

Paper-ID: VGI_194805



Mercator, Lambert, Gauß, Tissot

Friedrich Hopfner ¹

¹ *Technische Hochschule in Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **36** (3–4), S. 49–55

1948

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Hopfner_VGI_194805,  
  Title = {Mercator, Lambert, Gau{\ss}, Tissot},  
  Author = {Hopfner, Friedrich},  
  Journal = {{{\0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {49--55},  
  Number = {3--4},  
  Year = {1948},  
  Volume = {36}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppe Vermessungswesen), der Österreichischen Kommission für Internationale Erdmessung und der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

Hofrat Prof. Dr. Dr. Dr. h. c. E. D o l e ž a l,
Präsident Ing. K. L e g o und o. ö. Professor Ing. Dr. H. R o h r e r

Nr. 3 und 4

Baden bei Wien, im Dezember 1948

XXXVI. Jahrg.

Mercator, Lambert, Gauß, Tissot

**Antrittsrede des Rector Magnificus der Technischen Hochschule in Wien
Prof. Dr. F. Hopfner bei der am 30. Oktober 1948 stattgefundenen
feierlichen Inauguration**

Meine Damen und meine Herren! Als Rector des eben begonnenen Studienjahres obliegt mir nach herkömmlichem Gebrauch, gewissermaßen eine Antrittsvorlesung zu halten. Die Lösung dieser Aufgabe ist nicht ohne Schwierigkeiten durchführbar, weil Forderungen zu erfüllen sind, die einander — wenigstens zum Teile — ausschließen. Das Thema des Vortrages soll nämlich in der Regel dem Lehrgebiete entnommen werden, das der Rector in seiner Eigenschaft als Professor der Hochschule vertritt; natürlich soll der Vortrag wissenschaftliches Niveau haben, aber doch auch leicht verständlich sein. Da das Auditorium den verschiedensten Sektoren der Hochintelligenz angehört, ist letztere Forderung sehr schwer, fast möchte ich sagen, kaum erfüllbar, zumal ja die dem Vortragenden heutzutage in der Regel zu Gebote stehenden Hilfsmittel zur Veranschaulichung und Belebung seines Vortragsthemas, wie Bilder, Diagramme, Karten u. dgl., mir heute, im Hinblick auf die ortsbedingten Verhältnisse, nicht zur Verfügung stehen; ja nicht einmal eine einfache Schultafel kann ich benützen! Ich hoffe, meine Damen und Herren, Sie werden gewiß Verständnis für die Schwierigkeiten haben, mit denen ich als Professor der Höheren Geodäsie und Sphärischen Astronomie bei der Wahl des Themas zu kämpfen hatte und denen es heute beim Vortrage auszuweichen gilt. Aber noch eine Forderung wird an den vortragenden Rector gestellt: Der Vortrag soll nicht nur, wie schon bemerkt, Niveau haben und dabei verständlich, ich möchte fast sagen, gemeinverständlich sein, er soll auch beileibe nicht zu lang, eher kurz sein. Ganz begreiflich, denn ein langer Vortrag ermüdet, wenn er

