

Paper-ID: VGI\_193208



## Grundlagen der Vektorrechnung und ihre Anwendung auf geodätische Probleme

Karl Ulbrich

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **30** (2, 4), S. 24–27, 67–78

1932

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Ulbrich_VGI_193208,  
Title = {Grundlagen der Vektorrechnung und ihre Anwendung auf geod{"a}tische  
Probleme},  
Author = {Ulbrich, Karl},  
Journal = {"Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen"},  
Pages = {24--27, 67--78},  
Number = {2, 4},  
Year = {1932},  
Volume = {30}  
}
```



der Festschrift jenes hohe Niveau zu geben, welches dem Anlasse, dem sie gewidmet ist, entspricht.

Zum Schluß muß auch mit Anerkennung der Buchdruckerei Rohrer in Baden für ihr besonderes Entgegenkommen und die musterhafte Ausstattung der Festschrift gedacht werden. Lerner.

## **Grundlagen der Vektorrechnung und ihre Anwendung auf geodätische Probleme.**

Vortrag, gehalten im Österreichischen Verein für Vermessungswesen  
am 15. Jänner 1931 von

Vermessungskommissär Ing. Dr. techn. Karl Ulbrich.

### *1. Einleitende Bemerkungen.*

Bekanntlich gibt es zwei Arten der Darstellung von Vektoren. Die erste, zeitlich ältere Methode stützt sich auf die komplexen Zahlen, die sich in der komplexen Zahlenebene als Vektoren, die sogenannten Gauß'schen Vektoren darstellen lassen.

Die zweite Methode, der moderne Vektorbegriff, ist auf rein geometrischer Grundlage aufgebaut. Ein Vorzug der modernen Vektorrechnung ist, daß alle aufgestellten Formeln und Beziehungen invariant vom Koordinatensystem sind. Trotz aller Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems müssen immer idente Endresultate aufscheinen. Im nachfolgenden soll immer nur der moderne Vektorbegriff verwendet werden.

Die Vektorrechnung bildet einen Abschnitt der analytischen Geometrie. Sie stellt eine Art Stenographie in der analytischen Geometrie dar, ähnlich wie man auch Determinanten gerne zur übersichtlichen Darstellung verwendet. Die Vektorrechnung hat den Vorteil, daß alle Zusammenhänge, die sich aus Strecken und Richtungen oder Kräften und Richtungen ergeben, sich in besonders einfacher Weise darstellen lassen. Der Hauptvorteil liegt aber wohl darin, daß sich die Ergebnisse auch geometrisch leicht deuten lassen.

Ursprünglich war die Vektorrechnung nur für rein theoretische Spekulationen in der Geometrie gedacht und hatte keine besondere Rolle in der Mathematik gespielt. Erst durch die Anwendung auf Mechanik und Physik wurde der Ausbau der Vektorrechnung in die Wege geleitet. Die Mathematiker von Fach standen dabei etwas abseits. Durch den großartigen Aufschwung der Technik und Naturwissenschaften, mit denen natürlich auch die wissenschaftliche Vertiefung der theoretischen Grundlagen einherging, war auch ein weiterer Ausbau der Vektorrechnung zu verzeichnen. Es entstand eine übergeordnete Vektorrechnung, die sogenannte Tensor- oder Affinor-Analyse. Heute ist die gesamte Vektorrechnung durch die Arbeiten der Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker eine eigene mathematische Wissenschaft mit ausgedehnter Literatur geworden. Für Ingenieure ist es schon fast zur Selbstverständlichkeit geworden, mit Vektorsymbolen zu operieren.

Die Anwendung der Vektorrechnung auf geodätische Probleme hat eigentlich erst in den letzten Jahren eingesetzt, also zu einer Zeit, in welcher die Vektorrechnung in anderen Wissensgebieten schon lange festen Fuß gefaßt hatte. Der Grund für dieses verhältnismäßig späte Eindringen der Vektorrechnung in die Geodäsie liegt m. E. einerseits wohl noch in einem gewissen Konservatismus, andererseits ist die Geodäsie von Gauß her schon in derartig feste Formen gegossen, die sich sicherlich bewährt haben, so daß auch keine zwingende Notwendigkeit bestanden hat, Neuerungen einzuführen. In den folgenden Ausführungen soll versucht werden, eine Darstellung zu geben, wie bisher die Vektorrechnung mit Vorteil auf geodätische Probleme angewendet wurde. Zu diesem Zwecke wird vorerst eine kurze Einführung in die Vektorrechnung gegeben.

## II. Einführung in die Vektorrechnung.

Die Einführung soll, abweichend von dem in Mathematikbüchern üblichen Vorgang, sofort den Zusammenhang mit den in der Geodäsie üblichen Bezeichnungen herstellen. Ein Vektor wird definiert durch Strecke und Richtung. In dem Augenblicke, in dem von einem Vektor dessen Länge und seine Richtung gegenüber einer Nullrichtung bekannt ist, können alle Rechenoperationen zahlenmäßig durchgeführt werden. Ein großer Vorzug besteht jetzt darin, daß alle Rechenoperationen auch zuerst allgemein durchgeführt werden können und die Substitution der Zahlenwerte erst im allgemeinen Schlußresultate zu erfolgen braucht.

In der niederen und höheren Geodäsie hat man es immer wieder mit Dreiecks- und Polygonseiten zu tun, deren Länge durch direkte Längenmessung oder Berechnung bestimmt wird und deren Azimut oder Richtungswinkel gegen ein willkürliches Bezugssystem ermittelt wird.

Jede Dreiecks- oder Polygonseite der Geodäsie läßt sich also einfach als Vektor auffassen, wobei laut obiger Definition die *S t r e c k e* aus den Manualien für Streckenmessung oder aus sonstigen Berechnungsmaterialien und die *R i c h t u n g* aus den Berechnungsprotokollen der Richtungswinkel  $\rho$  (auch Nordwinkel  $\nu$  oder Südwinkel  $\sigma$  genannt) entnommen wird. Die Richtungen zählen in der Geodäsie im Uhrzeigersinne positiv, im Gegensatze zur Mathematik, wo der Gegenuhrzeigersinn als positiv gilt. Dies hat allerdings bloß eine formale Bedeutung.

