

Paper-ID: VGI_193509



Einige besondere Punktbestimmungsaufgaben in vektorieller Behandlung

Karl Walek ¹

¹ *Sopron*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **33** (3), S. 68–75

1935

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Walek_VGI_193509,  
Title = {Einige besondere Punktbestimmungsaufgaben in vektorieller Behandlung  
},  
Author = {Walek, Karl},  
Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {68--75},  
Number = {3},  
Year = {1935},  
Volume = {33}  
}
```



III. Abhandlungen aus der Biologie, der Abstammungs- und Vererbungslehre.

(Mehr als 55 Artikel bloß mit Angabe der Jahreszahl und der Zeitschrift, in der sie erschienen sind.)

- 1927 Mitteilungen der Anthropologischen Gesellschaft in Wien.
 1928 Münchner medizinische Wochenschrift.
 1927 Zeitschrift für Biologie, München.
 1928, 1929 Zeitschrift für induktive Abstammungs- und Vererbungslehre, Berlin.
 1928, 1929 Klinische Wochenschrift in Berlin.
 1928, 1929, 1930 Zeitschrift für Volksaufartung und Erbkunde in Berlin.
 1928 Volk und Rasse — München.
 1928 Zeitschrift für Immunitätsforschung und experimentale Therapie — Jena.
 1931 Zeitschrift für Tierzucht — Berlin.
 1930 Zeitschrift für Sexualwissenschaft und Sexualpolitik — Berlin.
 1930 Zeitschrift für Konstitutionslehre —
 1930 Hereditas — Lund.
 1930 Ukrainisches Zentralblatt für Blutgruppenforschung — Charkow.
 1928 bis 1935 Zeitschrift für Rassenpsychologie — München.

Einige besondere Punktbestimmungsaufgaben in vektorieller Behandlung.

Von Prof. Dr. K. W a l e k, Sopron.

Im XXXI. Band, Nr. 1 der „Ö. Z. für Vermessungswesen“ ist ein analytisches Verfahren angegeben, welches die Ermittlung des unbekanntes Punktes beim Rückwärtseinschneiden auf die Auflösung zweier linearer Gleichungen zurückführt. Dasselbe Verfahren ist auf eine Reihe ähnlicher Aufgaben, nämlich auf das erweiterte Rückwärtseinschneiden, auf den Gegenschmitt, auf die Hansen'sche, Marek'sche Aufgabe und auf das Dreipunkteproblem anwendbar und ermöglicht die Bestimmung der Koordinaten der gesuchten Punkte auf linearem Wege. Alle diese Aufgaben können, mit Ausnahme des Dreipunkteproblems, als besondere Fälle der Marek'schen Aufgabe angesehen und aus letzterer dadurch abgeleitet werden, daß man in derselben zwei oder mehrere Punkte zusammenfallen läßt.

Das erwähnte Verfahren gründet sich auf folgenden Satz: Auf einem Kreis, der durch zwei Punkte 1, 2 und durch den konstanten Peripheriewinkel μ gegeben ist, bestimmt sich der Gegenpunkt des Punktes 1, d. h. der zweite Endpunkt des Durchmessers, der durch den Punkt 1 hindurchgeht, aus der Gleichung:

$$\mathfrak{R}_1 = r_2 - \text{ctg } \mu |(r_1 - r_2),$$

wo r_1 , r_2 , \mathfrak{R}_1 die Radienvektoren der Punkte 1, 2 und des Gegenpunktes sind und $|(r_1 - r_2)$ die Ergänzung der Differenz $(r_1 - r_2)$ bedeutet. Analog erhält man den Gegenpunkt von 2:

$$\mathfrak{R}_2 = r_1 - \text{ctg } \mu |(r_1 - r_2).$$

Bei der Bildung von \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 ist auf die Reihenfolge der Radienvektoren in der Ergänzung $|(r_1 - r_2)$ zu achten, welche so gewählt werden muß, daß man, wenn man vom ersten Punkte — hier r_1 — ausgeht und in

positiver Drehrichtung am Kreise fortschreitet, den zweiten Punkt r_2 auf dem kürzesten Wege erreicht; außerdem ist hier der Peripheriewinkel μ spitz angenommen, bei stumpfem μ muß der Supplementwinkel $180^\circ - \mu$ in die Gleichung gesetzt werden.

