Paper-ID: VGI_193114

Über die Unsicherheit der Berechnung des mittleren Fehlers

A. Husmann [1]

[1] *Aachen*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **29** (5), S. 104–108

1931

BibTEX:

```
@ARTICLE{Husmann_VGI_193114,
Title = {{\"U}ber die Unsicherheit der Berechnung des mittleren Fehlers},
Author = {Husmann, A.},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {104--108},
Number = {5},
Year = {1931},
Volume = {29}
}
```

Der Gebrauch des Gerätes ist sehr einfach. Man umfährt mit F die Grundrißzeichnung, wobei Schreibstift S die isometrische Abbildung liefert. Das Gerät hat überdies den Vorzug, daß durch die Verwendung von Rollen für die geradlinige Bewegung des ganzen Gerätes und für die Bewegung der Wagen W_1, W_2 die bei Handhabung des Gerätes zu überwindende Reibung sehr gering ist.

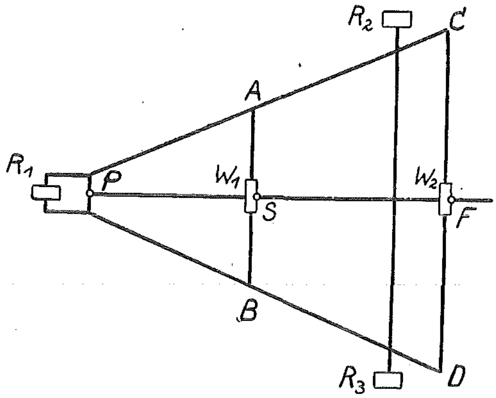

Abb. 8. Affinzeichner nach Prof. Fox.

Über die Unsicherheit der Berechnung des mittleren Fehlers.

Von Dipl.-Berging., Dipl.-Markscheider A. Husmann, Aachen.

Die nachstehende kleine Betrachtung sagt demjenigen nichts Neues, der in den Rechnungsgängen der Methode der kleinsten Quadrate einigermaßen zu Hause ist. Aber ich glaube, sie wird vielleicht manchem Praktiker nützlich sein, dem die Berufsarbeit nicht die Zeit läßt, sich mit den vermessungstechnischen Theorien so eingehend zu beschäftigen, wie er es im Interesse seiner Arbeiten vielleicht selbst wünschen würde.

Es sei ein Nivellement ausgeführt worden von 10 *km* hin und zurück. Die Abschlußdifferenz sei 5 *mm*. Dann ist also 5 *mm* der wahre Fehler eines Nivellements von 20 *km* Länge. Wie groß ist nun der mittlere Kilometerfehler m_k des Nivellements? Wenn man zur Beurteilung der Genauigkeit nur die eine Differenz von 5 *mm* hat, bleibt nichts weiter übrig, als den mittleren Fehler des 20-*km*-Nivellements gleich $\pm$ 5 *mm* anzunehmen und den mittleren Kilometerfehler m_k zu berechnen nach der Formel:

$$\pm 5 = m_k \sqrt{20}$$

$$m_k = \pm 5 : \sqrt{20} = \pm 1{\cdot}1 \; mm$$

Ist man nun berechtigt, auf Grund dieses Ergebnisses etwa zu sagen, daß es sich um ein Nivellement hoher Genauigkeit handelt? Dies ist wohl möglich, aber nicht erwiesen. Die Berechnung von m_k ist so unsicher, daß sie für sich allein stehend nicht die Unterlage für eine so weitgehende Behauptung bilden kann.

Ebenso verhält es sich bei der Berechnung des mittleren Fehlers eines Grubenzuges. Es sei ein Grubenzug ausgeführt von beispielsweise 80 Polygonpunkten, hin und zurück. Die Abschlußdifferenz sei 40''. Dann ist also $\pm 40''$ der wahre Fehler eines Grubenpolygonzuges von 160 Punkten.

Darf man nun den Schluß ziehen, daß der mittlere Fehler m_β, mit dem man den einzelnen Polygonwinkel gemessen hat, sich folgendermaßen ergibt:

$$m_\beta = \frac{\pm 40''}{\sqrt{160}} = \pm 3{\cdot}2''?$$

Jeder Fachmann weiß, daß bei keiner der heute üblichen Methoden für die Messung von Grubenpolygonwinkeln sich ein so kleiner mittlerer Fehler ergeben kann. Die 40'' Abschlußfehler müssen mithin ein Zufallsergebnis sein; es hatten sich offenbar positive und negative Einzelfehler aufgehoben. Dem Wert 40'' kommt für sich allein keine praktische Bedeutung zu.

