



Genauigkeitssteigerung der gegenseitigen Einpassung von Luftaufnahmen auf Grund noch nicht beachteter Bedingungsgleichungen zwischen den Orientierungsgrößen

Josef Krames ¹

¹ *korrespondierendes Mitglied der österr. Akademie der Wissenschaften, Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **36** (1–2, 3–4), S. 25–45, 56–61

1948

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Krames_VGI_194804,  
  Title = {Genauigkeitssteigerung der gegenseitigen Einpassung von Luftaufnahmen  
          auf Grund noch nicht beachteter Bedingungsgleichungen zwischen den  
          Orientierungsgrößen},  
  Author = {Krames, Josef},  
  Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {25--45, 56--61},  
  Number = {1--2, 3--4},  
  Year = {1948},  
  Volume = {36}  
}
```



Genauigkeitssteigerung der gegenseitigen Einpassung von Luftaufnahmen auf Grund noch nicht beachteter Bedingungsgleichungen zwischen den Orientierungsgrößen

Von Josef K r a m e s, Wien, korrespondierendes Mitglied der österr. Akademie der Wissenschaften

(Mit 6 Textabbildungen)

Übersicht:

- Nr. 1. Vorbemerkungen.
- Nr. 2. Die grundlegende Fehlergleichung.
- Nr. 3. „Gefährliche Flächen“ und „gefährliche Raumgebiete“.
- Nr. 4. Die Nichtkonvergenz des optisch-mechanischen Orientierens.
- Nr. 5. Wichtige Eigenschaften der Orientierungsbewegungen zweier Zielstrahlbündel.
- Nr. 6. Die beim Normalfall des Orientierens auftretende Abhängigkeit zwischen den Orientierungsgrößen.
- Nr. 7. Gültigkeitsgrenzen der neuen Relationen und Hauptsatz.
- Nr. 8. Vergleich mit Untersuchungen von R. Finsterwalder und E. Gotthardt.
- Nr. 9. Berechnung der mittleren Orientierungsfehler auf Grund der Bedingungsgleichungen.
- Nr. 10. Über die erforderlichen Ergänzungen der optisch-mechanischen Verfahren und Instrumente.

Nr. 1. Vorbemerkungen. R. Finsterwalder¹⁾ erkannte bereits im Jahre 1933, daß die für das optisch-mechanische Orientieren von Luftaufnahmen maßgebenden Orientierungsunbekannten *nicht unabhängig* voneinander sind. Er kam jedoch nicht soweit, diese Tatsache in eine einfache mathematische Form zu kleiden. Statt dessen fand E. Gotthardt²⁾ im Jahre 1940 eine Transformation, die es gestattet, die genannten Größen in fünf andere, sogenannte „konjugierte Variable“ überzuführen, die sich wie voneinander unabhängige verwenden lassen. Bald darauf erörterte auch M. Schermerhorn³⁾ die Frage der erwähnten Abhängigkeit etwas ausführlicher. Sodann bewies M. K. Bachmann in seiner 1943

¹⁾ Siehe R. Finsterwalder, Der unregelmäßige und systematische Fehler der räumlichen Doppelpunkteinschaltung und Aerotriangulation, Bildm. u. Luftbildw. 8 (1933), S. 55—68, sowie: Genauigkeitsuntersuchungen an einem Stereoplanigraphen, Bildm. u. Luftbildw. 9 (1934), S. 120—128.

²⁾ E. Gotthardt, Beiträge zur Frage der Genauigkeit der gegenseitigen Ortung von Senkrechtpaaren, Bildm. u. Luftbildw. 15 (1940), S. 1—24.

³⁾ W. Schermerhorn, Introduction to the Theory of Error of Aerial Triangulation, Photogrammetria III (1940), S. 138—146, IV (1941) S. 28—45.

erschienenen Dissertation⁴⁾ u. a. erstmalig, daß die bisher üblichen Orientierungsverfahren überhaupt nicht (restlos) konvergieren, sowie, daß die Restfehler der y -Parallaxe am oberen und unteren Bildrand in bestimmten typischen Fällen unter den $\sqrt[3]{3}$ -fachen Betrag des mittleren Parallaxenfehlers nicht herabgedrückt werden können. Beides ergab sich letzten Endes als eine Folge der eingangs hervorgehobenen Tatsache. Das zuletzt genannte Ergebnis wurde später von *H. Kasper*⁵⁾ auf einfacherem Wege bestätigt.

In allen diesen Arbeiten wurde die gegenseitige Abhängigkeit zwischen den Orientierungsgrößen allein mittels Berechnung gewisser Gewichtskoeffizienten und Abhängigkeitsindizes erkannt und verwertet. Ein unmittelbarer mathematischer Ausdruck für diese Abhängigkeit fehlte jedoch hier ebenso wie in der umfangreichen weiteren Literatur über dieses Hauptproblem der Luftphotogrammetrie. Erst im Zusammenhang mit der vom Verfasser entwickelten Theorie der „*gefährlichen Flächen*“ und der mit diesen eng verbundenen „*gefährlichen Raumgebiete*“⁶⁾ stieß dieser auf allgemeine Relationen, mit denen diese Lücke

⁴⁾ *W. K. Bachmann*, Théorie des erreurs de l'orientation relative, Thèse Lausanne 1943, siehe insbesondere S. 8, 21, 41—44 und 44 und 53—55.

⁵⁾ *H. Kasper*, Zur Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung, Schweiz. Zeitschr. f. Verm. und Kulturtechn. 45 (1947), S. 121—126.

⁶⁾ *J. Krames* hat über diese Gegenstände bisher folgende Arbeiten veröffentlicht, auf die in der Folge mit den angegebenen römischen Ziffern verwiesen wird: [I]: Neue Nebenlösungen einer alten Aufgabe, Anzeiger d. öst. Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl. 77 (1940), S. 26—30. — [II]: Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven (Ein Beitrag zur Theorie der „gefährlichen Örter“), Monatsh. Math. Phys. 49 (1941), S. 327—354. — [III]: Über bemerkenswerte Sonderfälle des „Gefährlichen Ortes“ der photogrammetrischen Hauptaufgabe, Monatsh. Math. Phys. 50 (1941), S. 1—13. — [IV]: Über die mehrdeutigen Orientierungen zweier Sehstrahlbündel und einige Eigenschaften der orthogonalen Regelflächen zweiten Grades, Monatsh. Math. Phys. 50 (1941), S. 65—83. — [V]: Der einfachste Übergang zur Nebenlösung bei vorliegendem „Gefährlichen Ort“, Monatsh. Math. Phys. 50 (1941), S. 84—100. — [VI]: Über die bei der Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie auftretenden „gefährlichen“ Flächen, Bildm. u. Luftbildw. 17 (1942), S. 1—18. — [VII]: Zur Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung zweier Luftaufnahmen, Anzeiger d. öst. Akad. d. Wiss. math.-nat. Kl. 84 (1947), S. 53—59. — [VIII]: Untersuchungen über „gefährliche Flächen“ und „gefährliche Räume“ mittels des Aeroprojektors „Multiplex“, Österr. Ing. Archiv 2 (1948), S. 123—132. — [IX]: Über Parallaxeneigenschaften windschiefer Geraden, Sitzgeber. öst. Akad. d. Wiss., math.-nat., IIa, 156 (1947), S. 219—232. — [X]: Parallaxeneigenschaften zweier Sehstrahlbündel, Sitzungsber. öst. Akad. d. Wiss., math.-nat., IIa 156 (1947), S. 233—246. — [XI]: Über die „gefährlichen Raumgebiete“ der Luftphotogrammetrie, Photograph. Korr. Wien, 84 (1948), S. 1—16. — [XII]: Die Bedeutung der „gefährlichen Raumgebiete“ für das optisch-mechanische Orientieren von Luftaufnahmen, Photograph. Korr. 84 (1948), S. 41—50. — [XIII]: Über allgemeine „gefährliche Raumgebiete“ der Luftphotogrammetrie, Monatsh. Math. Phys. 52 (1948), S. 265—285. — [XIV]: Über die Flächen konstanter Bildparallaxe und die zugehörigen gefährlichen Raumgebiete, Anzeiger d. österr. Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl. 85 (1948), S. 8—14. — [XV]: Über besondere lineare Büschel von Flächen konstanter Bildparallaxe, Anzeiger d. österr. Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl. 85 (1948), S. 25—31. — [XVI]: Allgemeine lineare Büschel von Flächen konstanter Bildparallaxe, Anzeiger d. österr. Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl. 85 (1948), S. 39—48. — [XVII]: Über Bedingungsgleichungen für die Orientierungsunbekannten beim gegenseitigen Einpassen von Luftaufnahmen, Anzeiger d. österr. Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl. 85 (1948), im Druck.

endlich ausgefüllt erscheint. Einige dieser Gleichungen traten erstmalig bei der Berechnung der Dimensionen von „gefährlichen Raumgebieten“ hervor (siehe [XI], Gl. 49, 50 a, b, sowie [XIV], Gln. 10–12); ihre tiefere Bedeutung ergibt sich nunmehr an Hand dreier bisher nicht bekannter Sätze über die Orientierungsbewegungen der beiden Zielstrahlbündel. Dabei ist die Gültigkeit der erwähnten Relationen an Voraussetzungen gebunden, die in der Praxis unter normalen Umständen unschwer erfüllbar sind. Es ist nämlich erforderlich, 1) daß die Einpassung bereits innerhalb gewisser enger Grenzen angenähert vorliegt und damit ihre „Endphase“ erreicht hat, sowie 2), daß die Länge B der Aufnahmebasis und die Höhen H_1 , H_2 der beiden Aufnahmezentren über Grund mit zweckentsprechender Genauigkeit gegeben oder gefunden sind. Falls überdies 3) der Unterschied zwischen H_1 und H_2 einen bestimmten kleinen Betrag nicht überschreitet, dann drückt die zweite der genannten Relationen insbesondere das Verschwinden der *Verkantungsdifferenz* aus. Daß diese in der Regel auffallend kleine Werte annimmt, war längst bekannt ²⁾ und ergab schon früher eine teilweise Erklärung für manche Auswirkung der gegenständlichen Abhängigkeit. Des weiteren hängt der auf unabhängige Bildpaare bezug nehmende Sonderfall der ersten Relation eng zusammen mit einer von *R. Finsterwalder* ⁷⁾ beim „gefährlichen Zylinder“ betrachteten Beziehung zwischen den Orientierungsgrößen sowie mit einer von *E. Gotthardt* a. a. O.³⁾ verwendeten Funktion ausgezeichneter Genauigkeit. Diese gehört ebenso wie die Verkantungsdifferenz zu den eingangs erwähnten „konjugierten Variablen“. Übrigens kann man in einigen vom Letztgenannten durchgerechneten Beispielen bereits beachtenswerte numerische Bestätigungen unserer Relationen erblicken. Für den von *E. Gotthardt* dort nicht behandelten Folgebildanschluß ergibt sich nun ebenfalls eine Funktion ausgezeichneter Genauigkeit.

Im Hinblick auf eine einfache geometrische Deutung ist ferner sofort klar gestellt, daß die in Rede stehenden Relationen im Rahmen ihrer Gültigkeitsgrenzen für die letzten kleinen Bündelbewegungen auch als *Bedingungsgleichungen* zwischen den Orientierungsgrößen anzusehen sind. Darnach können für diese „Endphase“ des Orientierens zwei dieser Größen eliminiert werden, worauf die mittleren Fehler der restlichen drei nach bekannten Regeln der Ausgleichsrechnung leicht zu berechnen sind. Dies wird an zwei Beispielen näher ausgeführt, für die *R. Finsterwalder*, a. a. O.¹⁾, und *W. K. Bachmann*, a. a. O.⁴⁾, die mittleren Orientierungsfehler empirisch festgestellt haben, und zwar durch je fünfundzwanzigmalsiges Einpassen eines Bildpaares. Überraschenderweise betragen die nach dem soeben geschilderten Vorgang berechneten Werte dieser Fehler *durchwegs rund die Hälfte* der von den Genannten auf praktischem Wege gefundenen. Dies kann wohl als untrügliches Zeichen dafür gelten, daß die Genauigkeit der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern dadurch noch beträchtlich gesteigert werden kann, daß *während der Endphase der Einpassung die genannten Bedingungsgleichungen eingehalten werden*. Die hierfür erforderliche Verbesserung und Weiterentwicklung der gebräuchlichen optisch-mechanischen

⁷⁾ *R. Finsterwalder*, Photogrammetrie, Berlin 1939, S. 127.