Da die Marek'sche Aufgabe, mit Ausnahme des Dreipunkteproblems, die allgemeinste unter den aufgezählten ist, wollen wir unsere Ausführungen mit dieser Aufgabe beginnen.

1. Die Marek'sche Aufgabe.

In Abb. 1 sind die Koordinaten der vier Punkte 1, 2; 1', 2' gegeben, deren Radienvektoren mit r_1, r_2, r_1', r_2' bezeichnet werden sollen. Außerdem sind die Winkel $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ bekannt, die in den Punkten P und Q gemessen worden sind. Gesucht werden die Koordinaten der beiden letzten Punkte: x_P, y_P, x_Q, y_Q .

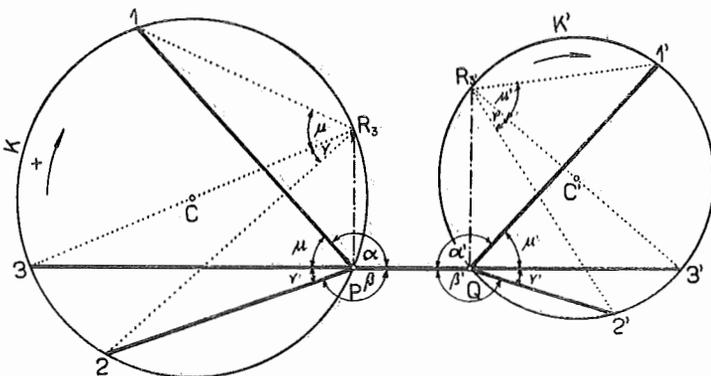


Abb. 1.

Die Verbindungslinie der Punkte P und Q schneide den Kreis, der den Punkten 1, 2, P umschrieben ist, in einem zweiten Punkt 3, dessen Gegenpunkt R_3 sei. Der Radiusvektor des letzteren Punktes kann laut obigen Satzes durch die Punkte 1, 3 und den Peripheriewinkel $\mu = 180^\circ - \alpha$ ausgedrückt werden;

$$R_3 = r_1 - \text{ctg } \mu | (r_3 - r_1) \dots \dots \dots (1)$$

R_3 kann aber auch mit Hilfe der Punkte 2, 3 und des Peripheriewinkels $\nu = 180^\circ - \beta$ bestimmt werden:

$$R_3 = r_2 - \text{ctg } \nu | (r_2 - r_3) \dots \dots \dots (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt:

$$r_1 - \text{ctg } \mu | (r_3 - r_1) = r_2 - \text{ctg } \nu | (r_2 - r_3),$$

woraus der Hilfspunkt 3 ermittelt werden kann. Es wird nämlich

$$- | r_3 (\text{ctg } \mu + \text{ctg } \nu) = r_2 - r_1 - \text{ctg } \mu | r_1 - \text{ctg } \nu | r_2.$$

Nimmt man die Ergänzung der beiden Seiten und beachtet, daß die Ergänzung der Ergänzung eines Vektors der negative Vektor selbst ist, so erhält man

$$r_3 = \frac{|(r_2 - r_1) + \text{ctg } \mu \cdot r_1 + \text{ctg } \nu \cdot r_2}{\text{ctg } \mu + \text{ctg } \nu} \dots \dots \dots (3)$$

Geht man endlich mittels der Gleichungen $r = x i + y j$ und $|r = -y i + x j$ zu den Koordinaten über, so ergeben sich aus (3) die Koordinaten des Hilfspunktes 3:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \frac{(y_1 - y_2) + \operatorname{ctg} \mu x_1 + \operatorname{ctg} \nu x_2}{\operatorname{ctg} \mu + \operatorname{ctg} \nu} \\ y_3 &= \frac{(x_2 - x_1) + \operatorname{ctg} \mu y_1 + \operatorname{ctg} \nu y_2}{\operatorname{ctg} \mu + \operatorname{ctg} \nu} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Die Koordinaten des Gegenpunktes R_3 werden aus (1) und (2) auf zweifacher Weise gewonnen, was zur Kontrolle benützt werden kann:

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= x_1 - \operatorname{ctg} \mu (y_1 - y_3) = x_2 - \operatorname{ctg} \nu (y_3 - y_2) \\ Y_3 &= y_1 - \operatorname{ctg} \mu (x_3 - x_1) = y_2 - \operatorname{ctg} \nu (x_2 - x_3) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Dasselbe Verfahren wenden wir auch auf den Kreis K' an, der auf der rechten Seite der Abb. 1 um die Punkte $1'$, $2'$ und Q geschlagen ist. Hier wird