Die Bezeichnung der Vektoren ist genormt und in den bekannten DIN-Blättern enthalten. Sie erfolgt meist durch gotische Buchstaben, z. B.  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ , . . . . Die absoluten Beträge der Vektoren, die ihre *L ä n g e* bedeuten, werden durch die entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnet. Sie können den Streckenmanualien entnommen werden. In der Abb. 1 bedeutet der Vektor  $\mathfrak{A}$ , daß er eine Länge von  $A = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.47$  m und einen Richtungswinkel von  $\rho = 26^\circ 33' 54''$  ( $\text{tg } \rho = \frac{1}{2}$ ) hat. Diese zwei Werte sind in der Geodäsie leicht bestimmbar, und da sie zugleich den Vektor  $\mathfrak{A}$  definieren, ist auch gezeigt, wie einfach die Dinge eigentlich liegen und wie übertrieben die Scheu vor der Vektorrechnung ist, die man sich zumeist zu kompliziert vorstellt,

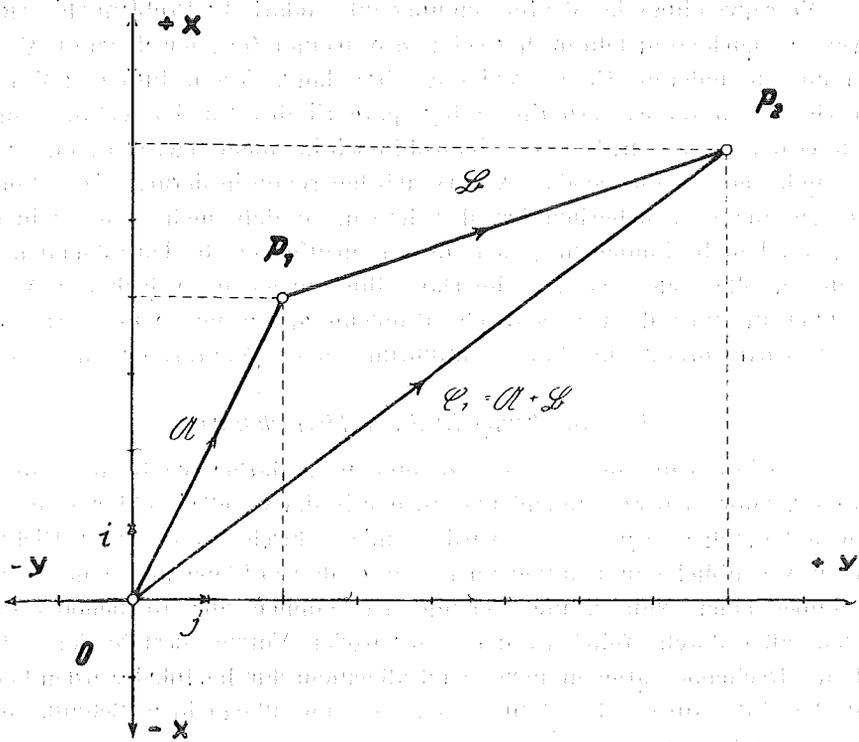


Abb. 1.

Um eine einfache Verknüpfung zwischen Vektoren und den Koordinaten herzustellen, bedient man sich der Einheitsvektoren. Diese sind in der Geodäsie 1 m lang, da zumeist 1 m als Längeneinheit verwendet wird. Der Einheitsvektor

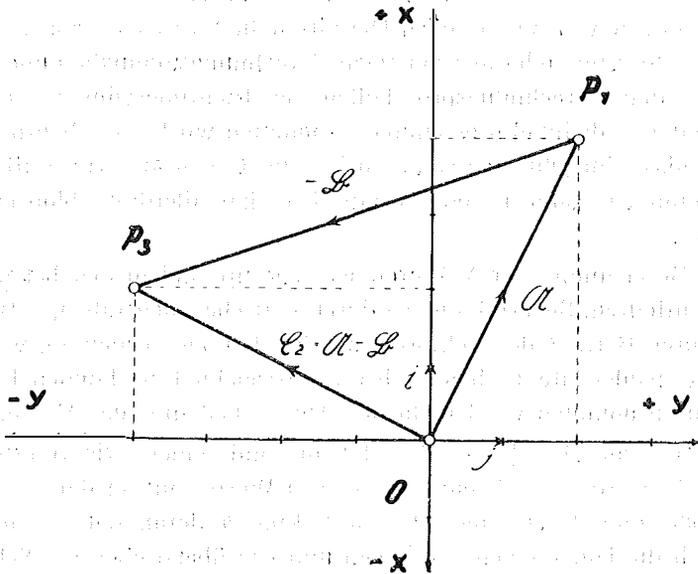


Abb. 2.

in der  $x$ -Richtung wird mit  $i$  bezeichnet, ist 1 m lang und hat den Richtungswinkel  $0^\circ$ , der Einheitsvektor in der  $y$ -Richtung wird mit  $j$  bezeichnet, ist ebenfalls 1 m lang und hat den Richtungswinkel  $90^\circ$ . Den Vektor  $\mathfrak{A}$  kann man auf Grund der vorstehenden Erklärungen wie folgt darstellen:

$$\mathfrak{A} = 4i + 2j \quad \text{allgemein } x_1i + y_1j \quad \dots \dots \dots 1)$$

$x_1$  und  $y_1$  bedeuten also einfach die cartesischen Koordinaten des Punktes  $P_1$ . Wenn zum Beispiel ein zweiter Vektor  $\mathfrak{B}$  wie folgt gegeben ist:

$$\mathfrak{B} = 2i + 6j \quad \dots \dots \dots 2)$$

dann ist die Summe gleich 1) + 2) und ergibt den Punkt  $P_2$ :  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 6i + 8j$ .  
(Fortsetzung folgt.)

## Ausstellung

### 60 Jahre metrisches Maßsystem in Österreich 1872—1932.

Die Vorarbeiten für die vom Niederösterreichischen Gewerbevereine anlässlich des 60jährigen Jubiläums der Einführung des metrischen Maßsystems in Österreich in der Zeit vom 15. September bis 30. Oktober d. J. im Österreichischen Museum für Kunst und Industrie stattfindenden Ausstellung sind bereits sehr weit vorgeschritten.

Das Protektorat über die Ausstellung hat Herr Bundespräsident Wilhelm Miklas, das Ehrenpräsidium Bundesminister für Handel und Verkehr Eduard Heintl und Bürgermeister der Bundeshauptstadt Wien Karl Seitz übernommen.

Die Ausstellung soll ein Bild über das gesamte Meßwesen auf allen seinen Anwendungsgebieten und zugleich über den gegenwärtigen Stand der Erzeugung und Verwendung von Meßgeräten und Meßverfahren geben und in einer historischen Abteilung die Entwicklung des metrischen Systems und des auf ihm aufgebauten Meßwesens darstellen.

Das Büro der Ausstellung befindet sich im Hause des Niederösterreichischen Gewerbevereines, Wien, I., Eschenbachgasse 11, wo Interessenten alle zweckdienlichen Auskünfte erteilt werden.

## Literaturbericht.

### 1. Bücherbesprechungen.

Bibliotheks-Nr. 779. Wilski Dr. phil. P., o. Professor der Markscheidkunde an der Technischen Hochschule zu Aachen: *Lehrbuch der Markscheidkunde. Zweiter Teil.* Mit 101 Abbildungen im Text, 7 mehrfarbigen und 16 schwarzen Tafeln ( $17 \times 25$  cm, VI und 270 Seiten). Verlag von Julius Springer, Berlin 1932. Preis geb. RM. 34.—

Vor uns liegt der II. Teil der *Markscheidkunde*, die Prof. Wilski auf Grund seiner ein Menschenalter umfassenden, akademischen Lehrerfahrung und genauer Kenntnis der Bedürfnisse der deutschen Markscheider verfaßt hat. Wenn in Wilski's *Markscheidkunde* neben rein markscheiderischen Problemen auch Fragen des Vermessungswesens zur gründlichen Behandlung gelangen, so liegt der Grund in der Tat-

# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

ORGAN

des

ÖSTERREICHISCHEN VEREINS FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Redaktion:

Hofrat Prof. Dr. Dr. Dr. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. Dr. H. Rohrer.