Verfahren liegen jetzt ebenso auf der Hand wie die entsprechenden instrumentellen Ergänzungen der Orientierungsgeräte.

Nr. 2. Die grundlegende Fehlergleichung. Wir betrachten zwei Senkrechtaufnahmen eines Geländes, mit denen der *Normalfall* der Stereophotogrammetrie angenähert verwirklicht ist, und wählen wie üblich ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Nullpunkt im Zentrum O_1 der linken Aufnahme liegt, dessen positive x -Achse das andere Zentrum O_2 enthält, während die positive y - und z -Achse nach rückwärts, bzw. oben gerichtet sind⁸⁾ (s. Abb. 1). Die Basisstrecke $O_1 O_2$ werde mit b bezeichnet.

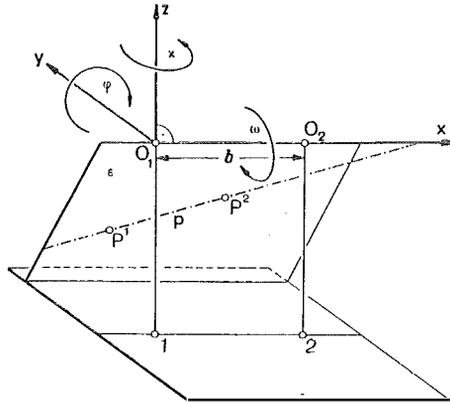


Abb. 1: Koordinatensystem und Grundoperationen
(ω -, φ -, α -Drehung und b_x -, b_y -, b_z -Schiebung in den Pfeilrichtungen positiv!)

Bei einer allgemeinen Verlagerung der beiden Aufnahmestrahlbündel erfährt jedes von ihnen eine Verdrehung um einen seiner Strahlen durch einen bestimmten Winkel und außerdem eine Verschiebung in einer bestimmten Raumrichtung durch eine gewisse Strecke. Werden die Drehwinkel und Schubstrecken genügend klein vorausgesetzt, so gilt für die Richtungskoeffizienten der beiden Drehachsen d_1, d_2 :

$$\left. \begin{aligned} A_1 : B_1 : C_1 &= d\omega_1 : d\varphi_1 : d\alpha_1, \\ A_2 : B_2 : C_2 &= d\omega_2 : d\varphi_2 : d\alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

und für die Parameter der Verschiebungsrichtungen r_1, r_2 :

$$\left. \begin{aligned} D_1 : E_1 : F_1 &= db_{x1} : db_{y1} : db_{z1}, \\ D_2 : E_2 : F_2 &= db_{x2} : db_{y2} : db_{z2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dabei erfolgen die Drehungen durch die Winkel:

$$\left. \begin{aligned} d\delta_1 &= \sqrt{d\omega_1^2 + d\varphi_1^2 + d\alpha_1^2}, \\ d\delta_2 &= \sqrt{d\omega_2^2 + d\varphi_2^2 + d\alpha_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und die Verschiebungen durch die Strecken:

$$\left. \begin{aligned} d s_1 &= \sqrt{db_{x1}^2 + db_{y1}^2 + db_{z1}^2}, \\ d s_2 &= \sqrt{db_{x2}^2 + db_{y2}^2 + db_{z2}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

⁸⁾ Vgl. [XI], Nr. 2, Abb. 1, sowie [XII], Abb. 1 usw. und Fußn. 7.

Die hierin mit d bezeichneten kleinen Orientierungsgrößen haben die bekannte Bedeutung. *Durch jedes Wertsystem solcher Größen, das nicht durchwegs aus Nullen besteht, ist eine bestimmte (engbegrenzte) Verlagerung der Zielstrahlbündel festgelegt.*

Wie dies auch in der Literatur (oft stillschweigend) geschieht, setzen wir in der Folge stets voraus, daß diese Orientierungsgrößen innerhalb der Schranken liegen, für welche die Glieder zweiter und höherer Ordnung der Fehlergleichungen weggelassen werden können. Je zwei von einem Raumpunkt $\mathbf{P} = (x, y, z)$ herführende Zielstrahlen erhalten sodann bei den genannten Bündelbewegungen die y -Parallaxe (vgl. [XI], Gl. 2):

$$dp_y = -\frac{y^2 + z^2}{z} (d\omega_1 - d\omega_2) + \frac{xy}{z} d\varphi_1 - \frac{(x-b)y}{z} d\varphi_2 + xdx_1 - (x-b)dx_2 + db_{y1} - db_{y2} - \frac{y}{z} (db_{z1} - db_{z2}). \quad (5)$$

Wird von Basisänderungen abgesehen, so kann $db_{x1} = db_{x2} = 0$ angenommen werden, was übrigens auf dp_y wegen (5) ohne Einfluß ist. Weil ferner in (5) bloß die Differenz $d\omega$ der Größen $d\omega_1$ und $d\omega_2$ aufscheint, sind diese bloß als eine Unbekannte zu werten. Im Interesse einer gewissen Symmetrie wollen wir dennoch beide meistens getrennt anschreiben.

Nr. 3. „Gefährliche Flächen“ und „gefährliche Raumbiete“. Wir heben vorerst einige für das Folgende grundlegende Tatsachen hervor, die der Verfasser bereits in vorangegangenen Veröffentlichungen klargelegt hat.

a) Zu je zwei im Raum gegebene Aufnahmezentren $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ gehören ∞^4 „gefährliche Flächen (im engeren Sinne)“, d. s. orthogonale Regelflächen zweiten Grades Φ^0 , die in der Kernachse $\mathbf{O}_1 \rightarrow \mathbf{O}_2$ eine ihrer (im allgemeinen) vier Haupterzeugenden haben. Diese Flächen werden von den zu ihren Haupterzeugenden normalen Ebenen v nach Kreisen geschnitten (Abb. 2) und können (im allg.

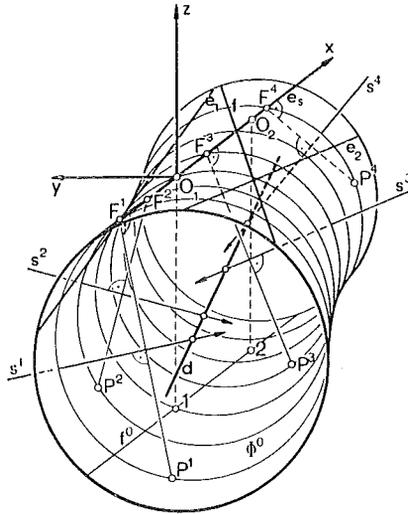


Abb. 2: „Gefährliche Fläche im engeren Sinn“ Φ^0 .
Konstruktion aus der Haupterzeugenden e_s und vier Punkten P^1, P^2, P^3, P^4 .

auf ∞^1 Arten) als *Erzeugnis zweier kongruenter Ebenenbüschel* erhalten werden. Die Achsen dieser Büschelpaare sind (im allg. paarweise windschiefe) „adjungierte“ Flächenerzeugenden $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, die eine Involution bilden. Letztere hat zwei (zu sich selbst adjungierte) Haupterzeugenden von der genannten Art zu Doppelstrahlen⁹⁾.

Wird eine solche Fläche aus \mathbf{O}_1 und \mathbf{O}_2 aufgenommen, so ist die gegenseitige Orientierung dieses Bildpaares mit einer gewissen *Unsicherheit* behaftet, denn die Hauptaufgabe besitzt sodann *zwei zusammengerückte Lösungen*. Dies bedeutet, praktisch gesprochen, daß die beiden Bündel, als starre Gebilde betrachtet, bestimmte *eng begrenzte Bewegungen ausführen können, ohne damit die orientierte Lage als solche zu verlassen*. Für jede Fläche Φ^0 gibt es unendlich viele derartige Bewegungen¹⁰⁾. Sieht man von der Drehungsmöglichkeit um die Kernachse ab, dann sind mit Φ^0 bloß die *Verhältnisse der Orientierungsgrößen* eindeutig bestimmt¹¹⁾.

b) Unter einem „*gefährlichen Raumgebiet*“ (im engeren Sinne) \mathcal{G} ist eine Mannigfaltigkeit von ∞^3 Punkten zu verstehen, deren zugehörige Zielstrahlenpaare bei einer gegebenen (genügend eng begrenzten) Verlagerung der beiden Bündel durchwegs γ -Parallaxen erhalten, die — absolut genommen — kleiner sind als der mittlere Fehler μ der Parallaxenmessung. Dabei sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden: 1) Für die „*gefährlichen Raumgebiete erster Art*“ wird die γ -Parallaxe zugeordneter Zielstrahlen unmittelbar am Geländemodell gemessen¹²⁾ und ihr mittlerer Fehler μ über den ganzen (Aufnahme-) Raum konstant angenommen¹³⁾. 2) Hingegen ist für die „*gefährlichen Raumgebiete zweiter Art*“ die γ -Parallaxe auf den (angenähert) waagrechten Plattenebenen

⁹⁾ Man kann auch sagen: Jede solche Fläche Φ^0 ist durch vier außerhalb \mathbf{e}_s gelegene Punkte $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \mathbf{P}^4$ im allgemeinen eindeutig bestimmt. Um Φ^0 aus diesen Angaben zu konstruieren, hat man aus jedem Punkt \mathbf{P}^i das Lot auf \mathbf{e}_s zu fällen, dessen Fußpunkt \mathbf{F}^i auf \mathbf{e}_s aufzusuchen und die in der durch \mathbf{P}^i gelegten Normalebene ν zu \mathbf{e}_s befindliche Symmetrale \mathbf{s}^i von \mathbf{P}^i und \mathbf{F}^i zu ermitteln (s. Abb. 2); die vier Geraden \mathbf{s}^i haben sodann neben der Ferngeraden von ν noch eine weitere gemeinsame Transversale \mathbf{d} , und diese bildet bereits jenen Durchmesser von Φ^0 , auf dem die Mittelpunkte aller von den Ebenen ν ausgeschnittenen Kreise liegen. — Vgl. hierzu auch [I], S. 30, [II], Nr. 4, [IV], Nr. 6, [VI], Nr. 3, und [XI], Schluß von Nr. 2. — Über allgemeine „gefährliche Flächen“ siehe insbesondere [II], [VI], [VIII], [XIII] und [XVI].

¹⁰⁾ Siehe etwa [II], Nr. 7, A, 3, 5, C, 8, sowie [IV], Nr. 6, Satz 10, [XI], Nr. 5, A, B, sowie [XIV], Nr. 3.

¹¹⁾ Dividiert man beispielsweise diese Größen durch eine reelle Zahl $Z > 1$, so ergibt sich dasselbe Raumgebiet wie bei den ursprünglich angenommenen Orientierungsgrößen für die γ -Parallaxe $dp_\gamma = Z\mu$. Man entnimmt dies ohneweiters den Gln. 3, 5, 7 in [XI], Nr. 2, sowie den Gln. 2, 3, 6 in [XIV], Nr. 1. — Vgl. auch [XI], Nr. 4, Formel (31) bis (35), und [XII], Nr. 3.

¹²⁾ Dies gilt nach R. Finsterwalder, Photogrammetrie 1939, S. 122, für den „*Stereoplanigraphen*“ und den „*Multiplex*“. — Die Benennung der gefährlichen Raumgebiete „*erster*“ und „*zweiter*“ Art wird in obigem Text erstmalig verwendet.

¹³⁾ Diese Voraussetzung liegt den Arbeiten [VII] bis [XIII] zu Grunde.

$\Pi_1 = \Pi_2$ zu messen und der mittlere Fehler dieser „Bildparallaxe“ konstant vorauszusetzen¹⁴⁾ (vgl. Abb. 3).

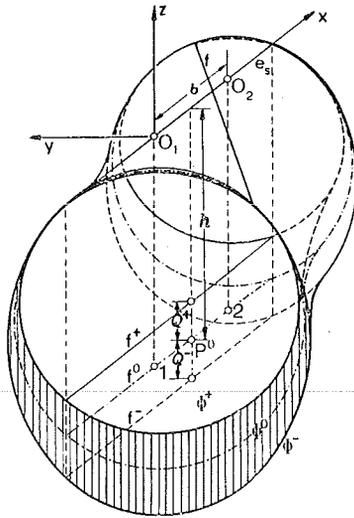


Abb. 3: „Gefährliches Raumgebiet zweiter Art“.