$$\mathfrak{R}'_3 = r'_1 - \operatorname{ctg} \mu' (r'_1 - r'_3) = r'_2 - \operatorname{ctg} \nu' (r'_3 - r'_2) \dots \dots (6)$$

wo $\mu' = 180^\circ - \alpha'$, $\nu' = 180^\circ - \beta'$ ist und daraus wie oben

$$r'_3 = \frac{|(r'_1 - r'_2) + \operatorname{ctg} \mu' r'_1 + \operatorname{ctg} \nu' r'_2}{\operatorname{ctg} \mu' + \operatorname{ctg} \nu'} \dots \dots \dots (7)$$

Die Koordinaten des zweiten Hilfspunktes $3'$ sind daher

$$\left. \begin{aligned} x'_3 &= \frac{(y'_2 - y'_1) + \operatorname{ctg} \mu' x'_1 + \operatorname{ctg} \nu' x'_2}{\operatorname{ctg} \mu' + \operatorname{ctg} \nu'} \\ y'_3 &= \frac{(x'_1 - x'_2) + \operatorname{ctg} \mu' y'_1 + \operatorname{ctg} \nu' y'_2}{\operatorname{ctg} \mu' + \operatorname{ctg} \nu'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

und die Koordinaten des entsprechenden Gegenpunktes \mathfrak{R}'_3 aus (6)

$$\left. \begin{aligned} X'_3 &= x'_1 - \operatorname{ctg} \mu' (y'_3 - y'_1) = x'_2 - \operatorname{ctg} \nu' (y'_2 - y'_3) \\ Y'_3 &= y'_1 - \operatorname{ctg} \mu' (x'_1 - x'_3) = y'_2 - \operatorname{ctg} \nu' (x'_3 - x'_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Die Punkte 3, $3'$ und R_3 und R'_3 benützen wir nun zur Bestimmung der gesuchten Punkte P und Q . Wie aus Abb. 1 ersichtlich, steht die Gerade $R_3 P$ senkrecht auf $P Q$, d. h. auf $3 3'$, man erhält daher P als Schnittpunkt der zueinander senkrechten Geraden $R_3 P$ und $3 3'$. Bezeichnen wir der Kürze halber die Richtungstangente $\frac{y'_3 - y_3}{x'_3 - x_3}$ der Richtung $(r'_3 - r_3)$ mit „ a “, so lauten die Gleichungen der beiden Geraden $3 3'$ und $R_3 P$:

$$\begin{aligned} y - y_3 &= a(x - x_3) \\ y - Y_3 &= -\frac{1}{a}(x - X_3). \end{aligned}$$

Hieraus erhält man die Koordinaten von P , wenn x_P und y_P für x und y geschrieben wird:

$$\left. \begin{aligned} x_P &= \frac{a^2 x_3 + a(Y_3 - y_3) + X_3}{1 + a^2} \\ y_P &= \frac{a^2 Y_3 + a(X_3 - x_3) + y_3}{1 + a^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Die Werte von x_Q und y_Q werden durch dieselben Formeln (10) mit demselben Werte „ a “ ausgedrückt, nur sind die Koordinaten auf der rechten Seite und die in denselben auftretenden Winkel μ und ν gestrichelt.

2. Das erweiterte Rückwärtseinschneiden.

Diese Aufgabe entsteht aus der Marek'schen, wenn zwei der gegebenen Punkte, z. B. 1 und 1' zusammenfallen. In Abb. 2 weicht die Lage des Hilfs-

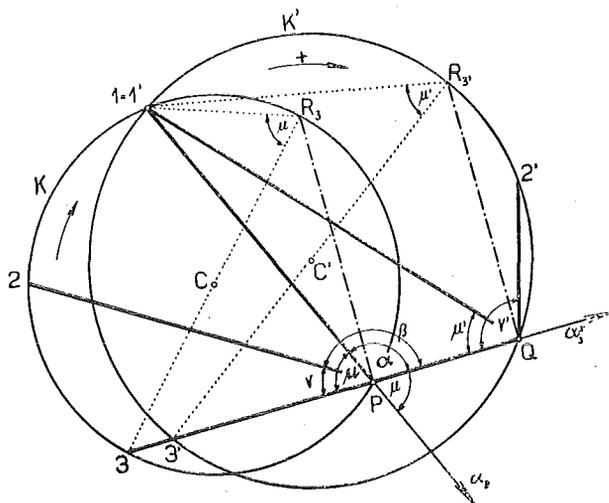


Abb. 2.