---

Nr. 4.            Baden bei Wien, im September 1932.            XXX. Jahrg.

---

## Grundlagen der Vektorrechnung und ihre Anwendung auf geodätische Probleme.

Vortrag, gehalten im Österreichischen Verein für Vermessungswesen  
am 15. Jänner 1931 von

Vermessungskommissär Ing. Dr. techn. Karl Ulbrich.

(Schluß.)

Die Summe läßt sich nach Art des Kräfteparallelprogramms geometrisch deuten. (Siehe Abb. 1.) Die Subtraktion bietet nichts Neues und stellt bloß eine negative Addition dar.  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = 1) - 2) = 2i - 4j$ . Diese Differenz läßt sich ebenfalls nach Art des Kräfteparallelprogrammes deuten und ergibt den Punkt  $P_3$ . (Siehe Abb. 2.) Addition und Subtraktion von Vektoren sowie die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl ist analog wie bei den komplexen Zahlen (die ja auch durch Gauß'sche Vektoren dargestellt werden), können also als bekannt vorausgesetzt werden.

Die Unterscheidung gegen den modernen Vektorbegriff tritt bei der Multiplikation zweier Vektoren auf. Die Multiplikation zweier Vektoren ist derart verschieden vom gewöhnlichen Multiplikationsbegriff, daß man eher von einer multiplikativen Verknüpfung sprechen sollte. Eine Besonderheit ist, daß sogar zwei verschiedene multiplikative Verknüpfungen bestehen, die wie folgt definiert sind:

a) Inneres (skalares) Produkt:  $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = A B \cos \alpha$

Das Operationszeichen ist eine runde Klammer oder einfaches Nebeneinandersetzen der beiden Faktoren. R. Schumann verwendet zur besseren Unterscheidung runde Hohlklammern.

Das innere Produkt ist also das Produkt der beiden Längen multipliziert mit dem cosinus des eingeschlossenen Winkels. In dem besonderen Fall, daß die beiden Vektoren gleich lang sind und  $\alpha = 0^\circ$  ist, bekommt die Formel folgende Gestalt:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = A^2$$

Dann artet das innere Produkt in ein einfaches Quadrat aus, eine angenehme Eigenschaft, die beim vektorischen Ausgleich verwendet wird, wo die Summe der Quadrate der Verbesserungsvektoren  $d\mathfrak{A}_i$ , also  $\Sigma (d\mathfrak{A}_i \ d\mathfrak{A}_i)$  ein Minimum werden soll. Als Nebenbemerkung sei noch hervorgehoben, daß das innere Produkt im Sinne der Mechanik eine Arbeit darstellt.

b) Äußeres (vektorisches) Produkt.  $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = A B \sin \alpha$

Das Operationszeichen ist nach den DIN-Vorschlägen leider eine eckige Klammer, die ja bekanntlich in der Geodäsie schon seit Gauß als Summationszeichen dient. Das innere Produkt ist also das Produkt der beiden Längen multipliziert mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels. Der eingeschlossene Winkel ist unbedingt im Uhrzeigersinne zu nehmen, da im gegenteiligen Falle Vorzeichenwechsel eintritt. Geometrisch stellt es die Fläche des aus den beiden Vektoren gebildeten Parallelogrammes dar. Wenn man wieder die besondere Annahme trifft, daß die Vektoren gleich lang seien und  $\alpha = 0^\circ$  betrage, wird das äußere Produkt zu Null. Diese Eigenschaft ist beim Vektorausgleich ebenfalls sehr angenehm, da die Summe der Vektorquadrate der Verbesserungsvektoren  $d\mathfrak{A}_i$  automatisch Null wird.

$$\Sigma [d\mathfrak{A}_i \ d\mathfrak{A}_i] = 0$$

Hier sei ebenfalls hervorgehoben, daß die mechanische Deutung der äußeren Produkte statische Momente ergeben.

Damit möge die knappe Einführung beendet sein, da sich damit, mit Ausnahme der beiden schwierigeren Abhandlungen (12) und (13), alle anderen geodätischen Anwendungen der Vektorrechnung leicht verfolgen lassen. Zum tieferen Eindringen in die Materie seien folgende Werke empfohlen:

J. S p i e l r e i n: Lehrbuch der Vektorrechnung, 2. Aufl. Stuttgart 1926.

M. L a g a l l y: Vektor-Rechnung, Leipzig 1928.

Außerdem noch zahlreiche andere Werke.

### *III. Bisherige Anwendung der Vektorrechnung in der Geodäsie.*

In diesem Abschnitte werden kurze Referate über bisherige Abhandlungen erstattet, die sich mit der Anwendung der Vektorrechnung auf geodätische Probleme befaßt haben.

Die eingeklammerten Zahlen, die sich hinter den Autorennamen befinden, beziehen sich auf die Literaturübersicht am Schlusse der Abhandlung.

Vor allem möge angeführt werden, daß alle trigonometrischen Formeln mittels der Vektorrechnung ganz einfach abgeleitet werden können, z. B. der Sinussatz mit Hilfe des äußeren (vektorisches) Produktes und der Cosinussatz mittels des inneren (skalaren) Produktes. Die Beweise für diese Sätze erfordern immer bloß einige Zeilen und haben stets den Vorteil, daß die geometrische Deutung parallel damit einhergeht. Auch die in der Geodäsie in so ausgedehntem Maße verwendete Flächenformel  $F = \frac{1}{2} \Sigma (x_{n-1} - x_{n+1}) \cdot y_n$ : läßt sich auf vektorischem Wege ableiten. Auch differentiale Fehleruntersuchungen lassen sich anstellen, deren Ergebnisse natürlich gleich den der analytischen Untersuchungen sind. Aber auch die Sätze der sphärischen Trigonometrie lassen sich bequem ableiten, so daß man erkennt, daß die Anwendung der

Vektorrechnung nicht bloß auf die Ebene beschränkt ist. Die vektorischen Anwendungen auf die Sphäre dürften meines Erachtens in Zukunft noch erheblich ausgebaut werden.

Die erste dem Verfasser bekannte Anwendung der Vektorrechnung in der Geodäsie erfolgte schon 1908 durch A. S c h r e i b e r (1). Er zeigte in sehr eleganter Weise, welche interessante Beziehungen mittels der Vektorrechnung bei dem schon so oft behandelten Problem des Rückwärtseinschneidens festgestellt werden können.

