgleichungen fortgelassen werden. Man wird sie nur dann mitnehmen, wenn die Flächen nicht auf mechanische Art, sondern durch rechnerische Methoden, beispielsweise aus den rechtwinkeligen, ebenen Koordinaten x, y der abgebildeten Punkte, bestimmt werden sollen, bzw. dann, wenn sich der abzubildende Bereich über die angegebenen Grenzbreiten erstreckt.

Der Maßstab der Abbildung ist für die voranstehenden Überlegungen im allgemeinen gleichgültig; insbesondere auch deshalb, weil die Fehlerbetrachtungen für die jeweils ungünstigste Stelle der Karte angestellt wurden und bei einer tatsächlichen Ausmessung durch die Umfahrung einer Fläche von endlichen Dimensionen der Fehler der dargestellten Fläche stets kleiner als der errechnete Maximalwert ist.

Mechanische Koordinatenrechnung

Von Ingenieurkonsulent für Vermessungswesen Dipl.-Ing. Hugo Bohrn, Gesellschafter der Alpenphotogrammetrie Ges. m. b. H., Wels, Oberösterreich

Während es früher üblich war, die Aufnahmen für den Kataster nach den gemessenen Maßen zu kartieren, zeigt die moderne Katastertechnik das Bestreben, alle irgendwie durch Winkel- und Streckenmaße aufgenommenen Punkte der Erdoberfläche durch rechtwinkelige Koordinaten festzulegen und nach diesen zu kartieren.

Den Vorteil dieses Verfahrens weiß jeder Vermessungsingenieur zu schätzen, der vor der Notwendigkeit steht, auf graphischem Weg entstandene

[3]) Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde II/1, Stuttgart 1931, S. 204.