Annahme der Grundfläche Φ^0 wie in Abb. 2.

e) In beiden Fällen ist mit dem „gefährlichen Raumgebiet“ \mathcal{G} zugleich ein *lineares Bündel von Flächen zweiten Grades* Φ festgelegt, die zwei Erzeugenden \mathbf{e}_s und \mathbf{f} gemeinsam haben. Von diesen liegt \mathbf{e}_s in der Kernachse und \mathbf{f} in der xy -Ebene. Jede Fläche dieses Bündels hat die Eigenschaft, daß die durch ihre ∞^2 Punkte bestimmten Zielstrahlenpaare nach der betrachteten Bündelverlagerung dieselbe y -Parallaxe dp_y aufweisen. Insbesondere bilden die so den Werten $dp_y = \pm \mu$ zugeordneten Flächen Φ^+ , Φ^- die vollständige geometrische Begrenzung des Raumgebietes \mathcal{G} . Ferner gehört zu $dp_y = 0$ die im Innern von \mathcal{G} verlaufende „Grundfläche“ Φ^0 des Gebietes. Sie ist stets eine „gefährliche Fläche im engeren Sinne“ (siehe a), also orthogonal. Bei den „gefährlichen Raumgebieten erster Art“ sind überdies alle Flächen Φ orthogonal und paarweise ähnlich und ähnlich gelegen¹⁵⁾, bei jenen „zweiter Art“ berühren sich alle Φ längs \mathbf{e}_s und \mathbf{f} (siehe [XIV], Nr. 2).

d) Für jede beliebig geformte Geländefläche, die (soweit das Gesichtsfeld reicht) im Innern eines „gefährlichen Raumgebietes“ liegt, ist die gegenseitige Orientierung der beiden Zielstrahlenbündel (zufolge b) *ebenso unsicher wie für die Grundfläche dieses Gebietes* (siehe a). Ist der mittlere Parallaxenfehler μ ein für allemal bekannt, so werden die *Abmessungen dieser Gebiete*, vor allem ihre Höhenunterschiede zwischen den Begrenzungsflächen Φ^+ , Φ^- , *umso größer, je kleiner die den Bündelbewegungen zugrunde liegenden Orientierungsgrößen an-*

¹⁴⁾ Dieser Fall wird in [XIV], [XV], [XVI] behandelt.

¹⁵⁾ Siehe [XI], Nr. 2, Satz 1, und insbesondere Abb. 2, 3, 4.

genommen sind¹⁶⁾. Mit dem Abnehmen dieser Größen erhöht sich somit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Modell des aufgenommenen Geländes zur Gänze im zugehörigen „gefährlichen Raumgebiet“ enthalten ist. Ist dies aber der Fall, dann kann die Genauigkeit der Einpassung des vorliegenden Bildpaares nicht wie üblich durch Abtasten des ganzen Gesichtsfeldes überprüft¹⁷⁾ und daher auch nicht weiter verbessert werden.

Nr. 4. Die Nichtkonvergenz des optisch-mechanischen Orientierens. Beim optisch-mechanischen Einpassen zweier Luftaufnahmen wird bekanntlich entweder das „Winkelverfahren“ (für unabhängige Bildpaare) mit Festhalten der beiden Bündelscheitel angewendet, oder der „Folgebildanschluß“, bei dem eines der Bündel im Raume unbewegt bleibt. In beiden Fällen faßt man die fünf (oder sechs) in Frage kommenden Grundoperationen in bestimmter Art und Reihenfolge zu einem Orientierungsverfahren (siehe [XII], Nr. 1) zusammen, das mehrmals hintereinander zu wiederholen ist. Dabei sind dem Verfahren jedesmal bestimmte Werte der Orientierungsgrößen zugeordnet, die sich beim Wiederholen Schritt für Schritt verkleinern. Mit jeder einzelnen Anwendung des Verfahrens (oder auch mit jeder Gruppe aufeinander folgender Grundoperationen) ist demnach ein bestimmtes „gefährliches Raumgebiet“ (im engeren Sinn) verbunden, dessen Abmessungen mit den abnehmenden Werten der Orientierungsgrößen immer umfangreicher werden (vgl. Nr. 3, d). Überdies ist dabei noch folgendes zu bedenken:

Schneiden sich in der Anfangslage der Bündel die beiden von einem Bildpunktpaar herrührenden Zielstrahlen bereits (mit der durch μ bestimmten Genauigkeit) im entsprechenden Punkt **P** des Geländemodells, so hat man beim Fortschreiten des Einpassens noch solche Bündelbewegungen auszuführen, bei denen 1) der in **P** (abgesehen vom Fehler $\pm \mu$) vorhandene Strahlenschnitt nicht aufgehoben wird und 2) weitere Paare zugeordneter Zielstrahlen (mit derselben Genauigkeit) in Schnittlage kommen. Ersteres ist jedenfalls gewährleistet, wenn die an diesen Bewegungen beteiligten Grundoperationen im Modellpunkt **P** solche Parallaxenänderungen hervorrufen, die sich gegenseitig aufheben, d. h. deren algebraische Summe $\Sigma = 0$ ist. Wäre hingegen beispielsweise $\Sigma = \pm \mu$, dann hätten die zu **P** gehörigen Zielstrahlen in der neuen Lage der Bündel (nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz) den mittleren Fehler $\pm \sqrt{2}\mu$. Wir können daher in der Folge annehmen, daß die den genannten Operationen zugeordneten Orientierungsgrößen die als Ortsfunktion aufgefaßte γ -Parallaxe, also die rechte Seite von Gl. (5) nach dem Einsetzen der Koordinaten x, y, z von **P** zum Verschwinden bringen.

Um die bei diesen Bündelbewegungen auftretenden kleinen Verlagerungen des Schnittpunktes **P** der betrachteten Zielstrahlen festzustellen, berechnen wir bloß den dabei in **P** auftretenden Höhenfehler dh . Dieser überwiegt nämlich,

¹⁶⁾ Vgl. abermals [XI], Formel (31) bis (35), [XII], Abb. 8—10, [XIV], Formel (14) bis (18), sowie obige Fußn. 11.

¹⁷⁾ Siehe [XII], Nr. 3, Schlußbemerkungen.

wie bereits bekannt ist, den zugehörigen Lagefehler¹⁸⁾. Für dh gilt¹⁹⁾: $dh = \frac{z}{b} (dx_1 - dx_2)$ und dies ergibt (siehe [XI], Gl. 1):

$$\left. \begin{aligned} dh = & -\frac{xy}{b} d\omega_1 + \frac{(x-b)y}{b} d\omega_2 + \frac{x^2+z^2}{b} d\varphi_1 - \frac{(x-b)^2+z^2}{b} d\varphi_2 \\ & -\frac{yz}{b} dx_1 + \frac{yz}{b} dx_2 + \frac{z}{b} (db_{x1} - db_{x2}) - \frac{x}{b} db_{z1} + \frac{x-b}{b} db_{z2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Darin kann nach Nr. 2 $db_{x1} = db_{x2} = 0$ gesetzt werden. Wir kommen auf diese Gleichung noch zurück²⁰⁾.

Wird die Gleichung (5) mit z ($\neq 0$) multipliziert und $= 0$ gesetzt, so deckt sie sich mit der Gleichung der Grundfläche Φ^0 des zu den angenommenen Werten der Orientierungsgrößen gehörigen „gefährlichen Raumgebietes“ (siehe [XI], Gl. 2, 3, 5 und 7). *Danach bestimmen auch umgekehrt alle Wertverbindungen dieser Größen, welche die rechte Seite von Gl. (5) nach Einführung bestimmter Werte von x, y, z zu Null machen, im Sinne von Nr. 3, **b**, jene „gefährlichen Raumgebiete“, deren Grundflächen Φ^0 durch den Raumpunkt **P** mit den Koordinaten x, y, z gehen.* Damit ist eine neue sehr wichtige geometrische Deutung der Fehlergleichung (5) gewonnen.

In Ergänzung obiger Überlegungen denken wir uns nun eine solche Lage der Zielstrahlbündel erreicht, in der zwei, drei, .. (allgemein) n Paare zugeordneter Zielstrahlen sich schneiden; die Schnittgenauigkeit sei dabei wieder mit $\pm \mu$ gekennzeichnet. Die restlichen Bündelbewegungen sind hierauf so einzurichten, daß sie in jedem der zwei, .., n entsprechenden Modellpunkten $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \dots, \mathbf{P}^n$ eine verschwindende Gesamtparallaxe dp_y^i erzeugen. Mit anderen Worten: *Die Orientierungsgrößen haben sodann n Gleichungen (darunter höchstens fünf unabhängige) von der Form $dp_y^i = 0$ zu erfüllen.* Der Zeiger i deutet darin an, daß in Gl. (5) die Koordinaten des betreffenden Modellpunktes \mathbf{P}^i eingesetzt sind.

Weil mit dem Fortschreiten des Orientierungsvorganges immer mehr Strahlenpaare in Schnittlage kommen, erfüllen die jeweils zugeordneten Orientierungsgrößen immer mehr Gleichungen von der Form $dp_y^i = 0$. Demgemäß hat das damit bestimmte „gefährliche Raumgebiet“ die Eigenschaft, *daß seine Grundfläche Φ^0 immer mehr Punkte \mathbf{P}^i mit dem Geländemodell gemeinsam hat.* Da die Modellfläche jedoch offenbar umso vollständiger im Inneren dieses Gebietes verläuft, je mehr Modellpunkte auf Φ^0 liegen, ergibt sich aus diesen Überlegungen:

Beim optisch-mechanischen Einpassen zweier Luftaufnahmen kommt man im Laufe des üblichen Verfahrens automatisch immer mehr zu solchen Bündel-

¹⁸⁾ S. etwa *K. Rinner*, Eine elementare Ableitung usw. Allg. Verm. Nachr. 51 (1939), S. 661—665, vorletzter Absatz.

¹⁹⁾ Vgl. wieder *K. Rinner*, a. a. O., Abb. 4.

²⁰⁾ Wie aus Gl. (6) unschwer abzuleiten ist, erfüllen alle Punkte des Raumes, in denen der Höhenfehler dh denselben kleinen Wert hat, im allgemeinen ein *orthogonales Hyperboloid*, das von den Parallelebenen zur xz -Ebene nach Kreisen geschnitten wird; alle derartigen Flächen konstanten Höhenfehlers bilden ein *homothetisches Büschel*, d. h. sie gehen durch die Streckungen aus ihrem gemeinsamen Mittelpunkt ineinander über.

bewegungen, deren zugehörige „gefährlichen Raumgebiete“ die auszuwertende Modellfläche vollständig in sich schließen. Sodann wird aber jeder Versuch, die Orientierungsgenauigkeit auf diesem Wege zu verbessern, völlig illusorisch (s. Nr. 3, d).

Dies ist die überaus einfache *geometrische Ursache* für die Tatsache, daß die bisher üblichen Orientierungsverfahren über eine gewisse (keineswegs maximale) Annäherung hinaus überhaupt nicht konvergieren (vgl. auch [XII], Schluß von Nr. 3).

Nr. 5. Wichtige Eigenschaften der Orientierungsbewegungen zweier Zielstrahlbündel. Weil zu jeder Wertverbindung der Orientierungsgrößen ein einziges „gefährliches Raumgebiet“ gehört, ist aus geometrischen Gründen selbstverständlich, daß die n Modellpunkte \mathbf{P}^i ($n > 4$), deren Zielstrahlenpaare bei den damit gegebenen Bündelbewegungen (abgesehen vom Fehler $\pm \mu$) in Schnittlage bleiben sollen, *keine beliebige gegenseitige Lage* haben können. Eine Fläche Φ^0 , auf der diese Punkte liegen, ist nämlich, wie in Fußn. 9 bereits erwähnt, durch vier solche Punkte allgemeiner Raumlage eindeutig bestimmt. Sind *mehr als vier* solche Punkte vorhanden, *so müssen sie entweder derselben „gefährlichen Fläche“ angehören oder die n Bedingungsgleichungen $dp_y^i = 0$ ($i = 1, \dots, n; n > 4$) enthalten Widersprüche*, so daß keine weiteren Bündelbewegungen möglich sind. Zur näheren Erklärung sei hiezu nochmals bemerkt, daß dabei von gemeinsamen Kippungen (Querneigungen) beider Bündel abgesehen wird und sodann je ∞^1 einander proportionale Wertequintupel der Orientierungsgrößen immer dieselbe Grundfläche Φ^0 bestimmen (vgl. Nr. 3, a, und Fußn. 11).