punktes 3' von jener in Abb. 1 insofern ab, daß jetzt 3' mit P auf derselben Seite von Q liegt; infolgedessen wird hier $\mu' = \alpha'$ und $\nu' = \beta'$. Dagegen bleibt $\mu = 180^\circ - \alpha$ und $\nu = 180^\circ - \beta$. Die gesuchten Koordinaten von P und Q werden auch jetzt durch die Formeln (10) geliefert.

Man kommt aber auf einfachere Formeln, wenn man den Koordinatenanfangspunkt 0 in den Punkt 1 verlegt, dann wird nämlich $x_1 = x_{1'} = 0$, und dies in (1) eingesetzt, ergibt

$$X_3 = - \operatorname{ctg} \mu \cdot x_3 \dots \dots \dots (11)$$

also

$$X_3 = \operatorname{ctg} \mu \cdot y_3 \quad Y_3 = - \operatorname{ctg} \mu \cdot x_3$$

und diese Werte führen infolge (10) auf

$$\left. \begin{aligned} x_P &= \frac{a^2 x_3 - a (\operatorname{ctg} \mu x_3 + y_3) + \operatorname{ctg} \mu y_3}{1 + a^2} = \frac{(y_3 - a x_3) (\operatorname{ctg} \mu - a)}{1 + a^2} \\ y_P &= \frac{-a^2 \operatorname{ctg} \mu x_3 + a (\operatorname{ctg} \mu y_3 - x_3) + y_3}{1 + a^2} = \frac{(y_3 - a x_3) (1 + a \operatorname{ctg} \mu)}{1 + a^2} \end{aligned} \right\} \cdot (12)$$

Aus diesen Gleichungen folgt eine einfache Beziehung zwischen x_P und y_P , welche auch durch die Abb. 2 bestätigt wird; da nämlich $a = \operatorname{tg} \alpha_3^{3'}$, wird

$$y_P = \operatorname{tg} (\alpha_3^{3'} + \mu) \cdot x_P = \operatorname{tg} \alpha_P \cdot x_P.$$

Man kann die rechte Seite der Gleichungen (12) auch auf eine für logarithmisches Rechnen geeignete Gestalt bringen, wenn man für „ a “ $\frac{\sin \alpha_3^{3'}}{\cos \alpha_3^{3'}}$

schreibt und den Richtungskoeffizienten $\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{y_3}{x_3}$ einführt. Es wird dann

$$\left. \begin{aligned} x_P &= \frac{x_3}{\cos \alpha_3} \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_3^{3'})}{\sin \mu} \cos(\alpha_3^{3'} + \mu) \\ y_P &= \frac{x_3}{\cos \alpha_3} \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_3^{3'})}{\sin \mu} \sin(\alpha_3^{3'} + \mu) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Weil in diesen Gleichungen $\frac{x_3}{\cos \alpha_3} = r_3$ und $\frac{x_P}{\cos(\alpha_3^{3'} + \mu)} = \frac{y_P}{\sin(\alpha_3^{3'} + \mu)} = r_P$ ist, drücken diese Formeln den Sinus-Satz im Dreieck $13P$ aus. Die in (13) auftretende Koordinate x_3 , deren Wert aus (4) zu nehmen ist, kann dadurch, daß man wie bei der Ableitung der Formeln (13) $x_1 = y_1 = 0$ annimmt, auch auf einfache logarithmische Gestalt gebracht werden.

Auf dieselbe Weise findet man auch die Koordinaten des Punktes Q ; bei der Bildung von \mathfrak{R}_3' ist, wie schon erwähnt, auf die Reihenfolge der Vektoren im Faktor von $\operatorname{ctg} \mu'$ und $\operatorname{ctg} \nu'$ und darauf zu achten, ob μ' und ν' spitze oder stumpfe Winkel sind.