Dieser sehr bemerkenswerte Versuch, die Vektorrechnung in die Geodäsie einzuführen, hatte aber leider lange Zeit keine Nachahmer gefunden. Erst zirka 20 Jahre später ist von manchen Autoren, besonders aber durch die Arbeiten von R. S c h u m a n n (3) bis (9) eine neuerliche Einführung dieses Zweiges der Mathematik in geodätische Probleme durchgeführt worden.

Angeregt durch eine Arbeit von Hofrat E. D o l e ž a l in der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen 1928 „Rückwärtseinschneiden mit der Rechenmaschine“, wurden vom Verfasser 1930 in einer Abhandlung (17) einige neue geometrische Beziehungen beim Rückwärtseinschneiden mittels der Vektorrechnung aufgefunden und gedeutet. Außerdem wurden die schon von Doležal auf analytischem Wege bewiesenen Schlußformeln, die sich auf Sätze aus der Mechanik, auf Gleichgewichtszustände in Kräftesystemen stützten, bestätigt, wobei sich sehr eklatant die Überlegenheit der Vektordarstellung zeigte.

A. B a s c h hat kürzlich in der Abhandlung (13a) die Vektorgleichungen für das Rückwärtseinschneiden in der Ebene dargestellt. Interessant ist, daß die vektoralgebraische Lösung sowohl für den allgemeinen Fall, als auch für den Sonderfall, daß die drei Altpunkte in einer Geraden lagen, vorgeführt werden. Für diese Untersuchungen wurde bloß die Vektorrechnung erster Stufe, also die Vektoralgebra, verwendet und es ist sicherlich beachtenswert, daß mit verhältnismäßig so einfachem mathematischen Rüstzeuge so hübsche Ergebnisse erzielt wurden.

Durch F. F a l t u s (2) wurde in der vorliegenden Zeitschrift 1927 das Operieren mit Vektoren auf graphischem Wege zur Fehlerrechnung verwendet.

L. S c h r u t k a (11) führte in dieser Zeitschrift 1927 eine sehr elegante und kurze Ableitung der Theorie des Polarplanimeters vor, wobei in wenigen Zeilen auch die Fälle „Pol innen“ und „Pol außen“ erledigt wurden. Diese Abhandlung ist m. E. ein Schulbeispiel dafür, wie sehr bei allgemeinen Ableitungen die Vektorrechnung im Vorteil ist.

Durch den Verfasser wurde in der vorliegenden Zeitschrift in einer Abhandlung (16), die 1928 als Doktor-Dissertation von der Technischen Hochschule in Wien genehmigt wurde, die mathematische Theorie aller Planimeter in vektoranalytischer Darstellung gebracht. Es wird darin gezeigt, daß die Wirkungsweise aller Planimeter, gleichgültig ob Linear- oder Polarplanimeter, auf einer Grundformel basiert. Zugleich wird nachgewiesen, daß die bisherige Unterscheidung „Pol innen“ und „Pol außen“ unberechtigt ist. Es müßte statt dessen immer heißen: „Mit voller Umdrehung des Fahrarmes“ und „Ohne voller Umdrehung des Fahrarmes“.

Außerdem wurde die Gleichung der Kurvimetertheorie einfach als Spezialfall der Planimetertheorie dargestellt.

Eine ganz eigenartige und neuartige Sache sind die Studien von A. B a s c h (12) (13). In der ersten Abhandlung (12) wird gezeigt, daß die Fehlerhaftigkeit eines ungenau bestimmten Vektors durch einen Tensor den Fehlertensor gekennzeichnet und geometrisch durch das „mittlere Fehlerhyperellipsoid“ beschrieben werden kann. Im Anschlusse hieran werden Fehlerübertragungsgesetze entwickelt, z. B. für das innere (skalare) Produkt und äußere (vektori-sche) Produkt, also den Flächenfehler. Als hübsche geodätische Anwendung wird der mittlere Flächenfehler eines Polygonzuges bestimmt, dessen Polygonpunkte auf Grund der unvermeidlichen Beobachtungsfehler ungenau bestimmt sind.

In der zweiten Abhandlung (13) baut A. B a s c h seine Untersuchungen wesentlich aus. Für alle Ableitungen wird die übergeordnete Vektorrechnung, die sogenannte Tensor- und Affinorrechnung verwendet. An geodätischen Anwendungen wird erstens die Fehlerfortpflanzung beim „Vorwärtseinschneiden“ durchgerechnet. Unter der Voraussetzung von verschiedenen Annahmen werden die entsprechenden entstehenden Fehlerkurven des Neupunktes diskutiert. Zweitens wurde die Korrelation der Fehler zweier durch Vorwärtseinschneiden aus den Endpunkten einer und derselben Basis bestimmter Neupunkte entwickelt.

Diese angeführten Untersuchungen von A. B a s c h stellen etwas grundsätzlich Neues vor und es ist zu erwarten, daß diese Dinge noch sehr ausgebaut werden. Allerdings ist zu ihrem Verständnis eine sehr umfassende Kenntnis der Affinor- und Tensorrechnung nötig.

Da diese zwei Arbeiten geodätischen Kreisen nur schwer zugänglich sind, wurden sie absichtlich etwas ausführlicher erwähnt, um die Aufmerksamkeit darauf zu lenken.

Kürzlich ist eine eingehende Kritik dieser beiden Abhandlungen von K. M a d e r in der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen 1931 erschienen, wobei ebenfalls die Bedeutsamkeit dieser Unternehmungen hervorgehoben wird. Zugleich wird angeführt, daß weiteste Verbreitung und Anwendung in der Geodäsie besonders bei Punkteinschaltung, Basisentwicklung und Netzausgleich sehr wünschenswert wäre.

Hervorgehoben zu werden verdient, daß auch A. B a s c h anführt, daß die für die üblichen Zahlenrechnungen der Praxis notwendigen Skalargleichungen aus den Tensorgleichungen leicht durch Komponentenerlegung gewonnen werden können.

Weiter wäre die Arbeit von F. B a e s c h l i n (10) zu erwähnen. Sie enthält eine sehr gute Einführung in die Vektorrechnung, gibt dann eine mundgerechte Übersicht der weiter unten besprochenen vektorischen Ausgleichsmethoden von R. S c h u m a n n und enthält noch verschiedene Winke, wie eine Verbesserung dieser eben erwähnten Ausgleichsmethode möglich wäre. Die Arbeit B a e s c h l i n s ist deshalb besonders erwähnenswert, weil sie meines Wissens

zum ersten Male den Versuch enthält, die Vektorrechnung in p r o g r a m m a t i s c h e r Weise größeren geodätischen Kreisen zugänglich zu machen.