Wir können ferner sagen: *Die gesuchte richtige Orientierung der beiden Bündel ist insbesondere dadurch gekennzeichnet, daß es keine (nicht triviale) Verlagerung der Bündel gibt, bei der die Schnittpunkte zugeordneter Zielstrahlen von mindestens fünf Punkten, die nicht gemeinsam auf einer Fläche Φ^0 liegen, (abgesehen vom Fehler $\pm \mu$) erhalten bleiben.*

Von besonderem Interesse sind solche Bündelbewegungen, bei denen die Schnittlage *zweier* Paare zugeordneter Zielstrahlen (im Rahmen der angegebenen Genauigkeit) nicht beeinträchtigt wird. Derartige Bewegungen weisen beachtenswerte Eigenschaften auf. Aus Gl. (5) folgt vor allem der

Satz 1: *Wird bei einer Verlagerung der beiden Zielstrahlbündel in zwei innerhalb einer Kernebene ($y:z = k:1$) gelegenen Modellpunkten $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2$ eine verschwindende Gesamtparallelaxen erzeugt, so gilt Gleiches für jeden Punkt \mathbf{P}^i der räumlichen Verbindungsgeraden \mathbf{p} von \mathbf{P}^1 und \mathbf{P}^2 (s. Abb. 1).*

In der Tat, setzt man in Gl. (5) die Koordinaten $x_1, y_1 = k z_1, z_1$ von \mathbf{P}^1 und hierauf die Koordinaten $x_2, y_2 = k z_2, z_2$ von \mathbf{P}^2 ein, so folgt aus den so gewonnenen Gleichungen durch lineare Kombination mittels beliebiger reeller Faktoren, die wir in der Form $\frac{m}{m+n}, \frac{n}{m+n}$ verwenden:

$$dp_y^i = -(1 + k^2) z^i (d\omega_1 - d\omega_2) + k x_i d\varphi_1 - k (x^i - b) d\varphi_2 + x^i dx_1 - (x^i - b) dx_2 + db_{y_1} - db_{y_2} - k (db_{z_1} - db_{z_2}) \quad (7)$$

Dabei wurde zur Vereinfachung

$$\frac{mx_1 + nx_2}{m+n} = x^i, \quad \frac{my_1 + ny_2}{m+n} = y^i, \quad \frac{mz_1 + nz_2}{m+n} = z^i \quad \text{und} \quad \frac{mdp_y^1 + ndp_y^2}{m+n} = dp_y^i$$

gesetzt. Die Gleichung (7) besagt aber, daß die y -Parallaxe im neuen Punkt \mathbf{P}^i mit den Koordinaten $x^i, y^i = k z^i, z^i$ ebenfalls verschwindet, sobald $dp_y^1 = dp_y^2 = 0$ ist.

Beim praktischen Einpassen können selbstverständlich nur solche Punkte der Raumgeraden \mathbf{p} beobachtet werden, die zugleich auf der Modellfläche liegen. Insbesondere kommen bei (nahezu) ebenem Gelände alle Punkte von \mathbf{p} für die Anwendung von Satz 1 in Betracht.

Ferner gilt folgender

Satz 2: Bleiben bei einer Bündelverlagerung in zwei verschiedenen Punkten $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2$, welche dieselbe Abzisse \bar{x} aufweisen, die Parallaxen dp_y^1 und $dp_y^2 = 0$, so gilt das Gleiche für alle Punkte \mathbf{P}^i auf dem Kreis \mathbf{k} in der Normalebene $x = \bar{x}$ zur Kernachse ($y = z = 0$), der durch $\mathbf{P}^1 (\bar{x}, y_1, z_1)$ und $\mathbf{P}^2 (\bar{x}, y_2, z_2)$ geht und diese Gerade schneidet (s. Abb. 4).

Aus den Gleichungen dieses Kreises

$$x = \bar{x}, \quad \begin{vmatrix} y^2 + z^2 & y & z \\ y_1^2 + z_1^2 & y_1 & z_1 \\ y_2^2 + z_2^2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

folgt nämlich, daß die rechte Seite von Gl. (5), mit z^i multipliziert, für jedes Wertepaar y, z , das der Gl. (8) genügt, ebenfalls $= 0$ ergibt, wenn dies für y_1, z_1 und y_2, z_2 zutrifft. Der in Rede stehende Kreis \mathbf{k} geht insbesondere in eine die Kernachse normal schneidende Gerade über, wenn $y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0$ ist.

Betrachten wir endlich drei Raumpunkte P^1, P^2, P^3 , welche dieselbe Abzisse $x = \bar{x}$ besitzen und keinem Kreis mit Gleichungen von der Form (8) angehören. Die Koordinaten dieser Punkte genügen der Bedingung:

$$\begin{vmatrix} y_1^2 + z_1^2 & y_1 & z_1 \\ y_2^2 + z_2^2 & y_2 & z_2 \\ y_3^2 + z_3^2 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (9)$$

Jeder Punkt \mathbf{P}^i des durch $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2$ gehenden und die Kernachse normal schneidenden Kreises \mathbf{k} (vgl. Gln. 8) hat sodann die im Satz 1 ausgesprochene Eigenschaft. Ferner bestimmt jeder solche Punkt \mathbf{P}^i von \mathbf{k} im Verein mit dem Punkt \mathbf{P}^3 einen weiteren Kreis \mathbf{k}^i von gleicher Lage und Eigenschaft. Da alle derartigen

Kreise k^i ein elliptisches Kreisbüschel bilden (s. Abb. 4) und daher die Ebene $x = \bar{x}$ vollständig ausfüllen, ergibt sich hieraus der

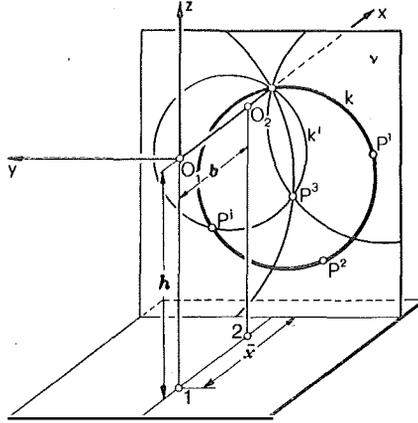


Abb. 4: Kreis k in Normalebene v zur Kernebene.

Bleibt in zwei Punkten P^1, P^2 von k bei einer Bewegung der Bündel $dp_y = 0$, dann gilt Gleiches für jeden Punkt P_i von k .

Satz 3: Wird bei einer Verlagerung der beiden Zielstrahlbündel in drei verschiedenen Punkten P^1, P^2, P^3 innerhalb einer Normalebene $x = \bar{x}$ zur Kernachse die y -Parallaxe $dp_y^i = 0$ hervorgerufen und erfüllen die Koordinaten dieser Punkte $x_1 = \bar{x}, y_1, z_1; x_2 = \bar{x}, y_2, z_2; x_3 = \bar{x}, y_3, z_3$ die Bedingung (9), so verschwindet die y -Parallaxe dp_y in jedem Punkt P^i der ∞^2 Punkte der Ebene $x = \bar{x}$.

Dieser Satz dürfte für die Beurteilung wie auch für die Herleitung von Orientierungsverfahren noch von beachtlichem Nutzen sein.

Ist die Determinante (9) gleich Null, dann befinden sich die Punkte P^1, P^2, P^3 auf einem die Kernachse normal schneidenden Kreis k und es gilt sodann wieder der Satz 2. Damit hingegen für ein bestimmtes \bar{x} und für jedes beliebige Wertepaar y, z nach Satz 3 stets $dp_y = 0$ wird, ist notwendig und hinreichend, daß die Orientierungsgrößen gleichzeitig folgende, aus (5) zu entnehmende Relationen befriedigen:

$$\left. \begin{aligned} d\omega_1 - d\omega_2 &= 0 \\ \bar{x} d\varphi_1 - (\bar{x} - b) d\varphi_2 - db_{z_1} + db_{z_2} &= 0 \\ \bar{x} d\kappa_1 - (\bar{x} - b) d\kappa_2 + db_{y_1} - db_{y_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Diese drei Gleichungen lauten insbesondere

A) beim Winkelverfahren

$$\begin{aligned} (db_{y_1} = db_{z_1} = db_{y_2} = db_{z_2} = 0): \\ d\omega_1 = d\omega_2, \quad d\varphi_1 : d\varphi_2 = d\kappa_1 : d\kappa_2 = (\bar{x} - b) : \bar{x} = 1 : t. \end{aligned} \quad (11)$$

Dabei stellt $t = \bar{x} : (\bar{x} - b)$ das *Teilverhältnis*²¹⁾ des Schnittpunktes $(\bar{x}, 0, 0)$ der Ebene $x = \bar{x}$ mit der Kernachse bezüglich der Aufnahmezentren $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ dar. Zu jeder Bündelverlagerung, deren entsprechende Orientierungsgrößen den Bedingungen (11) genügen, gehört ein „gefährliches Raumgebiet“, dessen Grundfläche Φ^0 nach Obigem in die Ebenen

$$x = \frac{t}{t-1} b = \bar{x} \quad \text{und} \quad y:z = -d\alpha_1:d\varphi_1 = -d\alpha_2:d\varphi_2 \quad (12)$$

zerfällt (vgl. [XV], A, III, IV). Das damit verbundene lineare Flächenbüschel (Nr. 3, c) besteht aus ∞^1 *orthogonalen Paraboloiden*, bzw. aus ∞^1 *Kegel zweiter Ordnung*, je nachdem das betrachtete „gefährliche Raumgebiet“ von erster oder zweiter Art (Nr. 3, b, c) ist. Diese Paraboloiden haben die durch (12) gegebenen gemeinsamen Richtebenen (siehe [XI], Nr. 3, I a, bzw. [XV], A d), hingegen berühren die Kegel dieselben Ebenen längs der Geraden $x = \bar{x}, z = 0$, bzw. $y = z = 0$. ([XV], Fall A, d)

Wird insbesondere $t = 0$, also $d\varphi_2 = d\alpha_2 = 0$ vorausgesetzt, dann fällt wegen $\bar{x} = 0$ die erste der Ebenen (12) in die yz -Ebene, während die zweite nur dann α) mit der xy -Ebene, bzw. β) mit der xz -Ebene identisch ist, wenn überdies α) $d\varphi_1 = 0$, bzw. β) $d\alpha_1 = 0$ ist. Im letzteren Fall besteht die Bündelbewegung aus einer reinen Schwenkung der linken Kammer, bei der — wie bereits bekannt ist — in allen Punkten der yz - und xz -Ebene keine bemerkbare y -Parallaxe hervorgerufen wird (siehe [XII], Nr. 1, A b, bzw. [XV], A, III).

B) Beim Folgebildanschluß

$$(d\omega_1 = d\varphi_1 = d\alpha_1 = db_{x1} = db_{y1} = db_{z1} = 0)$$

reduzieren sich obige Gln. (10) auf:

$$d\omega_2 = 0, (\bar{x} - b) d\varphi_2 - db_{z2} = 0, (\bar{x} - b) d\alpha_2 + db_{y2} = 0. \quad (13)$$

Die Grundfläche Φ^0 des damit bestimmten „gefährlichen Raumgebietes“ zerfällt daher in die Ebenen (vgl. [XI], Nr. 3, II, k, bzw. [XIV], Nr. 1, Gl. 6, oder [XV], B):

$$x = \bar{x} \quad \text{und} \quad y:z = -d\alpha_2:d\varphi_2. \quad (14)$$

Für die zugehörigen linearen Flächenbüschel (siehe Nr. 3, c) gilt im wesentlichen dasselbe wie vorhin im Fall **A**). Die zweite der Ebenen (14) vereinigt sich insbesondere mit der xz -Ebene, wenn überdies $d\alpha_2 = 0$ ist, d. h. wenn das rechte Bündel bloß eine reine Verschwenkung erfährt. Dies stimmt ebenfalls mit bereits bekannten Beziehungen überein (siehe [XII], Nr. 1, B h, bzw. [XV], B, VII).