3. Das einfache Rückwärtseinschneiden.

Das Rückwärtseinschneiden kann aus der Marek'schen Aufgabe dadurch abgeleitet werden, daß man zwei der gegebenen Punkte, z. B. 1 und $1'$, und außerdem die beiden gesuchten Punkte P und Q zusammenfallen läßt, d. h. daß man in der vorher behandelten Aufgabe P und Q koinzidieren läßt. Aus letzterer Bedingung folgt aber, daß der Winkel μ' gleich $180^\circ - \mu$ wird (siehe Abb. 3), und dies hat zur Folge, daß der Vektor $(\mathfrak{R}_3' - \mathfrak{R}_3)$ jetzt orthogonal zur Richtung $33'$ steht; denn nimmt man den Ursprung O wieder im Punkte 1 an, so wird nach (11) $\mathfrak{R}_3 = -\operatorname{ctg} \mu |r_3$ und nach (6)

$$\mathfrak{R}_3' = \operatorname{ctg} \mu' |r_3' = -\operatorname{ctg} \mu |r_3'.$$

Also wird:

$$\mathfrak{R}_3' - \mathfrak{R}_3 = -\operatorname{ctg} \mu |r_3' - r_3),$$

womit die Orthogonalität der beiden Vektoren erwiesen ist.

Der Punkt Q rückt längs der Geraden PQ , d. h. der Geraden $33'$ in den Punkt P hinein, weil aber die Richtung PQ jetzt nicht gegeben ist, kann diese willkürlich gewählt werden; in Abb. 3 ist die Richtung der gebrochen ausgezogenen Linie $33'$, d. h. der Wert der Winkel μ, ν, ν' beliebig angenommen. Die Lösung wird in diesem Falle durch die Gleichungen (12) geliefert.

Einfacher wird aber die Rechnung, wenn man die willkürliche Richtung mit der Geraden PI zusammenfallen läßt, weil dann die Schnittpunkte mit den beiden Kreisen, d. h. die Punkte 3 und $3'$ (in der Abb. mit (3) , $(3')$ bezeichnet) in den Punkt 1 fallen. Bei dieser Annahme wird $\mu = 0$, $\mu' = 0$. (In der Abb. sind die Winkel ν und ν' für diesen Fall mit (ν) und (ν') bezeichnet.) Verbindet man nun die zwei Gegenpunkte $\mathfrak{R}_{(3)}$, $\mathfrak{R}_{(3')}$ des Punktes 1 , d. h. der Punkte (3) , $(3')$ miteinander, so muß diese Gerade — wie wir vorher gezeigt haben — senkrecht auf die Gerade (3) $(3')$, d. h. auf die Richtung PI stehen. Der Punkt P kann also als Schnittpunkt zweier senkrechter Geraden erhalten

werden. Setzen wir zu diesem Ende in die Formeln (10) der Marek'schen Lösung $x_1 = x_3 = 0, y_1 = y_3 = 0, X_3 = X_1, Y_3 = Y_1$, so ergeben sich die Gleichungen

$$x_P = \frac{a Y_1 + X_1}{1 + a^2} \quad y_P = \frac{a^2 Y_1 + a X_1}{1 + a^2}$$

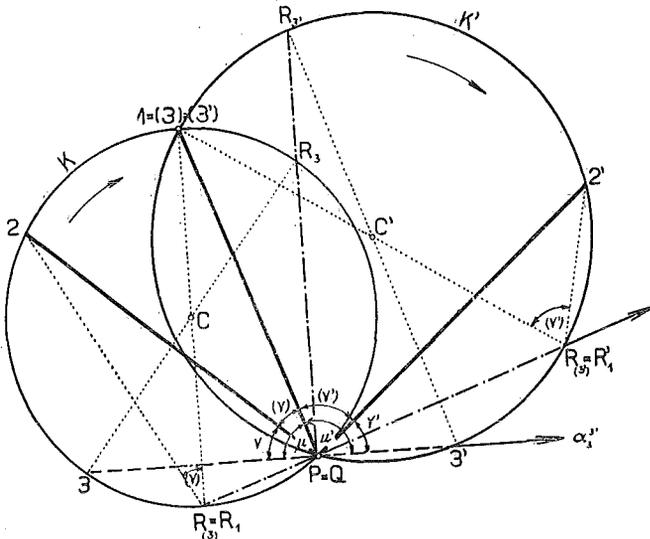


Abb. 3.