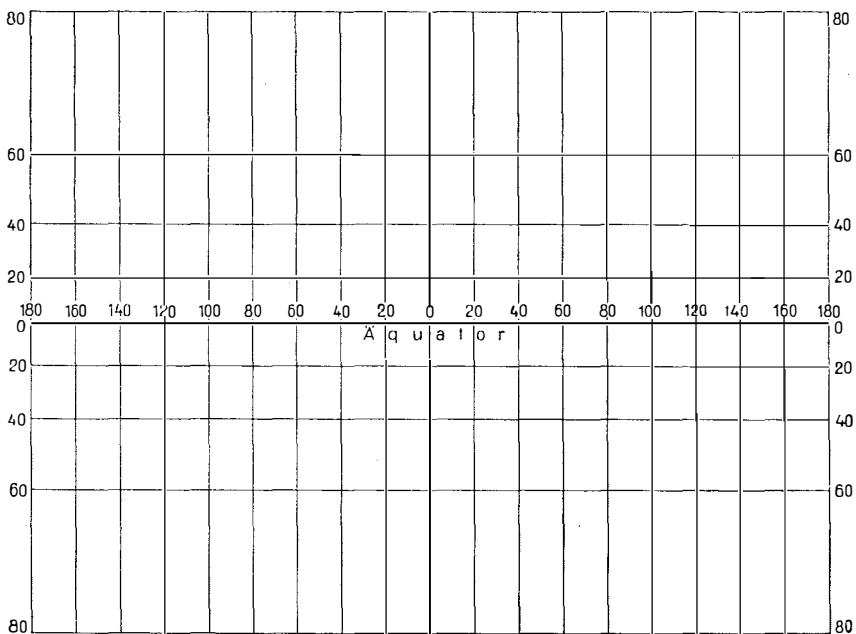
noch so viel Interesse wachruft, und langweilt alle jene Zuhörer entsetzlich, die den Ausführungen des Vortragenden nicht folgen konnten oder wollten. Und dieser Teil des Auditoriums bei einem Festvortrage wird erfahrungsgemäß keineswegs von der Minorität der Zuhörer gestellt. Gewiß muß auch ihrer Stimmung Rechnung getragen werden, denn sie sind es, die später die opinio communis über den Vortrag zu tiefst beeinflussen.

Zu den Gegenständen, die ich auftragsgemäß an unserer Technischen Hochschule zu lehren habe, zählt auch die Kartenentwurfslehre, die Kartographie, wie sie gewöhnlich genannt wird. Aber diese sogenannte Kartographie, wie ich sie zu lehren habe, befaßt sich nicht mit der — ich möchte sagen — kunstgewerblichen Herstellung der Landkarten und deren technischen Ver vielfältigung. Meine Aufgabe in der Vorlesung ist es vielmehr, die Methoden zur Übertragung des Gradnetzes auf der abzubildenden Erdkugel in die Zeichenebene zu entwickeln und die bei solcher Abbildung auftretenden Verzerrungen in den Strecken, Flächen und Winkeln zu untersuchen. Leider ist nämlich, wie man zu sagen pflegt, die Kugel in die Ebene nicht abwickelbar oder in mathematischer Terminologie: verbiegbar; schneidet man sie längs eines Meridians vom Süd- zum Nordpol hin auf, so läßt sich die so behandelte Erdkugel nicht ohne Verzerrung ihrer Meridiane und Parallelkreise und der rechten Winkel, die diese Kreise miteinander einschließen, in die Ebene ausbreiten. Unter diesem Gesichtspunkte unterscheidet sich die Kugel sehr unvorteilhaft von einem Kreiszyylinder oder Kreiskegel, die längs einer Mantellinie aufgeschnitten sich mühelos ohne Verzerrung in die Ebene ausbreiten, nämlich verbiegen lassen. Gelingt es, die Erdkugel auf einen solchen Zylinder oder Kegel abzubilden, so ist dieses Bild ohne Verzerrungen in die Ebene übertragbar; leider ist aber die Kugel auch auf den Zylinder oder den Kegel nicht verbiegbar, so daß es unmöglich ist, auf dem Umwege über Zylinder oder Kegel die Kugel ohne Verzerrungen in die Ebene abzubilden. Aber die Erfahrung hat schon sehr frühzeitig gelehrt, daß man die Erdkugel so abbilden kann, daß entweder die Winkel in ihren Punkten oder beliebig auf ihr angenommene Flächen ihrem Inhalte nach unverändert in die Ebene übertragen werden; beides gemeinsam läßt sich nicht erreichen, weil eben die Kugel in die Ebene nicht verbiegbar ist. Bleiben bei der Abbildung die Winkel im Bildpunkt erhalten, so spricht man von konformer, das heißt winkeltreuer Abbildung; erfahren bei der Abbildung die Flächeninhalte keine Verzerrung, so hat man es mit der äquivalenten, nämlich flächentreuen Abbildung der Kugel in die Ebene zu tun. Man nennt die Abbildung aphyllaktisch, wenn sie weder konform noch äquivalent ist.