Nr. 6. Die beim Normalfall des Orientierens auftretende Abhängigkeit zwischen den Orientierungsgrößen. Beim Normalfall der Luftphotogrammetrie wird das Einpassen zweier Folgebilder gewöhnlich mit Hilfe von *sechs Orien-*

²¹⁾ Siehe etwa *J. Krames*, Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer, Wien 1947, Nr. 9, S. 24.

tierungspunkten vorgenommen²²⁾, von welchen **1** und **2** in der Nähe der Nadirpunkte liegen, d. s. die Schnittpunkte der durch die Aufnahmezentren gelegten Lotstrahlen mit dem Geländemodell, während die übrigen Punkte **3**, **4** und **5**, **6** nächst dem oberen und unteren Bildrand, möglichst innerhalb der Ebenen $x = 0$ und $x = b$ angenommen sind. Es ist durchaus naturgemäß, daß dabei immer wieder auf das *Verschwinden der y -Parallaxen in den Nadirpunkten **1** und **2*** geachtet wird. Dies ergibt sich einmal aus der günstigeren Beobachtungsmöglichkeit zufolge des steilen Strahleneinfalles an diesen Stellen, aber auch aus dem Umstand, daß gerade diese Punkte bei den gebräuchlichen Orientierungsverfahren wiederholt zu beobachten sind²³⁾. Bei Vorliegen normaler Aufnahmebedingungen können wir ferner annehmen, daß unterhalb der Basis, insbesondere bei **1** und **2**, genügend viele gut identifizierbare Bildpaare vorhanden sind. Desgleichen kann meistens vorausgesetzt werden, daß die Basisstrecke B und die Höhen H_1 , H_2 der beiden Aufnahmezentren \mathbf{O}_1 , \mathbf{O}_2 über Grund bereits beim Bildflug hinreichend genau registriert wurden. Wir bezeichnen diese Strecken nach ihrer Reduktion auf den Maßstab des Modells mit b , h_1 , bzw. h_2 .

Liegt nun der mittlere Fehler der Flughöhenmessung unter dem für die Anwendbarkeit von Gl. (5) zulässigen Wert von db_{zi} , so müssen die noch auszuführenden Bündelbewegungen so beschaffen sein, daß sie in den Modellpunkten **1**, **2** mit den Koordinaten

$$x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = -h_1, \text{ bzw. } x_2 = b, y_2 = 0, z_2 = -h_2 \quad (15)$$

die y -Parallaxe immer zum Verschwinden bringen. Diese Größen erfüllen daher zwei Relationen, die sich aus (5) durch Einsetzen von (15) wie folgt ergeben:

$$\left. \begin{aligned} -h_1 (d\omega_1 - d\omega_2) + b dx_2 + db_{y1} - db_{y2} &= 0, \\ -h_2 (d\omega_1 - d\omega_2) + b dx_1 + db_{y1} - db_{y2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Nach Satz 1 kann man anstatt **1**, **2** in gleicher Weise auch irgend zwei andere Punkte \mathbf{P}^1 , \mathbf{P}^2 auf der räumlichen Verbindungsgeraden \mathbf{p} von **1**, **2** heran-

²²⁾ Vgl. R. Finsterwalder, Photogrammetrie 1939, S. 112 f. — Im Hinblick auf den Schluß von Nr. 5 sei noch folgendes bemerkt: Ist die Einpassung zum Beispiel so weit gediehen, daß in den Punkten 1 3 5 keine y -Parallaxe zu beobachten ist, und liegen diese drei Modellpunkte auf keinem Kreis, der die Kernachse schneidet, dann haben alle Bündelbewegungen, welche den Strahlenschnitt in 1 3 5 aufrechterhalten, nach Satz 3 die Eigenschaft, daß sie in allen Punkten der Ebene $x = 0$ und in den ∞^2 Punkten einer bestimmten Kernebene (jedoch in keinem weiteren Modellpunkt) die Parallaxe $dp_y = 0$ erzeugen. Es gibt daher (bei allgemeinen Geländeformen) *keine Bündelbewegungen, welche in mehr als vier der Orientierungspunkte den Strahlenschnitt ungedändert lassen.*

²³⁾ Dies hängt übrigens auch damit zusammen, daß die Nadirpunkte in der Mehrzahl der zu den Grundoperationen gehörigen „gefährlichen Raumgebieten“ enthalten sind, vgl. [XII], Nr. 1, Abb. 4, 5 usw.

ziehen, sofern $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2$ auf der Modellfläche liegen (Abb. 5). Gilt letzteres ins-

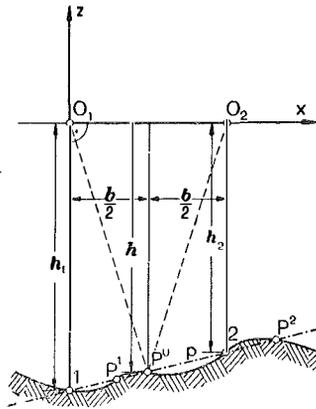


Abb. 5: Die Verbindungsgerade \mathbf{p} der Nadirpunkte 1, 2 enthält Modellpunkt \mathbf{P}^0 .

besondere für den bei der Modellmitte ($x = b/2, y = 0, z$) gelegenen Punkt \mathbf{P}^0 von \mathbf{p} , dessen Koordinate

$$z = h = \frac{h_1 + h_2}{2} \quad (16 \text{ a})$$

die „mittlere Flughöhe über Grund“ angibt, so folgt nach Obigem (vgl. auch [XI], Gl. 49, 50 a, b, und [XIV], Gln. 10–12):

$$\left. \begin{aligned} & h (d\omega_1 - d\omega_2) - \frac{b}{2} (dx_1 + dx_2) - (db_{y1} - db_{y2}) = 0 \\ \text{oder:} \quad & \beta = \frac{h}{b} = \frac{H}{B} = \frac{1}{2} \frac{dx_1 + dx_2}{d\omega_1 - d\omega_2} + \frac{1}{b} \frac{db_{y1} - db_{y2}}{d\omega_1 - d\omega_2}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Darin bedeutet β das „Basisverhältnis“. Übrigens ergibt sich (17) auch durch Summieren der beiden Gln. (16). Subtrahiert man hingegen diese Gleichungen, so erhält man als zweite (dem Fernpunkt der Geraden \mathbf{p} entsprechende) Relation:

$$\frac{h_1 - h_2}{b} (d\omega_1 - d\omega_2) + dx_1 - dx_2 = 0. \quad (18)$$

Weil die Höhen der beiden Zentren über Grund sich gewöhnlich nur wenig voneinander unterscheiden, wird Gl. (18) in vielen Fällen bloß in der Form

$$dx_1 - dx_2 = 0 \quad (19)$$

zu verwenden sein. Mit anderen Worten: Die beiden Bündel sind sodann während der letzten Bündelbewegungen jeweils um den gleichen Winkel zu verkanten.

Wie eine naheliegende geometrische Deutung sofort bestätigt (s. Abb. 6),

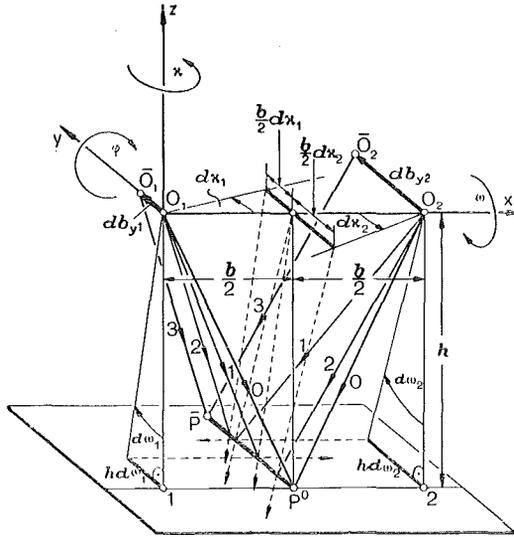


Abb. 6: Zielstrahlen zur Modellmitte P^0 :

0,0 Ausgangslage; 1,1 Lage nach Verkippung $d\omega_1, d\omega_2$; 2,2 nach anschließender Verkantung $d\alpha_1, d\alpha_2$; 3,3 Endlage nach zusätzlicher Verschiebung db_{y1}, db_{y2} . Bedingung für die Schnittlage von 3,3 ($h < 0$):

$$\text{Verlagerungsstrecke } P^0 P = -h d\omega_1 + \frac{b}{2} d\alpha_1 + db_{y1} = -h d\omega_2 - \frac{b}{2} d\alpha_2 + db_{y2}.$$

gibt die erste der Gln. (17) tatsächlich die Bedingung für solche Werte von $d\omega_1, d\omega_2, d\alpha_1, d\alpha_2, db_{y1}, db_{y2}$ an, die bei der Modellmitte P^0 Parallaxenänderungen von der algebraischen Summe Null hervorrufen (siehe Nr. 4). Jede der übrigen Orientierungsgrößen ist auf die in P^0 auftretende Parallaxe ohne Einfluß. In Abb. 6 wurden alle Orientierungsgrößen im Interesse der Deutlichkeit stark vergrößert und positiv angenommen.

Von obigen Formeln (17) sind vor allem die folgenden, auf **A**) das „Winkelverfahren“ und **B**) den „Folgebildanschluß“ bezüglichen Sonderfälle von praktischem Interesse (vgl. [XI], Nr. 5, Gln. 50 a, 50 b, und [XIV], Gln. 11, 12).

$$\left. \begin{array}{l} \text{A)} \quad 2\beta (d\omega_1 - d\omega_2) - (d\alpha_1 + d\alpha_2) = 0 \\ \text{oder:} \quad \beta = \frac{h}{b} = \frac{1}{2} \frac{d\alpha_1 + d\alpha_2}{d\omega_1 - d\omega_2}, \end{array} \right\} \quad (20)$$

bzw.

$$\left. \begin{array}{l} \text{B)} \quad h d\omega_2 + \frac{b}{2} d\alpha_2 - db_{y2} = 0 \\ \text{oder:} \quad \beta = \frac{h}{b} = \frac{1}{b} \frac{db_{y2}}{d\omega_2} - \frac{1}{2} \frac{d\alpha_2}{d\omega_2} \end{array} \right\} \quad (21)$$

Die Formeln (18) und (19) gelten im Falle **A**) unverändert, im Falle **B**) erhalten sie die Form:

$$b d\alpha_2 + (h_1 - h_2) d\omega_2 = 0 \quad (18 a)$$

oder insbesondere:
$$d\alpha_2 = 0. \quad (22)$$

Mit Rücksicht auf die vorerst überraschende Gl. (22) sei noch daran erinnert, daß eine b_{y2} -Schiebung für das Wegschaffen von Restparallaxen entlang der einzelnen Normalebenen zur Kernachse jeweils von gleicher Wirkung ist wie eine bestimmte α_2 -Drehung. Mit (22) ist daher die Endphase der Einpassung keineswegs behindert.

Daß die Orientierungswinkel $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ in den Gleichungen (16) bis (22) nicht aufscheinen, steht durchaus im Einklang mit der längst bekannten Tatsache, daß $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ als von den übrigen Orientierungsgrößen unabhängig anzusehen sind. Es war dies bereits nach den eingangs erwähnten Untersuchungen von *R. Finsterwalder*¹⁾ zu erwarten, wo sich zeigte, daß die durch Ausgleichen vermittelnder Beobachtungen berechneten mittleren Fehler von $d\varphi_1$, $d\varphi_2$ als *einzig* mit den experimentell gefundenen Werten gut übereinstimmen. Zum gleichen Ergebnis gelangten auch *E. Gotthardt*²⁾, a. a. O. S. 8, und *W. K. Bachmann*⁴⁾, a. a. O., S. 37. Hiezu ist jedoch noch zu bemerken, daß dieses Fehlen der Größen $d\varphi_1$, $d\varphi_2$ in (16) bis (22) nur davon herrührt, daß für alle unterhalb der Basis gelegene Modellpunkte ($y = 0$) die Glieder mit $d\varphi_1$, $d\varphi_2$ in der Fehlergleichung (5) wegfallen. Diese Punkte, vor allem die Nadirpunkte werden aber tatsächlich (wie schon in Nr. 4 erwähnt) beim praktischen Einpassen vorzugsweise beobachtet. Ausnahmsweise (z. B. bei Aufnahmen im Küstengebiet)²⁴⁾ kann es indessen auch vorkommen, daß der Modellbereich unterhalb der Basis (nur leere Wasserflächen umfaßt, also) keine identifizierbare Punktpaare liefert. Man hat sodann im Sinne unserer Ausführungen in Nr. 4 durchwegs mit Modellpunkten zu operieren, deren y -Koordinaten von Null beträchtlich abweichen. In einem solchen Fall enthalten die Relationen von der Form $dp_y^i = 0$ sowohl $d\varphi_1$, $d\varphi_2$ wie allenfalls auch db_{x1} , db_{x2} . Da derartige Fälle in der Praxis nur sehr selten in Betracht gezogen werden, kann der Umstand, daß die Unabhängigkeit der Verschwenkungen schon früher erkannt wurde, als praktische Erhärtung unserer Schlußfolgerungen angesehen werden.