Hier bedeutet „a“ die Richtungstangente von (3) (3'); weil aber jetzt diese Richtung unbekannt ist, führen wir an ihrer Stelle die leicht bestimmbare Richtungstangente der auf sie senkrechten Verbindungslinie $\mathfrak{R}_{(3)} \mathfrak{R}_{(3')}$ ein und schreiben „ $-\frac{1}{a_1}$ “ für „a“. Dadurch gehen unsere beiden Formeln in die in Band XXXI, Nr. 1 dieser Zeitschrift schon angegebenen über:

$$\left. \begin{aligned} x_P &= \frac{X_1 - \frac{1}{a_1} Y_1}{1 + \frac{1}{a_1^2}} = \frac{a_1^2 X_1 - a_1 Y_1}{1 + a_1^2} \\ y_P &= \frac{\frac{1}{a_1^2} Y_1 - \frac{1}{a_1} X_1}{1 + \frac{1}{a_1^2}} = \frac{Y_1 - a_1 X_1}{1 + a_1^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

daher $y_P = -\frac{1}{a_1} x_P$, wo $a_1 = \frac{Y_1' - Y_1}{X_1' - X_1} = \frac{Y_{(3')} - Y_{(3)}}{X_{(3')} - X_{(3)}}$.

4. Der Gegenschnitt.

Diese Aufgabe unterscheidet sich von der vorigen darin, daß hier anstatt des Winkels (v') der Winkel φ mit der Spitze im Punkte 2' gegeben ist. In Abb. 4 und in den weiteren Ausführungen ist für (v') und (v) wieder einfach v' und v gesetzt. Die Koordinaten x_P, y_P bestimmen sich auch jetzt aus den

Formeln (14) des Rückwärtseinschneidens, nur muß zuerst der in X_1, Y_1 enthaltene unbekanntene Winkel ν' berechnet werden. Dies kann mit Hilfe der Orthogonalitätsbedingung geschehen: die dem Richtungskoeffizienten „ a_1 “ entsprechende Richtung $\mathfrak{R}_3' - \mathfrak{R}_3$ muß auf $P1$ senkrecht stehen. Denkt man den Koordinatenursprung 0 wieder in den Punkt 1 verlegt ($x_1 = x_3 = x_1' = x_3' = 0$) und bezeichnet mit r_P den Wert des Radiusvektors und mit α_P den Richtungswinkel des Punktes P , so wird infolge des Senkrechtstehens:

$$a_1 = -\frac{\cos \alpha_P}{\sin \alpha_P} \text{ oder } \sin \alpha_P \cdot a_1 + \cos \alpha_P = 0 \quad \dots \quad (15)$$

Hier ist $a_1 = \frac{Y_1' - Y_1}{X_1' - X_1} = \frac{(y_2' + \operatorname{ctg} \nu' x_2') - (y_2 - \operatorname{ctg} \nu x_2)}{(x_2' - \operatorname{ctg} \nu' y_2') - (x_2 + \operatorname{ctg} \nu y_2)}$ zufolge (5), (9).

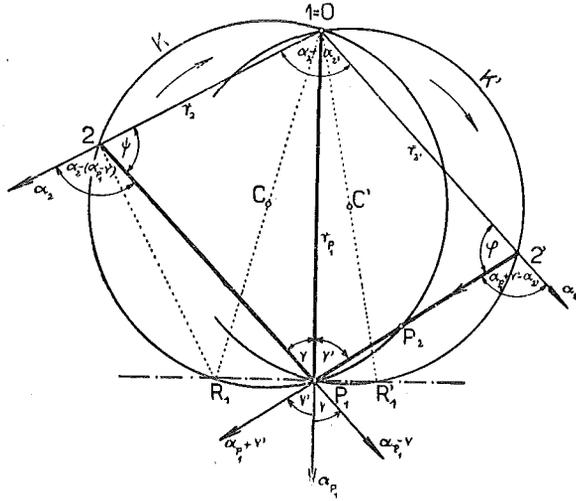


Abb. 4.

Um aus (15) für ν' eine lineare Gleichung zu gewinnen („ α_P “ enthält nämlich auch den Winkel ν'), drücken wir hier die Koordinaten durch ihren Radiusvektor und Richtungswinkel aus, außerdem multiplizieren wir Zähler und Nenner mit $\sin \nu' \cdot \sin \nu$, dann erhalten wir

$$a_1 = \frac{r_2' \sin \nu \cos (\nu' - \alpha_2') + r_2 \sin \nu' \cos (\nu + \alpha_2)}{r_2' \sin \nu \sin (\nu' - \alpha_2') - r_2 \sin \nu' \sin (\nu + \alpha_2)}$$

Dies in (15) eingesetzt, gibt

$$r_2' \sin \nu \sin (\alpha_P + \nu' - \alpha_2') + r_2 \sin \nu' \sin (\alpha_P - \nu - \alpha_2) = 0.$$

Nach Abb. 4 ist aber $\alpha_P + \nu' - \alpha_2' = 180^\circ - \varphi$ und $\alpha_P - \nu - \alpha_2 = -(180^\circ - \psi)$, daher wird

$$\frac{r_2'}{r_2} \sin \nu \sin \varphi = \sin \nu' \sin \psi.$$

Aus dieser Gleichung, die in Jordan-Eggerts Handbuch für Vermessungskunde auf anderem Wege abgeleitet wird *), kann ν' und ψ leicht bestimmt werden, denn es wird

*) S. B. 2. Erster Halbband, Seite 461.

$$\frac{r_2'}{r_2} \sin v \sin \varphi = \frac{1}{2} \cos(\psi - v') - \frac{1}{2} \cos(\psi + v'),$$

und weil hier $(\psi + v')$ bekannt, nämlich gleich $360^\circ - (\alpha_2 - \alpha_2' + \varphi + v)$ ist, kann daraus $(\psi - v')$ berechnet werden. Es ergeben sich zwei nur im Vorzeichen verschiedene Werte von $(\psi - v')$ und daher zwei Wertepaare von v' und ψ . Bezeichnet man das eine Paar mit $v_1' = v'$ und $\psi_1 = \psi$, so wird das zweite Paar daraus durch Vertauschung erhalten $v_2' = \psi$ und $\psi_2 = v'$. Welcher der beiden Punkte P_1, P_2 dem gesuchten entspricht, wird man aus der Punktlage entscheiden können.

5. Die Hansen'sche Aufgabe.

Diese Aufgabe wird auch durch die Formeln (14) der Marek'schen Aufgabe gelöst, wenn man in diesen zwei Paare der gegebenen Punkte, u. zw. 1 mit 1' und 2 mit 2' zusammenfallen läßt. Die Koordinaten des Punktes Q unterscheiden sich von jenen des Punktes P nur darin, daß in denselben μ' und v' anstatt μ und v steht.

*

Das bisher angewandte analytische Verfahren — das auf die Bestimmung der Gegenpunkte in Bezug auf zwei Kreise beruht — führt auch beim Dreipunktoproblem zur Lösung der Aufgabe. Wir werden diese Aufgabe in einer späteren Nummer dieser Zeitschrift auf zweierlei Art, nämlich auf vektoralgebraischem und vektoranalytischem Wege behandeln.

Über einige im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen behandelte Probleme der Erdschwere.

Referat über den Vortrag des Vermessungsrates Dr. Karl Mader von Vermessungskommissär Dr. Karl Ledersteger.

Am 4. April d. J. hielt der Vermessungsrat Dr. Karl Mader, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Wien, in der Arbeitsgemeinschaft einen Vortrag über die jüngsten geophysikalischen Arbeiten des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen. Zweck dieses Vortrages war, zu zeigen, wie die physikalische Geodäsie aus Pendel- und Drehwaagenmessungen in einem kleinen Gebiete der Erdoberfläche Erkenntnisse über die Figur der Niveauflächen und den Bau der Erdkruste gewinnt. Zur Einführung in diesen schwierigen Wissenszweig zeigte der Vortragende, wie infolge von Zusatzmassen Verformungen der Niveauflächen der Erde zustandekommen. Der Betrag der Geoidhebung infolge einer gegenüber der Erdmasse kleinen Zusatzmasse ist $V: g$, wenn V das Potential dieser Masse ist. Über den Kontinenten sind daher Hebungen, über den Meeren Senkungen des Geoids zu erwarten.

Diese Großformen des Geoids werden einmal aus Schweremessungen erschlossen werden, wenn genügend über die ganze Erde gleichmäßig verteiltes Beobachtungsmaterial vorliegen wird.

Nur in kleinem Gebiet können heute die Schweremessungsergebnisse zu geologischen Aussagen herangezogen werden.

Nach entsprechender Reduktion der beobachteten g -Werte erhält man als Grundlage für derartige Untersuchungen die scheinbaren Schwerestörungen, die neben der Wirkung der Massenverteilung noch einen systematischen Anteil, den sogenannten Term von Bruns enthalten, auf dessen fundamentale Bedeutung in den letzten Jahren F. Hopfner wiederholt hingewiesen hat. Dieser potentialtheoretische Anteil der Schwerestörung, der in der Höhen-