Nach diesem Exkurs, meine Damen und Herren, komme ich endlich dazu, Ihnen zu verraten, womit ich Ihre Aufmerksamkeit für ganz kurze Zeit in Anspruch zu nehmen gedenke. Ich will sozusagen den roten Faden bloßlegen, der sich aus dem Zeitalter der Renaissance zu unserem modernsten Kartenentwurf hinzieht, und will insbesondere jenen letzten, großen Fortschritt ins richtige Licht rücken, den vor ungefähr zwei Menschenaltern Tissot

dadurch erzielt hat, daß er die Abbildung von zwei beliebigen analytischen Flächen aufeinander vom Gesichtspunkte des Kartographen aus untersuchte. Ich kann nicht verschweigen, daß die deutsche Wissenschaft — ich sollte eigentlich sagen, die reichsdeutsche Kartographie — von dieser Errungenschaft keinen weiteren Gebrauch gemacht hat; und dabei liegt doch die Sache so, daß heutzutage ohne T i s s o t eine rationell betriebene Kartenentwurfslehre überhaupt gar nicht mehr denkbar ist.

Wie bereits bemerkt, will ich nur den roten Faden bloßlegen, der sich in der historischen Entwicklung der Kartenentwurfslehre bis zum modernsten Kartenentwurf der Gegenwart verfolgen läßt. Dieser Vorsatz enthebt mich aber nicht der Feststellung, daß die recht beachtlichen Errungenschaften der griechischen Antike im Kartenwesen in den Stürmen der Völkerwanderung bedauerlicherweise gerade im abendländischen Kulturkreise völlig in Vergessenheit geraten waren. Erst im Zeitalter der Renaissance erwachte wieder das Interesse an Kartenentwürfen und erfuhr unter dem Einflusse der damals in erster Ausbildung begriffenen astronomischen Navigation im Zeitalter der großen geographischen Entdeckungen einen kräftigen Auftrieb. In diesem Zeitalter, nämlich 1569, war es Gerhard Kremer, genannt Mercator, gewesen, der mit der nach ihm benannten Mercatorkarte die damals von der Navigation allgemein benützte Plattkarte verdrängte und damit eine Projektionsart schuf, die nicht nur bis in die Gegenwart herein allen Seekarten zu Grunde liegt, sondern auch für den modernsten Kartenentwurf, über den wir derzeit verfügen, von prinzipieller Bedeutung ist.



Gradnetz in Mercator-Projektion

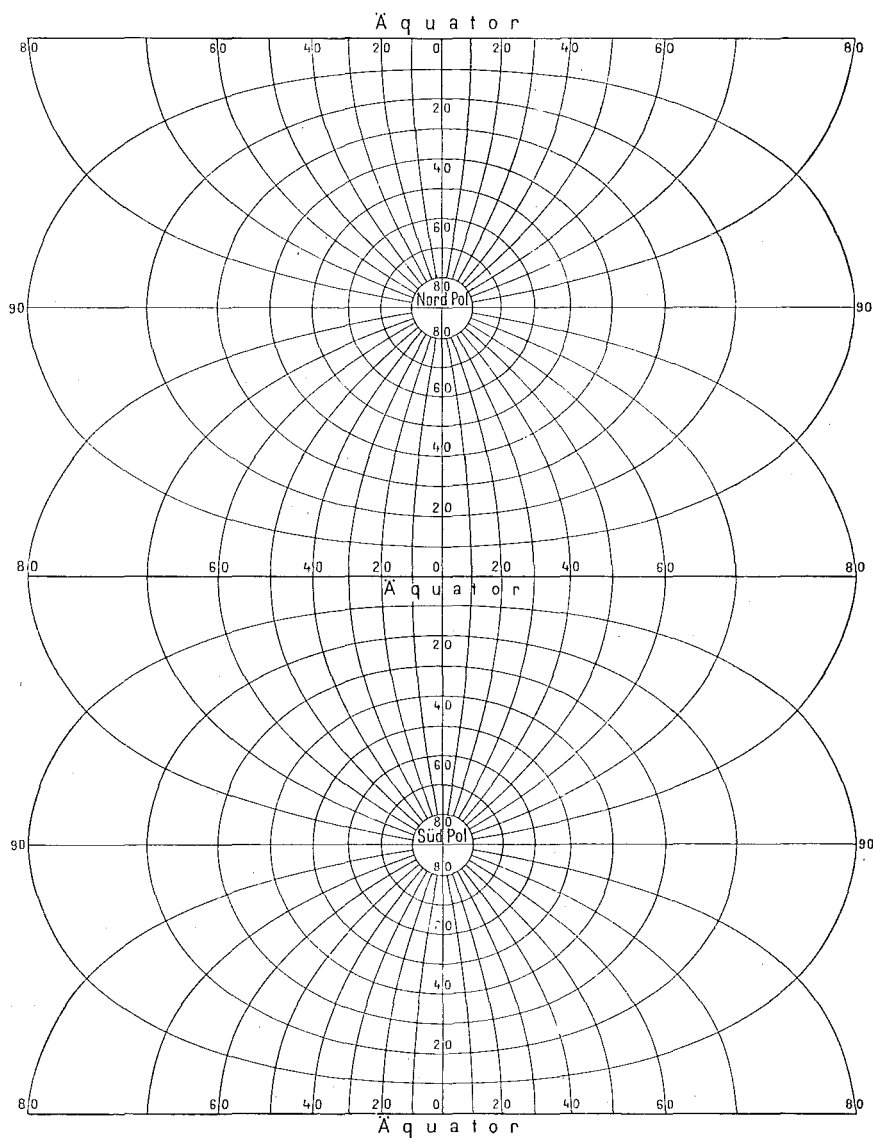
Die Mercatorkarte ist eine konforme Zylinderprojektion, die die Meridiane und Parallelkreise in zwei Scharen zueinander senkrechter Geraden abbildet; aber nur die Meridiane haben in der Karte äquidistante Geraden zu Bildern, die Anordnung der Parallelkreise in der Karte wird durch ein logarithmisches Gesetz bestimmt. Hierin liegt der Grund, daß trotz der Konformität der Abbildung die Strecken- und damit auch die Flächenverzerrung mit wachsenden Breiten unbegrenzt zunimmt. Die Karte ist infolgedessen für die Kartierung polnaher Gebiete ganz ungeeignet.

Um diesem Übelstande abzuweichen, hat um das Jahr 1772 herum Lambert der Zylinderachse, die bei der Mercatorprojektion mit der Rotationsachse der Erde zusammenfällt, eine zu dieser senkrechte Richtung gegeben, indem er die Erdkugel vom Zylinder entlang eines Meridians berühren ließ und im übrigen bei der Abbildung die Prinzipien Mercators zur Anwendung brachte. Das Kartenbild ist nun ein ganz anderes; die beiden Erdpole bilden sich in Punkte ab und die Meridiane in Umgebung des berührten Meridians — man nennt ihn den Mittelmeridian — in Kurven, die sich nur wenig von Kreisbogen unterscheiden. Auch diese Karte ist konform und zur Kartierung solcher Gebiete der Erde vorzüglich geeignet, die vom Mittelmeridian durchschnitten werden und sich nicht zu weit gegen Ost und West hin erstrecken. Denn mit zunehmender geographischer Länge beiderseits des Mittelmeridians nimmt die Strecken- und Flächenverzerrung unbegrenzt zu. Die Abbildung wird offensichtlich nach Meridianstreifen symmetrisch zum Mittelmeridian vorgenommen.