Nr. 7. Gültigkeitsgrenzen der neuen Relationen und Hauptsatz. Für die Klarstellung der Gültigkeitsgrenzen der Gln. (16) bis (22) ist noch die räumliche Verlagerung von Bedeutung, welche die Nadirpunkte **1**, **2** oder der Punkt **P**⁰ bei der Modellmitte zufolge der betrachteten Bündelbewegungen erfährt. Nach Nr. 4 genügt es, den an diesen Stellen auftretenden Höhenfehler dh zu berechnen. Nun ergibt aber Gl. (6) für $y = 0$ und $db_{x1} = db_{x2} = 0$:

$$dh = \frac{x^2 + z^2}{b} d\varphi_1 - \frac{(x - b)^2 + z^2}{b} d\varphi_2 - \frac{x}{b} db_{z1} + \frac{x - b}{b} db_{z2}, \quad (23)$$

²⁴⁾ Vgl. hiezu etwa *P. Tham*, Photogrammetrische Auswertung ebener Gelände. Dissertation Stockholm, 1939.

für **1**, **2** und **P⁰** insbesondere:

$$dh = \frac{h_1^2}{b} (d\varphi_1 - d\varphi_2) - b d\varphi_2 - db_{z_2}, \quad dh = \frac{h_2^2}{b} (d\varphi_1 - d\varphi_2) + b d\varphi_1 - db_{z_1} \quad (24)$$

$$\text{bzw.} \quad dh = \frac{b^2 + (h_1^2 + h_2^2)}{4b} (d\varphi_1 - d\varphi_2) - \frac{1}{2} (db_{z_1} + db_{z_2}). \quad (25)$$

Man entnimmt daraus, daß dh für alle unterhalb der Basis gelegene Modellpunkte gerade von den in (16) bis (22) aufscheinenden Orientierungsgrößen unabhängig ist. Insbesondere hängt dh in den Punkten **1**, **2** und **P⁰** **A**) beim „Winkelverfahren“ bloß von den Verschwenkungen, **B**) beim „Folgebildanschluß“ bloß von $d\varphi_2$ und db_{z_2} ab. Dies erleichtert die Abschätzung des Höhenfehlers beträchtlich.

Wir sind damit in der Lage, für jeden in Frage kommenden Fall jene Schranken der Bündelbewegungen zu berechnen, innerhalb welcher etwa die Schnittpunkte der nach den Modellpunkten in der xz -Ebene zielenden Aufnahmestrahlen im Innern des zugeordneten „gefährlichen Raumgebietes“ bleiben. Um dies an Hand konkreter Beispiele näher darzulegen, stützen wir uns wie bei früheren Gelegenheiten (siehe [XII], Nr. 1, [XIV], Nr. 4) im Falle **A**) des „Winkelverfahrens“ auf die von *R. Finsterwalder* im Jahre 1934 verwendeten Aufnahmedaten, bzw. **B**) beim „Folgebildanschluß“ auf die bei *W. K. Bachmann* (1943) eingehaltenen Versuchsbedingungen.

A) Im ersteren Falle war $b = 160 \text{ mm}$, $h = -412 \text{ mm}$ und die in der Modellebene $z = h$ gemessene y -Paralaxe hatte den mittleren Fehler $\mu = 0.03 \text{ mm}$. Ferner betragen die empirisch gefundenen mittleren Orientierungsfehler (für beide Kammern durchschnittlich):

$$m_{\omega} = \pm 1.6', \quad m_{\varphi_i} = \pm 3', \quad m_{\varkappa_i} = \pm 3.6'.$$

Erteilen wir den Orientierungswinkeln die k -fachen Beträge ihrer mittleren Fehler ($k > 1$), so ist der Höhenunterschied zwischen der Grundfläche Φ^0 und einer Begrenzungsfläche Φ_{\pm} bei der Modellmitte nach bereits früher abgeleiteten Formeln (siehe [XI], Gl. 31, 34 a, und [XIV], Gl. 15):

1) Bei einem „gefährlichen Raumgebiet erster Art“ (siehe Nr. 3):

$$\frac{M}{2} = \frac{-4\beta\mu}{k \cdot 2 d \varkappa_i} = \frac{1}{2} \frac{-4 \frac{412}{160} 0.03}{2 k \cdot 3.6 : \rho'} \text{ mm} = \frac{1}{k} 73.7 \text{ mm}, \text{ sowie}$$

2) für ein „gefährliches Raumgebiet zweiter Art“ (wegen $d\lambda = dp_n : f = 0.03 : h$):

$$Q_{\pm} = \frac{-h}{\pm \frac{1}{d\lambda} d\omega + 1} = \frac{-412}{\pm \frac{412}{0.03} k \cdot \frac{1.6}{3438} + 1} \text{ mm} = \frac{-1}{\pm 0.0155 k + 0.002427} \text{ mm}.$$

Diese Abmessung gilt wegen $h_1 = h_2 = h$ in beiden Fällen *zugleich für alle Stellen unterhalb der Basis* (vgl. [XI], Nr. 2, Nr. 4, bzw. [XIV], Nr. 2, b, oder

[XV], A c, B j). Andererseits ergibt sich aus obigen Formeln (24) und (25) für $d\varphi_1 = \pm k \cdot 3'$, $d\varphi_2 = \mp k \cdot 3'$ in den Punkten **1** oder **2**:

$$dh = \pm k \cdot 1.99 \text{ mm, bzw. in } \mathbf{P}^0: dh = \pm 1.92 \text{ mm.}$$

Demnach ist dh in den Punkten **1** und **2** etwas größer als an der Modellmitte. Wir berechnen nun jene größten Werte von k , bei denen der Schnittpunkt der zu **1** (oder **2**) gehörigen Zielstrahlen ungünstigsten Falles bis an die eine Begrenzungsfläche des „gefährlichen Raumbgebietes“ verlagert wird. Zu diesem Zweck setzen wir:

$$\text{Für } \mathbf{1)} \quad \frac{M}{2} = dh, \text{ also } \frac{1}{k} 73.7 = k \cdot 1.99,$$

$$\text{bzw. für } \mathbf{2)} \quad Q \pm = dh = k \cdot 1.99.$$

Man erhält hieraus im Falle 1) $k \approx 6.1$, bzw. im Falle 2) (als kleinere Wurzel einer quadratischen Gleichung) $k \approx 5.6$.

Danach liegen die verlagerten Strahlenschnittpunkte unterhalb der Basis höchstens gerade dann auf der Begrenzungsfläche Φ^+ oder Φ^- (vgl. Nr. 3, b, c, d), wenn die Orientierungswinkel innerhalb folgender Grenzen liegen²⁵⁾:

„gefährl. Raumbgebiete“	$d\omega = d\omega_1 - d\omega_2$:	$d\varphi_1$:	$d\kappa_1$:	(26)
1) erster Art:	$\pm 10'$	$\pm 18'$	$\pm 22'$	
2) zweiter Art:	$\pm 9'$	$\pm 17'$	$\pm 20'$	

Wie schon in Nr. 3, d, und Nr. 4 erwähnt wurde, werden die Orientierungswinkel beim Einpassen eines Bildpaares Schritt für Schritt verkleinert, und zwar nehmen sie schließlich Werte an, die wesentlich unterhalb der soeben angegebenen Schranken liegen. Für alle solche Werte ist jedoch **1)** $dh < \frac{M}{2}$ bzw. **2)** $dh < Q \pm$ und damit ist sichergestellt, daß während der durch (26) gekennzeichneten Endphase des Orientierens die längs der xz -Ebene vorhandenen Schnittpunkte entsprechender Zielstrahlen verläßlich im Innern des zugehörigen „gefährlichen Raumbgebietes“ bleiben.

Für den **B)** „Folgebildanschluß“ ergeben sich die analogen Grenzen wie folgt. Wir nehmen hiefür (nach W. K. Bachmann) $b = 100 \text{ mm}$, $f = 164 \text{ mm}$, $h = -324 \text{ mm}$ und den mittleren Fehler der in der Modellebene $z = h$ gemessenen y -Parallaxe mit $\mu = 0.04 \text{ mm}$ an. Die von W. K. Bachmann unter diesen Voraussetzungen experimentell festgestellten mittleren Orientierungsfehler betragen:

$$m_{\omega_2} = \pm 2.5', \quad m_{\varphi_2} = \pm 4.5', \quad m_{\kappa_2} = \pm 1.1', \\ m_{b_{y_2}} = \pm 0.32 \text{ mm}, \quad m_{b_{z_2}} = \pm 0.10 \text{ mm}.$$

²⁵⁾ Daß hierin die Winkel $d\kappa_i$ ebenfalls mit dem k -fachen Betrag ihres mittleren Fehlers angeführt wurden, ist mit dem in Gl. (20) ausgedrückten Zusammenhang zwischen den Orientierungswinkeln begründet.

Werden wieder die mit einem Faktor k multiplizierten Beträge dieser Fehler ($k > 1$) als Orientierungsgrößen angenommen, so ist für ein „gefährliches Raumgebiet erster oder zweiter Art“ (siehe [XI], Formel 34 b, 35, bzw. [XIV], Formel 18):

$$1) \frac{M}{2} = \frac{0.04}{k \cdot 2.5} 3438 = \frac{1}{k} 55 \text{ mm},$$

bzw. (wegen $d\lambda = 0.04 : h$):

$$2) Q_{\pm} = \frac{d\lambda h}{\pm d\omega_2 - d\lambda} = \frac{\frac{0.04}{324} 324}{\pm k \frac{2.5}{3438} - \frac{0.04}{324}} \text{ mm} = \frac{1}{\pm k \cdot 0.0182 - 0.003088}$$

Aus den Gleichungen (24), (25) folgt ferner für $d\varphi_1 = db_{z1} = 0$, $d\varphi_2 = -k \cdot 4.5'$, $db_{z2} = -k \cdot 0.1 \text{ mm}$ als Höhenfehler in den Punkten:

	1	P ⁰	2
$dh =$	$k \cdot 1.61 \text{ mm}$	$k \cdot 1.41 \text{ mm}$	$k \cdot 1.37 \text{ mm}$

Wie man sieht, ist jetzt dh beim Modellpunkt **1** am größten, bei **2** am kleinsten. Aus $dh = 1.61 k = 1) \frac{M}{2}$ bzw. **2) Q_{\pm}** ergibt sich nunmehr ähnlich wie vorhin unter **A)** als Höchstbetrag des Faktors k :

$$1) k = 5.9 \quad \text{bzw.} \quad 2) k = 5.8.$$

Für diese Werte von k können die verlagerten Strahlenschnittpunkte im ungünstigsten Fall auf eine der Begrenzungsflächen des „gefährlichen Raumgebietes“ gelangen. Somit ist die *Endphase* des Folgebildanschlusses im vorliegenden Beispiel durch folgende Schranken festgelegt:

„gefährl. Raumgebiet“	$d\omega$	$d\varphi$	$d\alpha$	db_y	db_z
1) erster Art:	$\pm 14.6'$	$\pm 26.4'$	$\pm 6.4'$	$\pm 1.9 \text{ mm}$	$\pm 0.59 \text{ mm}$
2) zweiter Art:	$\pm 14.4'$	$\pm 25.9'$	$\pm 6.3'$	$\pm 1.8 \text{ mm}$	$\pm 0.58 \text{ mm}$

(27)

Wenn wir nun beispielsweise voraussetzen, daß bei den einzelnen in Nr. 4 gekennzeichneten Orientierungsschritten jede daran beteiligte Orientierungsgröße stets kleiner (höchstens ebenso groß) ist wie beim jeweils vorangegangenen Schritt, dann können wir nach obigem feststellen:

In den betrachteten Fällen bleiben bei jeder Bewegung der beiden Zielstrahlbündel, die sich innerhalb der Schranken (26) bzw. (27) hält, die Schnittpunkte der zum Modellbereich unterhalb der Basis gehörigen Zielstrahlenpaare verlässlich innerhalb des durch diese Bewegung bestimmten „gefährlichen Raumgebietes“.