Schließlich seien die Abhandlungen von R. S c h u m a n n hervorgehoben. R. Schumann hat eigentlich am intensivsten für die Propagierung der Vektorrechnung gearbeitet, was bisher sieben Abhandlungen auf diesem Gebiete beweisen. Durch ihn wurde der vektor-analytische Ausgleich in die Geodäsie eingeführt. Ebenso wie bei der klassischen Ausgleichsmethode das Postulat an der Spitze steht, daß die Summe der skalaren Fehlerquadrate ein Minimum werden muß, besteht beim vektoranalytischen Ausgleich eine äquivalente Forderung. Hier muß die innere (skalare) Quadratsumme der Verbesserungsvektoren ein Minimum werden. Aber was ist ein Fehlervektor? Nichts anderes als der in der Geodäsie wohlbekanntes Schlußfehler. (Z. B. beim Polygonzug.) Dieser Schlußfehler ist ja als Koordinatenwiderspruch bekannt, so daß sich seine Länge und seine Richtung leicht mit dem Rechenschieber berechnen lassen. Eine Strecke, deren Länge und Richtung aber bekannt ist, stellt nach der im zweiten Abschnitte dargelegten Definition einen Vektor, hier also den Fehlervektor dar.

Jetzt handelt es sich um die Aufteilung des Fehlervektors auf die gemessenen Stücke. Diese Aufteilung wird nach der Methode S c h u m a n n nach obigem Postulate vorgenommen. Wenn man die gemessenen Seitenvektoren mit  $\mathfrak{A}_i'$ , die endgültigen Seitenvektoren mit  $\mathfrak{A}_i$  und die Verbesserungsvektoren  $d\mathfrak{A}_i'$  bezeichnet, so besteht, nachdem der ausgeglichene Wert stets den gemessenen Wert + Verbesserung darstellt, folgende einfache Beziehung:

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_i' + d\mathfrak{A}_i'$$

Im Falle eines geschlossenen Dreieckes ist also die Summe der endgültigen Seitenvektoren gleich Null.

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 = 0.$$

Die Summe der gemessenen Seitenvektoren gibt den Widerspruchsvektor  $\mathfrak{B}$ .

$$\mathfrak{A}_1' + \mathfrak{A}_2' + \mathfrak{A}_3' + \mathfrak{B} = 0.$$

Führt man die Verbesserungen ein, so entsteht folgende Formel, die zeigt, daß der Widerspruchsvektor irgendwie aufgeteilt werden muß:

$$d\mathfrak{A}_1' + d\mathfrak{A}_2' + d\mathfrak{A}_3' - \mathfrak{B} = 0 \quad \dots \dots \dots I)$$

Dies stellt die Bedingungsgleichung dar. In welchem Verhältnisse diese Verteilung erfolgen muß, kann dann aus der postulierten Minimumsbedingung ermittelt werden. Diese Forderung besagt, daß die skalare Quadratsumme der Verbesserungsvektoren ein Minimum werden muß. Die vektorische (äußere) Quadratsumme wird ja angenehmerweise automatisch zu Null, da die einschließenden Winkel  $0^\circ$  betragen. (Siehe II. Abschnitt.) Es muß also folgende Minimumsbedingung erfüllt werden:

$$(d\mathfrak{A}_1' \cdot d\mathfrak{A}_1') + (d\mathfrak{A}_2' \cdot d\mathfrak{A}_2') + (d\mathfrak{A}_3' \cdot d\mathfrak{A}_3') = [(d\mathfrak{A}' \cdot d\mathfrak{A}')] = \text{Min.} \quad \dots \dots \dots II)$$

Es besteht also ein relatives Minimum mit der Minimumsbedingung II) und der Bedingungsgleichung I), das genau so, wie es die Geodäten bei bedingten

Beobachtungen gewöhnt sind, aufgelöst wird. Es wird entsprechend den Korrelaten ein Korrelatvektor  $\mathfrak{Q}$  eingeführt sowie aus Zweckmäßigkeitsgründen der Faktor  $-2$ , weil er sich wegekürzt, so daß das relative Minimum wie folgt lautet:

$$[(d\mathfrak{A}' d\mathfrak{A}')] - 2(d\mathfrak{A}'_1 + d\mathfrak{A}'_2 + d\mathfrak{A}'_3 - \mathfrak{B}, \mathfrak{Q}) = \text{Min.} \quad \dots \quad \text{III)}$$

Die Auswertung erfolgt, wie schon von bedingten Beobachtungen her bekannt ist, durch Differentiation:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \text{Min}}{\partial d\mathfrak{A}'} = 0 \quad (\text{Gibt 3 Gleichungen}) \\ \frac{\partial \text{Min}}{\partial \mathfrak{Q}} = 0 \quad (\text{Gibt 1 Gleichung}) \end{array} \right\} 4 \text{ Gleichungen}$$

Man erhält für die 4 Unbekannten Vektoren  $d\mathfrak{A}'_1, d\mathfrak{A}'_2, d\mathfrak{A}'_3$  und  $\mathfrak{Q}$  die obigen 4 Gleichungen. Die Lösung ist also eindeutig. Im Falle gleicher Gewichte lautet die Lösung wie folgt:

$$d\mathfrak{A}'_1 = d\mathfrak{A}'_2 = d\mathfrak{A}'_3 = \mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{B}}{3}$$

Der Widerspruchsvektor  $\mathfrak{B}$  wird also gleichmäßig zu je einem Drittel aufgeteilt, was sich auch leicht graphisch durchführen läßt. Aus dem einfachen Ergebnis sieht man, wie wohlberechtigt die in allen Lehrbüchern vertretene Forderung nach möglichst gleich langen Polygonseiten ist, da dann der Fall gleicher Gewichte auftritt und die in der Praxis übliche proportionale Fehlerverteilung auch theoretisch einwandfrei ist.

R. Schumann hat dann den vektor-analytischen Ausgleich weiter ausgearbeitet, so daß auch die Fälle für beliebige Gewichte für Strecken und Richtungen erledigt ist. Siehe die Abhandlungen (4) und besonders (5).

Auch die Anwendung auf größere Aufgaben wurde von R. Schumann in Angriff genommen. In den Abhandlungen (8) und (9) wurde der Ausgleich von Dreiecksketten in sehr eingehender Weise demonstriert. Darauf basierend ist die Abhandlung von J. Sébor-K. Ulbrich (15) Ungarn 1931 zu erwähnen, die die Anwendung des vektor-analytischen Ausgleiches von Dreiecksketten, wie er sich in der Praxis darstellt, zeigt. Hervorzuheben wäre bei dieser Abhandlung, wie es sich in eklatanter Weise zeigt, das Fehlen jeder Seitengleichung und die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen sind nur  $+1$ ,  $-1$  oder  $0$ .

#### IV. Vektor-analytischer Ausgleich eines Polygonzuges.

In diesem Abschnitte wird auszugsweise der strenge vektor-analytische Ausgleich eines Polygonzuges so dargelegt, wie es sich in der Praxis ergibt. Der Abschnitt stellt einen kurzen Auszug der gemeinsam mit Prof. J. Sébor verfaßten Abhandlung (14) dar. Da diese Abhandlung in Ungarn in deutscher und ungarischer Sprache erschienen ist, dürfte sie nur wenig bekannt sein und die Ergebnisse werden deshalb hier kurz mitgeteilt, auch deshalb, da sie meines Wissens die einzige numerische vektor-analytische Ausgleichung aus der geodätischen Praxis darstellt.