Dieser Zylinderprojektion war es beschieden, bei der weiteren Entwicklung der Kartographie eine wichtige Rolle zu spielen. Hatte es sich nämlich bis in die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts immer nur darum gehandelt, weite Ländergebiete in einem sehr kleinen Maßstabe wie 1 : 100.000 und noch kleiner abzubilden, so sah sich Gauß bei seiner Triangulierung in Hannover erstmalig vor die Aufgabe gestellt, ein kleines Land in einem sehr großen Maßstabe zu kartieren. Hierbei durfte auch die Abweichung der Erdfigur von der Kugelgestalt nicht unberücksichtigt bleiben. Die sich einstellende Aufgabe bestand — kurz gesagt — darin, ein abgeplattetes Rotationsellipsoid konform in die Ebene abzubilden, und zwar konform deshalb, weil die Geodäsie aus Gründen, die hier unerörtert bleiben können, konformen Karten für die Lösung ihrer Aufgaben den Vorzug gibt. Gauß löste die Aufgabe in zwei Schritten; er bildete das Ellipsoid zunächst konform auf die Kugel ab; denn die konforme Abbildung der Kugel in die Ebene nach Meridianstreifen — das ist der zweite Schritt — war ja seit den Zeiten Lamberts wohl bekannt.

Die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel zählt mit zu den größten Leistungen von Gauß. Denn er rollte damit das Problem der konformen Abbildung zweier krummen Flächen aufeinander, das bereits 1781 Lagrange beschäftigt hatte, wieder auf und löste es 1822 in einem speziellen Falle. Viele Jahre hindurch hat man an diesem Verfahren in zwei Schritten festgehalten. Später, in der Mitte des 19. Jahrhunderts, haben sich Ossian Bonnet, dann Riemann und in der Folgezeit bis in die Gegenwart herein immer wieder die

meisten bedeutenden Mathematiker mit dem Problem der konformen Abbildung zweier Flächen aufeinander befaßt, ohne daß die Kartenentwurfsleher aus ihren Arbeiten einen Nutzen gezogen oder einen Antrieb empfangen hätte. Erst als Tissot in seinem 1881 erschienenen *Mémoire sur la représentation des surfaces* die Abbildung zweier Flächen aufeinander unter besonderer Berücksichtigung des kartographischen Gesichtspunktes behandelte, brach gewissermaßen ein neues Zeitalter für die Kartographie an, da sie in dem Buche nicht nur die für sie wichtigsten und brennendsten Fragen beantwortet vorfand, sondern auch alle Grundlagen für den Entwurf neuer Projektionen und ihre Untersuchung hinsichtlich der nun einmal unvermeidbaren Verzerrungen.



Gradnetz in Lambert's konformer querachsiger Zylinderprojektion

Tissots Abbildungslehre liegen zwei überaus einfache, von ihm erstmalig formulierte Sätze zu Grunde:

1. Jeder Kreis mit dem abzubildenden Punkt als Mittelpunkt geht bei der Abbildung — nach welchem Gesetze sie auch immer vorzunehmen ist — in eine Ellipse über, deren Mittelpunkt der Bildpunkt ist; diese Ellipse wird die Tissotsche Indikatrix genannt.
2. Wenn die Abbildung nicht konform ist, so gibt es im abzubildenden Punkte immer zwei und nur zwei aufeinander senkrechte Kreisradien, die im Bilde wieder in zwei zueinander senkrechte Richtungen, nämlich in die Achsen der Indikatrix übergehen. Alle übrigen im abzubildenden Punkte senkrechten Radien werden bei der Abbildung in konjugierte Durchmesser der Indikatrix verwandelt.