Weil ein Verschwenkungswinkel $d\varphi_i$ auch als Höhenunterschied $db_{zi} = B \frac{d\varphi^i}{\rho^i}$ zwischen den beiden Aufnahmezentren zur Geltung kommt, sind mit (26) und (27) zugleich bestimmte Genauigkeitsgrenzen für die Flughöhen H_1, H_2

über Grund im Augenblick der beiden Aufnahmen vorgezeichnet. Man berechnet leicht, daß dieser Höhenfehler (etwa bei einer Basislänge B von 1000 m) für die betrachteten unabhängigen Bildpaare (siehe **A**) rund 5 m , hingegen für obigen Folgebildanschluß (**B**) rund 7 m beträgt. Man erkennt daraus, daß die Flughöhenmessung z. B. mittels Funkpeilung²⁶⁾ für den vorliegenden Zweck ausreichend genau wäre. Wir können nunmehr die Ergebnisse wie folgt zusammenfassen:

Hauptsatz:

Sind zwei angenäherte Senkrechtaufnahmen eines Geländes gegeben und kennt man mit der soeben angegebenen Genauigkeit die Flughöhen über Grund H_1 , H_2 dieser Aufnahmen, so erfüllen die Orientierungsgrößen in der durch Schranken von der Art (26) bzw. (27) gekennzeichneten Endphase des Einpassens die Bedingungsgleichungen (17) und (18); für unabhängige Bildpaare oder den Folgebildanschluß gelten insbesondere die Gleichungen (20) und (18) bzw. (21) und (18 a). Liegt der Höhenunterschied $H_1 - H_2$ unterhalb der oben hervorgehobenen Grenze, dann gilt im Besonderen (neben Gl. 17, 20 bzw. 21) auch noch Gl. (19) bzw. (22).

(Schluß folgt.)

Literaturbericht

Buchbesprechung

Prof. Dr. sc. techn. Max Zeller: Lehrbuch der Photogrammetrie. Mit 197 Figuren und 38 Abbildungen auf Tafeln. 304 Seiten 8°. In Leinwand gebunden Fr. 32.—. Verlag: Orell Füssli in Zürich 1947.

Wie in den meisten Gebirgsländern hat auch in der Schweiz die Photogrammetrie spezielle Pflege und erhöhte Anwendung gefunden und dadurch eine besonders erfreuliche Entwicklung genommen, so daß die Schweiz heute zu den führenden Staaten auch auf diesem Gebiete gehört.

So ist es erklärlich, daß dieses jüngste Lehrbuch der Photogrammetrie, verfaßt von einer so gewichtigen Autorität des schweizerischen Vermessungswesens, wie es Professor Dr. Zeller ist, der als Inhaber des Lehrstuhles für Photogrammetrie und als Leiter des Photogrammetrischen Institutes an der Technischen Hochschule in Zürich sowohl als Theoretiker wie auch als Praktiker internationalen Ruf besitzt, von allen Fachkreisen mit größtem Interesse entgegengenommen wird.

Der Verfasser gliedert in seinem Werk den Stoff in 4 Abschnitte, welche behandeln: 1. Die optischen und photogrammetrischen Grundlagen der Photogrammetrie. 2. Die terrestrische Photogrammetrie mit ihren vielfachen Anwendungen, insbesondere für topographische Aufnahmen, für die Herstellung technischer Pläne, für die Ballistik, als Nahphotogrammetrie und als Mikrophotogrammetrie. 3. Die Luftphotogrammetrie einschließlich Entzerrung, Luft- und Radialtriangulation. 4. Die Anwendung der Luftphotogrammetrie speziell für topographische Karten und technische Pläne, für den Kataster und für agrarische Operationen, für geologische Kartierungen, ferner die Anwendung der Entzerrung und die Anwendung der Lufttriangulation bei topographischen Aufnahmen.

²⁶⁾ Diesen Hinweis verdanke ich meinem einstigen Schüler K. Rinner.

Genauigkeitssteigerung der gegenseitigen Einpassung von Luftaufnahmen auf Grund noch nicht beachteter Bedingungsgleichungen zwischen den Orientierungsgrößen

Von Josef K r a m e s, Wien, korrespondierendes Mitglied der österr. Akademie der Wissenschaften

(Mit 6 Textabbildungen)

Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen

(Schluß)

Nr. 8. Vergleich mit Untersuchungen von R. Finsterwalder und E. Gotthardt. Mit den vorangegangenen Ausführungen sind zugleich gegenüber den Ergebnissen der Arbeiten anderer Autoren wesentliche Fortschritte erzielt. Wir verweisen zuerst auf *R. Finsterwalder* ⁷⁾, der gezeigt hat, daß beim Vorliegen des sogenannten „gefährlichen Drehzylinders“, und zwar beim Winkelverfahren, die Summe $d\kappa_1 + d\kappa_2$ und die Differenz $d\omega = d\omega_1 - d\omega_2$ überall im Gesichtsfeld einen *konstanten Quotienten* besitzen. Er hat jedoch nicht bemerkt, daß dieser Quotient stets gleich dem doppelten Basisverhältnis β ist (vgl. etwa obige Gl. 20). Überdies sei noch hervorgehoben, daß diese Relation für das Auftreten des „gefährlichen Zylinders“ wohl eine notwendige, jedoch *keineswegs auch eine hinreichende* Bedingung darstellt. Denn für jedes gegebene Basisverhältnis $\beta = h/b$ gibt es ja insgesamt ∞^3 „gefährliche Flächen im engeren Sinne“ Φ^0 , welche den Modellpunkt \mathbf{P}^0 mit den Koordinaten $x = b/2, y = 0, z = h = b\beta$ enthalten (vgl. [XI], Nr. 4, Satz 3). Genügen aber die Orientierungsgrößen *bloß der Bedingung* (20), bzw. (21), so ist damit nur *sichergestellt, daß die zugehörigen „gefährlichen Raumbereiche“* (sowohl für das Winkelverfahren wie auch für den Folgebildanschluß) *je eine dieser ∞^3 Flächen zur Grundfläche haben* (vgl. Nr. 4, Absatz nach Gl. 6). Um als Grundfläche insbesondere den „gefährlichen Zylinder“ zu erhalten, hat man den fünf Orientierungsgrößen neben (20) bzw. (21) auch noch (19) bzw. (22) und zwei weitere, *also insgesamt vier Bedingungen vorzuschreiben*. Diese lauten (gemeinsam angeschrieben):

A) Beim Winkelverfahren:

$$2\beta d\omega - (d\kappa_1 + d\kappa_2) = 0 \quad (20)$$

$$d\kappa_1 - d\kappa_2 = 0 \quad (19)$$

$$d\varphi_1 - d\varphi_2 = 0 \quad (28 a)$$

$$d\varphi_1 = d\varphi_2 = 0 \quad (29 a)$$

B) Beim Folgebildanschluß:

$$h d\omega_2 + \frac{b}{2} d\kappa_2 - db_{y_2} = 0 \quad (21)$$

$$d\kappa_2 = 0 \quad (22)$$

$$d\varphi_2 = 0 \quad (28 b)$$

$$db_{z_2} = 0 \quad (29 b)$$

Von diesen Gleichungen gibt (19) bzw. (22) für sich allein die Bedingung dafür an, daß die Fläche Φ^0 in der xz -Ebene, unterhalb der Basis, *eine zur Kernachse parallele Erzeugende* besitzt²⁷⁾. Ferner ist (28 a oder b) allein kennzeichnend für solche Grundflächen Φ^0 , deren zweite in der xz -Ebene neben der Kernachse \mathbf{e}_s vorhandene Erzeugende \mathbf{f} (siehe Nr. 3, c) zu \mathbf{e}_s *parallel* ist. Dazu sei noch bemerkt, daß von den ∞^4 verschiedenen Wertverbindungen von $d\omega$, $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, bzw. $d\omega_2$, $d\varphi_2$, $d\alpha_2$, db_{y2} , db_{z2} , welche der Bedingung (20) bzw. (21) genügen, jeweils ∞^1 proportionale Quintupel auf dieselbe Grundfläche Φ^0 führen (vgl. Nr. 3, Schluß von a und insbesondere Fußn. 11). Ferner werden die beiden Bedingungen (20) und (19), bzw. (21) und (22) gleichzeitig von ∞^3 Wertverbindungen der Orientierungsgrößen erfüllt, zu denen ∞^2 Flächen Φ^0 gehören, usw. Man erkennt so schließlich, daß für das Auftreten des zur xz -Ebene symmetrischen „gefährlichen Drehzylinders“ von gegebenem Durchmesser $h = \beta \cdot b$ tatsächlich das gleichzeitige Bestehen der angeführten vier Bedingungen notwendig und hinreichend ist (vgl. auch [XI], Nr. 3, I e, h, II, q, t, bzw. [XIV], Nr. 3, [XV], A, e).

Bei diesen Erwägungen kommt immer wieder die bereits in Nr. 4 (Absatz nach Gl. 6) hervorgehobene geometrische Deutung der allgemeinen Fehlergleichung (5) zur Geltung. Wenn man nun bedenkt, daß diese Gleichung streng genommen *nur für infinitesimale Orientierungsgrößen* richtig ist, mit anderen Worten, daß (5) umso genauer gilt, je kleiner die Orientierungsgrößen angenommen sind, so erkennt man jetzt auch, *daß die linken Seiten der* (jeweils zuerst angeführten) *Formeln (17) bis (22) bei gegen Null konvergierenden Orientierungsgrößen von höherer Ordnung als diese unendlichklein werden*. Demgegenüber haben vor allem R. Finsterwalder²⁷⁾ und E. Gotthardt²⁸⁾ bloß erkannt, daß die Verkantungsdifferenz, bzw. (im wesentlichen) die linke Seite der ersten Gleichung (20) auffallend kleine Werte annehmen.

Zur zuletzt genannten Erkenntnis gelangte Gotthardt in seiner Habilitationsschrift²⁸⁾. Diese beschäftigt sich nur mit dem Winkelverfahren und stützt sich vor allem auf eine Transformation, durch welche die fünf Orientierungsgrößen $d\omega = d\omega_1 - d\omega_2$, $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ durch bestimmte fünf Funktionen von ihnen ersetzt werden, die sich wie voneinander unabhängige („konjugierte“) Variable verhalten. Diesen besonderen „freien Funktionen“ kommen zugleich ausgezeichnete Genauigkeitseigenschaften zu, und zwar ist unter den damit bestimmten neuen Orientierungsgrößen die folgende

$$F_4 = K (d\alpha_1 + d\alpha_2) + L (d\omega_1 - d\omega_2) \quad (30)$$

weitaus am genauesten gleich Null. Sie deckt sich bei Beachtung des in Nr. 2 eingeführten Koordinatensystems, abgesehen von den Faktoren K und L , mit der linken Seite von (20). Der Wert dieser Funktion erwies sich am kleinsten bei einem Gebirgsrücken und war nur unwesentlich größer bei einem ebenen Gelände und einem Gebirgstal. Für jede dieser Geländeformen wurden auch die Faktoren K und L (siehe Gl. 30) berechnet. Bei dem mit einem Basisverhältnis

²⁷⁾ Die ∞^3 dieser Bedingung genügenden Flächen Φ^0 sind in [XI], Nr. 3, I, Fall c, sowie [II], Fall m, näher beschrieben.