Es handelt sich um den in der früheren Auflage von J o r d a n's Handbuch für Vermessungswesen behandelten Polygonzug. J o r d a n hat diesen Polygonzug in diesem Handbuche auf zwei Arten ausgeglichen. Erstens Ausgleichung mit den in der Praxis üblichen proportionalen Aufteilen und zweitens durch strengen analytischen Ausgleich.

Der Polygonzug ist stark gekrümmt und hat 8 Seiten  $\mathfrak{A}_i$  von zusammen  $[A_i] = 1454 \cdot 13$  m Länge. Der Winkelabschlußfehler  $f_\beta = 2' 34''$  ist also nicht sehr bedeutend. Die Koordinatenwidersprüche waren  $f_x = -40$  cm,  $f_y = -26$  cm, also Werte, die in der Praxis leicht vorkommen können.

Der lineare Abschlußfehler oder die Länge des Widerspruchsvektors  $\mathfrak{W}$  beträgt  $W = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = 48$  cm. Die Richtung des Widerspruchsvektors  $\mathfrak{W}$  beträgt  $\text{tg } \rho_w = \frac{-26}{-40}$ ,  $\rho_w = 213^\circ 08'$ . Der Widerspruchsvektor  $\mathfrak{W}$  ist also nach Länge und Richtung bekannt, so daß nun die Berechnung seiner Verteilung erfolgen kann.

Bis hierher unterscheidet sich die Berechnung in keiner Weise vom üblichen Vorgange. Für die weitere numerische Ausgleichung muß der Verbesserungsvektor in 2 Komponenten zerlegt werden. In die Streckung der Polygonseiten also die Seitenverbesserung  $d\mathfrak{A}_i'$  und in die Querverschwenkung der Polygonseiten  $a'_i = A'_i \cdot v_i$ , wobei  $v_i$  die Richtungsverbesserung der Polygonseiten darstellt.

Der Index  $i$  bezieht sich auf die 8 Polygonseiten, geht also von 1—8. Jetzt sind je nach der Annahme der Gewichte zwei Fälle möglich:

### 1. Strenger Ausgleich.

Bezeichnet man nach S c h u m a n n das Gewicht der Streckung mit  $g^2_i$  und das Gewicht der Querverschwenkung mit  $p^2_i$ , so bekommt man aus den Angaben J o r d a n's, der den mittleren Fehler der Streckenmessung mit  $m_A = c \sqrt{A} = 0.015 \sqrt{A}$  angibt, für  $\frac{1}{g^2_i} = c^2 A_i$ . Das Gewicht  $g^2_i$  ist also verkehrt proportional zu  $A_i$ . Den mittleren Fehler  $m_w$  der Winkelmessung gibt J o r d a n mit  $\pm 30''$  an, so daß der mittlere Fehler  $m_r$  einer Richtung  $\pm 21''$  beträgt. Die Querverschwenkung wächst linear mit der Seitenlänge  $A_i$ . Ihr Gewicht  $p^2_i$  ist also verkehrt proportional zu  $A_i^2$ . Die Zusammenhänge zwischen den Gewichten  $g^2_i$  und  $p^2_i$  wurden von R. S c h u m a n n in der Abhandlung (6) dargelegt. Wichtig ist die Formel, daß  $\frac{g^2_i}{p^2_i} = \frac{A_i^2 m_w^2}{m_A^2}$  ist.

### 2. Ausgleichsmethode der Praxis.

Beim Ausgleich von Polygonzügen, wie er in der Praxis üblich ist, wird das Gewicht  $g^2_i$  der Seitenverbesserung so wie beim strengen Ausgleich belassen. Nur das Gewicht der Querverschwenkung wird ebenso groß gemacht, so daß  $p^2_i = g^2_i$  ist. Diese Gewichtsannahme entspricht dem proportionalen Verteilen des Abschlußfehlers.

Beim praktischen Ausgleich wird also das sehr bedeutsame Gewicht  $g_i^2$  der Seitenverbesserung der Theorie entsprechend belassen, während das Gewicht  $p_i^2$  der Querverschwenkung den einfachen Schlußformeln zuliebe geändert, und zwar vergrößert wird. Da aber die Querverschwenkung wohl zum Großteil durch die Winkelfehler entsteht und in Polygonzügen bekanntlich den Einfluß der Seitenfehler den der Winkelfehler weitaus überwiegt, so erklärt sich auch daraus, daß die Ausgleichsergebnisse der Praxis trotz der angegebenen Vereinfachungen sich sehr bewähren; allerdings trifft dies bloß bei gestreckten Zügen zu!

Im folgenden werden bloß die Schlußformeln angegeben, um eine Übersicht vom Aussehen und Bau derselben zu geben. In beiden Fällen muß zuerst noch der Korrelatvektor  $\mathfrak{L}$  nach Länge  $L$  und Richtung  $\varrho_L$  berechnet werden. Die Endergebnisse beim vektor-analytischen Ausgleichen eines Polygonzuges lauten:

### 1. Strenger Ausgleich:

$$\text{Die Seitenverbesserungen: } dA'_i = \frac{1}{g_i^2} \cdot L \cos(\varrho'_i \mathfrak{L})$$

$$\text{Die Querverschwenkung: } a'_i = \frac{1}{p_i^2} \cdot L \sin(\varrho'_i \mathfrak{L})$$

Korrelatvektor  $\mathfrak{L}$  und Widerspruchsvektor  $\mathfrak{B}$  sind nicht parallel.

### 2. Praxisausgleich:

$$\text{Die Seitenverbesserungen: } dA'_i = \frac{A'_i}{[A'_i]} \cdot W \cos(\varrho'_i \mathfrak{B})$$

$$\text{Die Querverschwenkungen: } a'_i = \frac{A'_i}{[A'_i]} \cdot W \sin(\varrho'_i \mathfrak{B})$$

Korrelatvektor  $\mathfrak{L}$  und Widerspruchsvektor  $\mathfrak{B}$  sind parallel.

Hervorgehoben sei, daß alle diese Werte bequem mit dem Rechenschieber bestimmt werden können, da es sich immer nur um Größen von wenigen Zentimetern handelt.

Aber auch sehr gute Kontrollmöglichkeiten bestehen. Hervorzuheben wäre besonders die Kontrolle, die formell der sogenannten durchgreifenden Kontrolle  $[uv] = -[kw]$  bei bedingten Beobachtungen der klassischen Ausgleichsmethode entspricht. Diese durchgreifende Kontrolle hat folgende Gestalt:

1. Beim strengen Ausgleich:

$$[g_i^2 (dA'_i)^2 + p_i^2 (a'_i)^2] = (\mathfrak{B}, \mathfrak{L})$$

2. Beim Praxisausgleich:

$$\left[ \frac{(dA'_i)^2 + (a'_i)^2}{A'_i} \right] = W \cdot L$$

Um eine Diskussion über den vektor-analytischen Ausgleich zu ermöglichen seien vorerst die numerischen Ergebnisse angeführt:

Gemessene Länge der Polygonseiten $A_i$ m	$f_x$		$f_y$	
	Streng analytisch „ vektorisch	Praxismethode „ vektorisch	Streng analytisch „ vektorisch	Praxismethode „ vektorisch
159·60	- 7	- 4	- 3	- 3
135·72	+ 1	- 4	- 4	- 2
66·45	0	- 1	- 1	- 1
117·33	+ 1	- 3	- 1	- 2
253·83	- 9	- 8	-10	- 5
131·13	0	- 4	- 1	- 2
365·22	-16	-10	- 4	- 7
224·85	-10	- 6	- 2	- 4
$[A_i] = 1454·13$	-40	-40	-26	-26

Vor allem ersieht man, daß es bei diesem stark gekrümmten Polygonzuge sehr gewagt ist, die gewöhnliche Praxismethode mit proportionaler Verteilung anzuwenden. Beim 2. Polygonpunkte von unten ergibt sich in  $x$  eine Differenz von 10 cm und in  $y$  eine solche von 5 cm. Dies sind Beträge, die bei Polygonpunkten sicherlich eine Rolle spielen. Da diese fehlerhaften Differenzen bloß durch die Anwendung einer in diesem Falle ungenauen Ausgleichsmethode entstanden sind, wäre auch das sonst übliche geodätische Prinzip, die Messungen nicht durch die Berechnungen zu verschlechtern, durchbrochen. Der vorliegende Polygonzug dürfte also bloß nach den strengen Methoden ausgeglichen werden.

Abgesehen von dieser Konstatierung, kann bezüglich des vektor-analytischen Ausgleiches und der klassischen Methode angeführt werden, daß in beiden Fällen, sowohl bei der strengen als auch bei der genäherten Methode, der vektor-analytische Ausgleich auf Zentimeter die gleichen Resultate aufweist wie die klassische Methode.

Für den vektor-analytischen Ausgleich ist es sicherlich ein sehr erfreuliches Zeichen, wenn mit kürzerer Rechenarbeit Endformeln und Endresultate entstehen, die auch durch die bisher gebräuchlichen Methoden erhalten wurden.

Beim klassischen strengen Ausgleich sind drei Korrelaten zu berechnen und es ist unzweifelhaft eine sehr umfangreiche Rechenarbeit notwendig. Beim vektor-analytischen Ausgleich ist bloß die Berechnung eines Korrelatvektors nötig und außerdem sind die meisten Berechnungen mit dem Rechenschieber durchführbar, da es sich ausnahmslos nur um kleine Größen bis zu einigen Zentimetern handelt und die Winkel bloß auf Grade zu bestimmen sind. Beim strengen Ausgleich hingegen muß besonders die Auflösung der Normalgleichungen sehr penibel erfolgen, wobei auch größere Zahlen vorkommen, da sonst die Ergebnisse und Kontrollen sehr unsicher werden, weil sich viele Ergebnisse oft aus Differenzen von nahe gleich großen Zahlen ergeben, die also ziemlich genau bestimmt werden müssen.

Aus all dem vorher Gesagten kann wohl gefolgert werden, daß sich eine Ausgleichsmethode wie der vektor-analytische Ausgleich nach R. S c h u m a n n, der bei weniger Rechenarbeit die gleichen Resultate erzielt wie die allseits anerkannte klassische Ausgleichsmethode, zumindest eingehende Beachtung verdient. Um eventuelle Bedenken zu zerstreuen, sei noch bemerkt, daß sich

die ganze numerische Rechenarbeit tabellarisch durchführen läßt und daß im ganzen Verlaufe der Berechnung keine Rechenoperationen mit Vektoren durchzuführen sind. Diese sind bloß bei der Aufstellung der Theorie nötig, während die Zahlenrechnung ohne Zuhilfenahme neuer Begriffe durchgeführt werden kann.

Dies ist analog der klassischen Methode, wo ja ebenfalls sofort die Normalgleichungen nach dem bekannten Rechenschema gebildet werden, ohne sich erst mit allgemeinen Ableitungen zu bemühen.

Die Anwendung in der Praxis stößt bis jetzt noch deshalb auf Schwierigkeiten, da noch keine bequemen Rechenformulare bestehen, die einfach ausgefüllt werden können. Man muß also meist jede Ausgleichung zuerst vektorisch und dann numerisch durchführen, was bei der noch geringen Verbreitung der Vektorrechnung in geodätischen Kreisen schwer zu verlangen ist.

Dann ist zu bedenken, daß die klassische Methode seit mehr als hundert Jahren ausgebaut wurde, so daß schon alle vorteilhaften Kniffe bekannt sind, eine Tatsache, die gegen den Vektorausgleich sicherlich sehr ins Gewicht fällt.

#### V. Z u s a m m e n f a s s e n d e S c h l u ß b e m e r k u n g e n.

Es wird gezeigt, daß die Anwendung der Vektorrechnung auf geodätische Probleme immer mehr zunimmt. Trotzdem diese Bewegung erst zirka 1926 eingesetzt hat, sind verhältnismäßig schon viele Abhandlungen mit diesem Thema herausgebracht worden.

Dabei lassen sich drei prinzipiell voneinander verschiedene Gruppen feststellen:

##### ad 1) *Allgemeine Gruppe.*

Es werden viele schon analytisch bekannte Probleme vom vektor-analytischen Standpunkte betrachtet, wobei nicht nur die Bestätigung der analytisch bekannt gewesenen Sätze erfolgt, sondern auch eine Menge neuer Beziehungen aufgestellt wurden. Außerdem entstehen aus der Umsetzung der Vektorformel in die Geometrie oft auch hübsche geometrische Beziehungen.

##### ad 2) *Vektor-analytischer Ausgleich.*

Diese Methode, die sehr hübsch und logisch von R. S c h u m a n n ausgebaut wurde, beruht auf dem Prinzip, daß die (skalare) Quadratsumme der Verbesserungsvektoren ein Minimum werden soll. Diese Methode läßt sich nur auf geodätische Figuren, wie Polygonzüge, Dreiecke, Dreiecksketten usw. anwenden, leistet dort aber erstaunlich Gutes. Die Rechenarbeit ist geringer als bei der bisher gebräuchlichen Methode und läßt sich zumeist mit dem Rechenschieber durchführen. Ein abschließendes Urteil, welche Methode die vorteilhaftere ist, läßt sich allerdings wohl erst in einiger Zeit fällen, bis der Vektorausgleich einigermaßen ausgebaut ist. Die Resultate sind praktisch gleich dem der klassischen Methode.

##### ad 3) *Fehleruntersuchungen mittels Vektoren.*

Diese neuartigen Untersuchungen sind außerordentlich bemerkenswert und es ist zu erwarten, daß sich dabei noch sehr interessante Ergebnisse zeigen werden. Wie weit sich diese Dinge in der Praxis auswirken werden, läßt sich jetzt noch nicht angeben. Allerdings kann schon jetzt gesagt sein, daß zu ihrer richtigen Anwendung ein ziemliches Maß von mathematischen Kenntnissen nötig ist.

Zum Schlusse kann gesagt werden, daß die Vektoranalysis in allen Fällen, wo allgemeine Ableitungen und allgemein gehaltene Untersuchungen geometrischer Art durchgeführt werden, sicherlich in formeller als auch anschaulicher Hinsicht besser am Platze ist. Der Übergang zu numerischen Resultaten läßt sich leicht durch Komponentenerlegung durchführen. Vorteilhaft ist, daß dieser Übergang zu zahlenmäßigen Resultaten erst in den Schlußformeln zu geschehen braucht.

#### VI. A n h a n g.

Nach Abschluß des obigen Artikels sind in der „Festschrift Eduard Doležal“ 1932 weitere drei sehr bemerkenswerte geodätisch-vektorische Abhandlungen erschienen, die hier deshalb anhangsweise noch kurz angeführt seien.

In der Abhandlung „Zur Fehlertheorie der Verbindungsgeraden geodätisch ermittelter Punkte“ diskutiert A. B a s c h die entstehenden Fehlerkurven durch. Sehr hübsch gelingt der rechnerische Nachweis, daß bei zwei gegebenen Punkten, die gleich genau bestimmt sind, an Stelle der mittleren Fehlerhyperbel ein Parallelgeradenpaar tritt, ein Ergebnis, das durchaus der Anschauung entspricht.

R. S c h u m a n n folgt dann mit der Abhandlung: „Über Schwerpunkts-Beziehungen bei einem fehlerzeigenden Vielecke.“ Es wird dabei die Aufgabe in einem fehlerzeigenden Vielecke den plausibelsten Punkt, der zugleich den Schwerpunkt darstellt, zu bestimmen, in eleganter Manier mit Hilfe der Vektorrechnung gelöst.

Die dritte vektorische Abhandlung ist von J. S é b o r und betitelt sich: „Die Aufgabe des unzugänglichen Abstandes (Hansenproblem) in vektoranalytischer Behandlung.“ Hier wurden in kurzer und präziser Art einige neue Zusammenhänge beim Hansenproblem aufgezeigt. Diese Abhandlung enthält dankenswerter Weise auch ein vollständig durchgerechnetes Beispiel aus der Praxis, so daß man hier die gute Gelegenheit hat, den Verlauf der vektorischen und numerischen Berechnung augenfällig verfolgen zu können.

W i e n, am 12. September 1931.

#### L i t e r a t u r - V e r z e i c h n i s.

- (1) A. S c h r e i b e r, Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen 1908. „Das Pothenot'sche Problem in vektor-analytischer Behandlung.“
- (2) F. F a l t u s, Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 1927. „Graphische Fehlerrechnung mit Anwendung von Williot-Plänen.“
- (3) R. S c h u m a n n, Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen 1926. „Vektor-analytischer Ausgleich geschlossener geodätischer Figuren in der Ebene.“
- (4) — „Über vektorischen Ausgleich geschlossener geodätischer Figuren in der Ebene im Falle beliebiger Gewichte für Strecken und Richtungen,“ Wiener Akademie der Wissenschaften 1927.
- (5) — „Beitrag zum vektorischen Ausgleich ebener geodätischer Netze bei Verschiedenheit der Gewichte für Strecken und Richtungen,“ Mitteilungen aus dem Markscheidewesen 1927.
- (6) — „Über Gewichtsbestimmung und Fehler-Quadratsumme bei gemischten Messungen,“ Zeitschrift für Vermessungswesen 1929.
- (7) — „Vektorische Ausgleichungen eines ausgemessenen Dreiecks,“ Wiener Akademie der Wissenschaften 1929.

- (8, 9) R. Schumann, „Untersuchung über den vektorischen Ausgleich von Dreiecksnetzen I. und II. Mitteilung,“ Wiener Akademie der Wissenschaften 1930.
- (10) F. Baeschlin, Schweizer Zeitschrift für Vermessungswesen 1928. „Einführung in die Vektorrechnung und die vektorische Ausgleichung.“
- (11) L. Schrutka, Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 1927. „Vektorische Darstellung der Theorie des Polarplanimeters.“
- (12) A. Basch, Wiener Akademie der Wissenschaften 1928. „Die Fehlertensoren und das Fehlerübertragungsgesetz der vektoralgebraischen Elementaroperationen.“
- (13) Wiener Akademie der Wissenschaften 1929. „Fehlertensoren, Fehleraffinoren und allgemeine Fehlerübertragungsgesetze.“
- (13a) Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 1931. „Die Vektorgleichung für das Rückwärtseinschneiden in der Ebene.“
- (14) J. Sébor - K. Ulbrich, Abhandlungen der Montan- und Forsthochschule Sopron, Ungarn 1929. „Vektor-analytischer Ausgleich von Polygonzügen.“
- (15) Ebenda 1931. „Numerische Studie über Auswahl und Ausgleich von Dreiecksketten.“
- (16) K. Ulbrich, Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 1930. „Allgemeine mathematische Theorie der Umfahrungsplanimeter in vektor-analytischer Darstellung.“
- (17) Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen 1930. „Rückwärtseinschneiden in vektor-analytischer Darstellung.“

## 60 Jahre metrisches Maßsystem in Österreich. 1872—1932.

### Ausstellung und Meßtechnikertagung.

**Ausstellung.** Die Ausstellung, die ihre Entstehung einer Anregung des Vereines der technischen Funktionäre des österreichischen Eichdienstes verdankt, wurde vom Niederösterreichischen Gewerbeverein in Verbindung mit dem Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen veranstaltet und findet in den Räumen des Österreichischen Museums für Kunst und Industrie, Wien, I., Stubenring 5, in der Zeit vom 15. September bis 30. Oktober 1932 statt.

Zum ersten Male wird ein zusammenfassendes, geschlossenes Bild der gesamten Meßtechnik dem Besucher vorgeführt und der gegenwärtige Stand der Erzeugung und Verwendung von Meßgeräten und Meßverfahren geboten; eine historische Abteilung zeigt die Entwicklung des metrischen Systems und des auf ihm aufgebauten Meßwesens.

Es war gewiß ein glücklicher Gedanke, eine solche Veranstaltung all jenen zu bieten, die mit Messungen zu tun haben; vom Kaufmann und Gewerbetreibenden angefangen bis zu den Mitarbeitern in wissenschaftlichen Instituten werden alle mit größtem Interesse die bedeutende Leistungsfähigkeit von Gewerbe und Industrie zu verfolgen in der Lage sein. Hier können Ingenieure und Physiker mit den neuesten Errungenschaften auf dem Gebiete der Feinmeßkunst bekannt werden.

Wenn trotz der fühlbaren Ungunst der wirtschaftlichen Verhältnisse alle Kräfte der österreichischen einschlägigen Industrie- und Gewerbeunternehmungen, dem Rufe des Niederösterreichischen Gewerbevereines folgend, sich zusammenschlossen und eine so imposante Spezialausstellung schufen, die in