Auf diesen beiden Sätzen baut sich das ganze Lehrgebäude der modernen Kartenentwurfslehre in streng logischer Folgerichtigkeit auf. Ich würde aber zu weitläufig werden, wenn ich Sie, meine Damen und Herren, schrittweise von Erkenntnis zu Erkenntnis führen wollte, und muß mich daher auf die Formulierung der wichtigsten Ergebnisse Tissots beschränken. Leicht läßt sich erschließen, daß bei konformer Abbildung die Indikatrix ein Kreis ist, also die beiden Halbachsen der Indikatrix einander gleich sind. Zusammen mit der Forderung, daß die Bilder der Meridiane und Parallelkreise in der Ebene einander auch senkrecht schneiden müssen — die Abbildung ist ja winkeltreu — ergeben sich — wie zu erwarten ist — die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, in deren allgemeinem Integral die Gesamtheit aller konformen Abbildungen enthalten ist. Bei äquivalenter Abbildung wieder ist die Indikatrix eine Ellipse, deren Halbachsen einander reziprok sind. Diese Bedingung führt auf eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren allgemeines Integral zur Kenntnis aller äquivalenten Abbildungen führt. Hiemit ist die Frage nach allen überhaupt möglichen konformen und äquivalenten Abbildungen endgültig beantwortet. Aber auch das inverse Problem, nämlich die Entscheidung darüber, ob eine Abbildung konform, äquivalent oder keines von beiden ist, kann, sobald nur die Abbildungsgleichungen vorliegen, durch einige Differentiationsprozesse erledigt werden. Es fehlt mir nur an der Zeit, um auch noch andere Aufgaben der Kartenentwurfslehre anzuführen, deren Lösung früher wahrscheinlich an unüberwindlichen Schwierigkeiten gescheitert wäre, aber heutzutage möglich geworden ist.

Wie ich schon sagte, ist vor fast 70 Jahren für die Kartographie geradezu ein neues Zeitalter angebrochen. Neue Kartenentwürfe können jetzt, was früher nicht möglich war, sozusagen auf Bestellung geliefert werden; dem Auftraggeber obliegt nur die Angabe der von ihm gewünschten Eigenschaften der neuen Karte, die einander freilich nicht widersprechen dürfen; beispielsweise darf er von ihr nicht verlangen, daß sie gleichzeitig konform und äquivalent sein soll, da ja weder die Kugel noch das Ellipsoid in die Ebene verbiegbare sind. Aber er kann eine Karte verlangen, die nur so wenig von der Konformität abweicht, daß die Karte bei ihrer praktischen Verwendung als

konform angesehen werden kann, wobei ihre Strecken- und damit auch Flächenverzerrung in einem gewissen Bereiche unterhalb einer vorgeschriebenen Schranke bleiben soll. Von solcher Beschaffenheit sind jene modernsten Karten, oder besser gesagt, jene Pläne im Maßstab 1 : 5000 und 1 : 1000, die gegenwärtig bei der Landesvermessung in Verwendung stehen. Die Aufstellung der Abbildungsgleichungen für solche Karten ist auf Grundlage der Tissotschen Abbildungslehre sehr einfach geworden; offensichtlich liegt in diesem Kartenentwurf eine Fortentwicklung der Gaußischen Projektion des Ellipsoides in die Ebene vor, die zwar streng konform ist, aber den Nachteil hat, daß die Größe der Flächenverzerrung in den Bildpunkten als unveränderlich hingenommen werden muß.

Meine Damen und Herren! Ich habe Ihnen hiemit natürlich kein vollständiges, aber im wesentlichen doch zutreffendes Bild von der neuesten Entwicklung der Kartenentwurfslehre skizziert. Ich wollte Ihnen vor Augen führen, daß die letzten zwei Menschenalter, wie auf fast allen Gebieten der Wissenschaft und Technik, so auch in der Kartographie einen großen Fortschritt gebracht haben und würde mich freuen, wenn mir solches geglückt sein sollte.