$\beta = 3:1$ aufgenommenen Tal ergab sich beispielsweise $L = 0\cdot975$, $K = 0\cdot158$, so daß hier

$$L : K = 2 \text{ mal } 3\cdot1$$

mit obiger Gleichung (20) auffallend gut übereinstimmt. Danach bilden diese Gotthardtschen Berechnungsergebnisse bereits eine vorzügliche numerische Bestätigung für unsere in Nr. 6 abgeleiteten Bedingungsgleichungen. Seine Betrachtungsweise ließe sich in ähnlicher Weise auch auf den Folgebildanschluß übertragen. Man hätte zu diesem Zweck fünf analoge Funktionen ausgezeichneter Genauigkeit abzuleiten, darunter als Seitenstück zu (30) die aus Gl. (21) zu entnehmende

$$F = \beta d\omega_2 - \frac{1}{2} d\alpha_2 - \frac{1}{2} db_{y_2}. \quad (31)$$

Nr. 9. Berechnung der mittleren Orientierungsfehler auf Grund der Bedingungsgleichungen. Für die praktischen Anwendungen ist jetzt vor allem von Interesse, welche *mittleren Fehler der Orientierungsgrößen* unter Zugrundelegung obiger Bedingungsgleichungen berechnet werden können. Um mit den Ergebnissen von praktischen Versuchsarbeiten vergleichen zu können, stützen wir uns im folgenden abermals auf die bereits in Nr. 6 herangezogenen Aufnahmebedingungen, die von *R. Finsterwalder* (für unabhängige Bildpaare), bzw. von *W. K. Bachmann* (für den Folgebildanschluß) verwendet wurden. Da es sich in beiden Fällen um eine horizontale Modellebene handelt, gilt $h_1 = h_2$, so daß von den fünf Orientierungsgrößen jedesmal je zwei mittels der Formeln (20) und (19), bzw. (21) und (22) eliminiert werden können. Die mittleren Fehler der drei restlichen Größen ergeben sich sodann nach der gebräuchlichen Methode vermittelnder Beobachtungen. Im Falle

A) Unabhängiger Bildpaare (nach *R. Finsterwalder*) haben die sechs Orientierungspunkte, in denen die y -Parallaxe beobachtet wird, die Koordinaten:

	1	2	3	4	5	6	
x	0	160	0	160	0	160	} mm (32)
y	0	0	168	168	-168	-168	
z	-412	-412	-412	-412	-412	-412	

Eliminiert man nun etwa $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ aus Gl. (5) gemäß Gl. (19), (20), so ergibt sich:

$$dp_y = -\frac{y^2}{z} d\omega + \frac{xy}{z} d\varphi_1 - \frac{(x-b)y}{z} d\varphi_2. \quad (33)$$

Wird der mittlere Fehler der in den sechs Orientierungspunkten gemessenen y -Parallaxe (wie bei *R. Finsterwalder*) mit $\mu = 0\cdot03$ mm angenommen, so erhält man aus (33) und (19), (20) mittels der bekannten Gewichtsgleichungssysteme die mittleren Orientierungsfehler:

$$d\omega = \pm 0\cdot75_3', \quad d\varphi_1 = \pm 1\cdot1_2', \quad d\alpha_1 = \pm 1\cdot9_4'.$$

Zur Gegenüberstellung seien die von *R. Finsterwalder* aus praktischen Versuchen gewonnenen (durchschnittlichen) Fehlerwerte nochmals angegeben:

$$d\omega = \pm 1'62', \quad d\varphi_1 = \pm 3'0_2', \quad d\alpha_1 = \pm 3'62'.$$

Wie man sieht, betragen die auf Grund unserer Bedingungsgleichungen berechneten Werte *rund die Hälfte* der empirisch ermittelten mittleren Fehler. Wir kommen hierauf noch zu sprechen. Für den

B) „Folgebildanschluß“

sind die Koordinaten der sechs Orientierungspunkte (nach *W. K. Bachmann*):

	1	2	3	4	5	6		
x	0	100	0	100	0	100	}	mm (34)
y	0	0	120	120	-120	-120		
z	-324	-324	-324	-324	-324	-324		

und die in der Modellebene gemessene γ -Parallaxe hat den mittleren Fehler $\mu = 0'04$ mm. Wegen Gl. (22) ist jetzt nur db_{y_2} gemäß (21) zu eliminieren, so daß gilt:

$$dp_y = \frac{y^2}{z} d\omega_2 - \frac{(x-b)y}{z} d\varphi_2 + \frac{y}{z} db_{z_2}. \quad (35)$$

Danach berechnen sich die mittleren Orientierungsfehler wie folgt:

$$m_{\omega_2} = \pm 1'56', \quad m_{\varphi_2} = \pm 3'70', \quad m_{\alpha_2} = \pm 0'00'$$

$$m_{b_{y_2}} = \pm 0'147 \text{ mm}, \quad m_{b_{z_2}} = \pm 0'076 \text{ mm}.$$

Hingegen waren die von *W. K. Bachmann* empirisch festgestellten Werte:

$$m_{\omega_2} = \pm 2'43', \quad m_{\varphi_2} = \pm 4'48', \quad m_{\alpha_2} = \pm 1'08'$$

$$m_{b_{y_2}} = \pm 0'32 \text{ mm}, \quad m_{b_{z_2}} = \pm 0'10 \text{ mm}.$$

Die nach dem angegebenen Verfahren berechneten Fehlerwerte sind also auch in diesem Falle wesentlich kleiner, zum Teil ungefähr bloß halb so groß wie die durch praktische Versuche festgestellten. Stellt man den bei *Bachmann* aufscheinenden Verkantungswinkel als zusätzliche γ -Schiebung durch die Strecke b $d\alpha_2$: ρ' in Rechnung, so ist dort $m_{\alpha_2} = \pm 0'0'$ und $m_{b_{y_2}} = \pm 0'35$ mm zu setzen, wonach obige Feststellungen noch deutlicher in Erscheinung treten.

Daß die neu berechneten mittleren Orientierungsfehler in beiden Fällen durchwegs bloß rund die Hälfte der empirisch gefundenen Fehler ausmachen, ist wohl einigermaßen beachtenswert. Dieses überraschende Ergebnis hängt offenbar damit zusammen, daß durch die Bedingungsgleichungen (17) bis (22) die Unsicherheit bei der Lösung der Hauptaufgabe während der Endphase des Orientierens wesentlich herabgesetzt wird. Denn bei Beachtung dieser Gleichungen hat man nun nicht mehr für fünf, sondern nur noch für drei (voneinander unabhängige) Unbekannte geeignete Werte auf optisch-mechanischem Wege herauszufinden.

Nr. 10. Über die erforderlichen Ergänzungen der optisch-mechanischen Verfahren und Instrumente. Daß das optisch-mechanische Einpassen zweier Luftaufnahmen *umso unsicherer* wird, *je kleiner* die wegzuschaffenden Restparallaxen geworden sind, hat man schon längst erkannt und diesen Umstand meistens durch ein mehr oder minder systematisches Abtasten zu überbrücken getrachtet. Statt dieses dem Zufall ausgelieferten Vorganges hat vor allem *W. K. Bachmann* die Ausmittlung der Ergebnisse wiederholter (drei- bis sechsmaliger) Orientierungen nachdrücklich vorgeschlagen. Dies wurde indessen von anderer Seite aus wirtschaftlichen und arbeitstechnischen Gründen abgelehnt²⁸⁾. Umso willkommener wird daher eine *Genauigkeitssteigerung* sein, die bereits in einem einzigen Arbeitsgang ungefähr dieselbe Wirkung erzielt, wie die von *W. K. Bachmann* vertretene Lösung.

Eine solche Verbesserung des Orientierungsvorganges ist mit obigen Ausführungen am Schluß von Nr. 9 unmittelbar gegeben. Sie läuft einfach darauf hinaus, *die Orientierungsbewegungen während der durch Schranken von der Größenordnung in (26) und (27) bestimmten Endphase immer nur mit der durch die Bedingungsgleichungen (17) bis (22) zum Ausdruck gebrachten gegenseitigen Abhängigkeit (Koppelung) auszuführen.*

A) Beim „Winkelverfahren“

hat man z. B. gleichzeitig mit jeder Verkippung (Querneigung) des einen Projektors durch einen kleinen Winkel $d\omega$ beide Projektoren wegen Gl. (20) derart im Ausmaß dx_1 , bzw. dx_2 zu verkanten, daß

$$\frac{dx_1 + dx_2}{2} = \beta d\omega$$

ist. Die hierfür erforderliche Kenntnis der Größe von β ist entweder den während des Bildfluges registrierten Daten oder den in der vorliegenden Endphase des Einpassens bereits (angenähert) vorhandenen Strahlenschnittpunkten zu entnehmen. Da desgleichen auch die Höhen h_1 , h_2 der beiden Bündelscheitel über der Modellfläche hinreichend genau bekannt sind, kann außerdem noch gemäß Gl. (18) die Verkantungsdifferenz

$$dx_1 - dx_2 = \frac{h_1 - h_2}{b} d\omega$$

angenommen werden. *Zu jedem durchdrehten Winkel $d\omega$ gehören also eindeutig bestimmte Werte dx_1 , dx_2 der Verkantungswinkel.* Neben diesen gekoppelten Bündeldrehungen stehen sodann noch die davon unabhängigen Verschwenkungen durch kleine Winkel $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ für die Herstellung der gesuchten endgültigen Einpassung zur Verfügung.

B) Beim „Folgebildanschluß“

(z. B. mit Festhalten der linken Kammer) sind die durch die Gleichungen (21) und (22) vorgezeichneten Koppelungen der Bündelbewegungen einzuhalten.

²⁸⁾ Siehe *A. Brandenberger*, Fehlertheorie der äußeren Orientierung von Steilaufnahmen, Dissertation Zürich 1946, S. 136 f.

Verkippt man etwa den rechten Projektor durch einen Winkel $d\omega_2$, so ist er wegen Gl. (18), (21) und (16 a) gleichzeitig damit durch den Winkel

$$d\alpha_2 = -\frac{h_1 - h_2}{b} d\omega_2$$

zu verkanten und außerdem durch die kleine Strecke

$$db_{y_2} = h d\omega_2 + \frac{b}{2} d\alpha_2 = h_2 d\omega_2$$

parallel zur y -Richtung zu verschieben. Zur Lösung der Hauptaufgabe sind nunmehr bloß geeignete Werte der drei Größen $d\omega_2$, $d\varphi_2$ und db_{z_2} auf optisch-mechanischem Wege zu ermitteln.

Zur erleichterten Ausführung der soeben geschilderten gekoppelten Bündelbewegungen kann man schließlich die bisher verwendeten Orientierungsmaschinen zusätzlich mit geeigneten, unseren Bedingungsgleichungen entsprechenden Mechanismen ausstatten, die jeweils nach Bedarf, d. h. während der bezeichneten Endphase des Orientierens in Funktion zu setzen wären. Beispielsweise würde beim Winkelverfahren für den meistens vorliegenden Fall der Anwendbarkeit von Gl. (19) ein einfaches Zahnradgetriebe einzubauen sein, um die gleichzeitige Verkantung beider Projektoren um jeweils gleiche Winkel zu gewährleisten. Ebenso lassen sich leicht weitere Mechanismen ausfindig machen, mit deren Hilfe auch die übrigen Bedingungsgleichungen je nach Bedarf (mit ausreichender Genauigkeit) automatisch erfüllt sind.

Es erübrigt sich sodann noch die Aufstellung von Orientierungsverfahren nach dem Vorbild der bisher üblichen, die alle auf *Otto v. Grubers* Prinzipien zurückgehen. Während jedoch darin im wesentlichen immer fünf verschiedene Grundoperationen zu einem Orientierungsverfahren zusammengefaßt waren, sind bei den neu zu entwickelnden Verfahren für die Endphase des Einpassens bloß drei (voneinander unabhängige) Grundoperationen in geeigneter Weise aneinanderzureihen.

Die Anfänge der relativen Schweremessung

Von Vermessungsrat Dr. Robert N o r z, Leiter des Vermessungsamtes in Schwaz

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

Am 1. März 1947 waren es 60 Jahre, seit der erste Pendelapparat zur Durchführung relativer Schweremessungen fertiggestellt und in Verwendung genommen wurde. Da dieser Apparat in Wien konstruiert und ausgeführt worden war, die relative Schweremessung von hier ihren Ausgang nahm und der Pfeiler im Pendelkeller des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen