Zur Frage des Gewichtes der beiden Konstanten einer linearen Gleichung

Heinrich Reichel [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **34** (2), S. 21–23

1936


```
@ARTICLE{Reichel_VGI_193604,
Title = {Zur Frage des Gewichtes der beiden Konstanten einer linearen
   Gleichung},
Author = {Reichel, Heinrich},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {21--23},
Number = {2},
Year = {1936},
Volume = {34}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN VEREINS FÜR VERMESSUNGSWESEN.
Redaktion:
Hofrat Prof. Dr. Dr. Dr. h. c. E. Doležal und o. ö. Professor Ing. Dr. H. Rohrer.

Nr. 2. **Baden bei Wien, im April 1936.** **XXXIV. Jahrg.**

Zur Frage des Gewichtes der beiden Konstanten einer linearen Gleichung.

Von Prof. Dr. Heinrich Reichel in Graz.

In der allgemeinen Gleichung der Geraden:

$$y = ax + b$$

bedeutet bekanntlich a den Tangens des Neigungswinkels α zur positiven Richtung der Abszissenachse und b den durch die Gerade begrenzten Abschnitt der Ordinatenachse.

Liegen für ein und dieselbe Gerade mehrere unterscheidbare Gruppen: I, II, III, ... von Wertepaaren (x, y) vor, aus denen die Berechnung möglich ist, so müssen schließlich die entsprechenden Konstantswerte a_{I}, a_{II}, a_{III}, ... und b_{I}, b_{II}, b_{III}, ... der Gruppenberechnungen unter einander verglichen und gemittelt werden. Dazu ist, wo immer möglich, ihr Gewicht festzustellen.

Gauß leitet dieses Gewicht allgemein für Gleichungen mit zwei Unbekannten so ab, daß er jeden der beiden Konstanzwerte und jeden empirisch gegebenen, also erst noch auszugleichenden Bestimmungspunkt der Gleichung der Reihe nach als variabel denkt und die partiellen Differentialquotienten der Beobachtungen (Ordinaten) nach dieser Variablen berechnet. Es ist dann das Gewicht der Werte a und b gleich der Differenz des Quadratsummenproduktes und des Produktsummenquadrates der beiden Differentialquotienten, geteilt durch die Quadratsumme jenes partiellen Differentialquotienten, der sich auf den anderen Wert bezieht.

Die Anwendung dieser Berechnungsweise gestaltet sich nun für die praktisch wichtigste Gleichung der Geraden einfach genug, indem alle Partiellen nach b den Wert 1, alle nach a die Werte $-x$ annehmen, so daß, wenn die Summe der Punkte gleichen Gewichtes n ist, die Gewichtsgleichungen:

$$\Pi_a = [x^2] - \frac{[x]^2}{n} \quad \text{und} \quad \Pi_b = n - \frac{[x]^2}{[x^2]} \quad \text{heißen.}$$

Bei ungleichen Gewichten ν_1, ν_2, ν_3, ..., wo die Gewichtssumme $[\nu] = n$ ist, lauten diese Gleichungen:

$$\Pi_a = [\nu x^2] - \frac{[\nu x]^2}{n} \quad \text{und} \quad \Pi_b = n - \frac{[\nu x]^2}{[\nu x^2]}.$$

Der dargelegte Rechenvorgang erscheint jedoch vielen Praktikern, die mit linearen Gleichungen zu tun haben, offenbar als zu verwickelt, als daß sie nicht lieber auf die Zusammenfassung der unter verschiedenen Umständen gewonnenen eigenen, oder auf eine einwandfreie Zusammenstellung ihrer und fremder Ergebnisse verzichten würden, indem sie die Gewichte ihrer Konstanzwerte und damit auch deren mittleren Fehler nicht angeben.

Es erscheint deshalb erwünscht, den Berechnungsvorgang durchsichtiger zu gestalten. Vereinfachen wir zunächst die obige Berechnung noch weiter, indem wir das Koordinatenkreuz in den Schwerpunkt des die Gerade bestimmenden Punkteschwarmes verlegen ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$), wobei sich a nicht ändert, während b den Wert 0 annimmt. Es wird nun, da hier $[\mathfrak{x}]$ und ebenso $[\mathfrak{x}]^2$ gleich 0 sein muß:

$$\Pi_a = [\mathfrak{x}^2], \quad \text{bzw.} \quad \Pi_a = [\nu \mathfrak{x}^2]$$
$$\Pi_b = n, \quad \text{bzw.} \quad \Pi_b = [\nu].$$

Es erhellt also, daß in diesem allereinfachsten Fall das Gewicht des Neigungswertes a die Abszissenquadratsumme, das des Ordinatenabschnittes b die Zahl der Punkte, bzw. die Summe der Punktgewichte ist. Diese Regel müßte, wenn schon nicht jedesmal aus dem Gedächtnis abzuleiten, so doch wenigstens eben so leicht zu merken sein wie andere Formeln, welche ja auch nicht ohne höhere Mathematik ableitbar sind und im Schulunterricht auch nicht abgeleitet, aber doch benützt werden.

Die Schwierigkeit für die praktische Verwendbarkeit liegt nur darin, daß dafür die Geradengleichungen immer in der allgemeinen Form gewonnen werden und auch in dieser verglichen und zusammengefaßt werden müssen. Das gilt wenigstens, wenn wirklich beide Größen: Neigung und Höhenlage, zu betrachten sind, denn die Neigung allein ändert sich ja bei der Koordinatenverlegung nicht und kann auch in der umgerechneten Form verglichen werden.

Das zweite Glied der Gauß'schen Formel

$$\Pi_a = [x^2] - \frac{[x]^2}{n} \quad \text{oder} \quad \Pi_a = [\nu x^2] - \frac{[\nu x]^2}{n}$$

bedeutet nun auch tatsächlich nichts anderes als die Umrechnung auf das Schwerpunktsystem, denn die Schwerpunktkoordinate heißt:

$$x_s = \frac{[x]}{n}, \quad \text{also} \quad \frac{[x]^2}{n} = n x_s^2.$$

Da nun $\mathfrak{x} = x - x_s$ ist, also $x = \mathfrak{x} + x_s$, ferner

$$x^2 = \mathfrak{x}^2 + 2\,\mathfrak{x} x_s + n x_s^2 \quad \text{und}$$
$$[\mathfrak{x}^2] = [x^2] - 2\,[\mathfrak{x}] x_s - n x_s^2, \quad \text{so gilt bekanntlich}$$
$$[\mathfrak{x}^2] = [x^2] - n x_s^2 = [x^2] - \frac{[x]^2}{n}.$$

Die Gauß'sche Formel für Π_a kann also durch eine leichter faßliche und bekanntere Form voll ersetzt werden. Es gilt der Satz: Das Gewicht des Neigungswertes der Geraden ist gleich der Abszissenquadratsumme im Schwerpunktsystem. Für ungleichgewichtige Punkte hätte die Formel zu lauten:

$$[\nu\mathfrak{x}^2] = [\nu x^2] - 2\,[\nu\mathfrak{x}]x_s - n x_s^2; \quad [\nu\mathfrak{x}] = 0$$
$$[\nu\mathfrak{x}^2] = [\nu x^2] - n x_s^2.$$

Anders liegen die Dinge beim Gewichte des Höhenlagewertes. Dieses ist von der Lage des Bezugssystems selbstverständlich nicht unabhängig, d. h. ein vom Koordinatenmittelpunkt entfernterer Punkteschwarm bestimmt die Höhenlage des Durchschnittspunktes seiner besten Geraden mit der Ordinatenachse — ceteris paribus — weit ungenauer als ein nahe gelegener.

Man kann aber auch hier die G a u ß'sche Formel $\Pi_b = n - \frac{[x]^2}{[x^2]}$ in eine leichter faßbare und leichter merkbare Form bringen, wenn man die Schwerpunktskoordinaten einführt. Es wird dann, da

$$x_s^2 = \frac{[x]^2}{n^2} \text{ ist, also } [x]^2 = (n x_s)^2$$

$$\Pi_b = n - \frac{n\,(n x_s^2)}{[x^2]} = n\,.\,\frac{[x^2] - n x_s^2}{[x^2]} = n\,.\,\frac{\Pi_a}{[x^2]} = n\,.\,\frac{[\mathfrak{x}^2]}{[x^2]}.$$

Der Wert n erhält also, wenn er allgemein als Gewichtsmaß der Höhenlage des Ordinatenschnittpunktes b gelten soll, als Korrekturfaktor das Verhältnis der Abszissenquadratsummen in den beiden Koordinatensystemen. Dieser Faktor wird, wenn das Schwerpunktsystem gilt, gleich 1 und mit der Entfernung des Schwarmes vom Ursprung wird er rasch kleiner.

Für den Fall ungleichgewichtiger Punkte heißt die Formel:

$$\Pi_b = n\,.\,\frac{[\nu\mathfrak{x}^2]}{[\nu x^2]}.$$

Wenn nun auch diese Überlegungen für den Geodäten durchaus entbehrlich sein mögen, worüber mir kein Urteil zusteht, so glaube ich doch sagen zu können, daß sie für den Biologen als Anleitung zur exakten Fassung gewisser Aussagen und Vergleiche von Nutzen sind.

Ueber die Scheimpflug-Bedingung bei Entzerrungsgeräten.

Von Prof. Dr. Hans L ö s c h n e r in Brünn.

Nach der dioptrischen Abstandsformel ist

$$b = \frac{g\,f}{g - f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wenn b die Bildweite, g die Gegenstandsweite, f die Brennweite bedeutet. Um eine scharfe Abbildung einer Figur, die sich auf der Diapositiv- oder Bildebene (𝔅. 𝔈.) (Abb. 1) befindet, auf einer anderen geneigten Ebene, der Projektionsebene (𝔓. 𝔈.), zu erzeugen, muß die Abstandsgleichung (1) für jeden Punkt P erfüllt sein. Dies findet nach Scheimpflug, der dieses Problem die „Projektion