Die Berechnung des mittleren Fehlers kann also mit einer erheblichen Unsicherheit behaftet sein. In den Mitt. a. d. Marksch. 1909 S. 31 hat R. Schumann diese Unsicherheit untersucht. Wird diese Unsicherheit oder „der mittlere Fehler des mittleren Fehlers" mit μ bezeichnet, mit m der mittlere Fehler selbst und mit σ die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen, so besteht nach Schumann die Formel:

$$\mu = \frac{\pm m}{\sqrt{2\sigma}}$$

Man hat danach folgende Tabelle:

σ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pm\mu$	0·71	0·50	0·41	0·35	0·32	0·29	0·27	0·25	0·23	0·22 m

Die Berechnung des mittleren Fehlers gewinnt also an praktischem Interesse, je mehr überschüssige Beobachtungen vorliegen.

Will man z. B. für ein Meßverfahren dessen mittleren Fehler bestimmen, beispielsweise für ein Nivellierverfahren, dessen mittlerer Fehler für ein Kilometer m_k ist, so muß man die Untersuchung so einrichten, daß man möglichst viele überschüssige Beobachtungen erhält.

Von diesem Gesichtspunkte aus ergibt sich der nachstehende Sachverhalt.

Für ein Nivellierinstrument sei z. B. bei 1 *cm* Intervall der Nivellierlatte festzustellen, welches die günstigste Zielweite ist. Es sei also für eine größere Anzahl verschiedener Zielweiten je eine Strecke von 1 *km* hin und zurück zu nivellieren. Es entsteht dann die Frage, ob m_k genauer erhalten wird, wenn eine Strecke von 1 *km* Länge bei jeder einzelnen Zielweite einmal hin und einmal zurück nivelliert wird, oder ob m_k für die einzelnen Zielweiten genauer erhalten wird, wenn man etwa 200 *m* fünfmal hin und fünfmal zurück nivelliert.

Bei 10 *m* Zielweite sei der mittlere Fehler einer Sicht m_{10}. Man erhält für eine fünfmal hin und zurück nivellierte Weglänge von 200 *m* den Höhenunterschied $\triangle h$ im ganzen zehnmal: $1_1, 1_2, \ldots, 1_{10}$. Es ist dann im Mittel:

$$\triangle h = \frac{[1_i]_{i=1}^{i=10}}{10}$$

$$v_1 = -\, l_1 + \triangle h$$
$$.\,. = .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$
$$v_{10} = -\, l_{10} + \triangle h$$

Für den mittleren Fehler m_{200} der einzelnen Messungen $l_1, l_2, \ldots, l_{10}$ hat man also:

$$m_{200} = \sqrt{\frac{[v.v]}{9}}$$

Es ist aber auch

$$m_{200} = m_{10} \cdot \sqrt{20}$$

Also hat man:

$$m_{10} = \sqrt{\frac{[v.v]}{9}}$$

Es ist ferner

$$m_{10} = m_k \sqrt{0{\cdot}01}$$

Mithin kann man als bekannt ansehen:

$$m_k = \frac{m_{10}}{\sqrt{0{\cdot}01}} = 10\, m_{10}$$

Die Versuchsstrecke von 200 m sei zehnmal abnivelliert, m_{10} mithin bestimmt mit Hilfe von 9 überschüssigen Messungen. Dann ist die Unsicherheit μ_{10}, mit der m_{10} bestimmt wurde, nach der Schumann'schen Formel

$$\mu_{10} = \frac{m_{10}}{\sqrt{18}}$$

Es ist mithin, da $m_k = 10\, m_{10}$ und μ die Unsicherheit des Betrages m_k bedeutet:

$$\mu = 10 \cdot \mu_{10} = \frac{10\, m_{10}}{\sqrt{18}} = 2{\cdot}4\, m_{10}$$

Nun werde auch eine Strecke von 1 km Länge mit 10 m Zielweite hin und zurück nivelliert. Es ergeben sich für den Höhenunterschied $\triangle\, h'$ die Werte l'_1 und l'_2. Man hat also:

$$\triangle\, h' = \frac{l'_1 + l'_2}{2}$$
$$v'_1 = -\, l'_1 + \triangle\, h'$$
$$v'_2 = -\, l'_2 + \triangle\, h'$$
$$m_k = \sqrt{\frac{[v.v]}{1}}$$

Es ist aber auch:

$$m_k = m_{10} \cdot \sqrt{100} = 10\, m_{10}$$

Für die Bestimmung von $\triangle\, h'$ liegen jetzt aber nur 2 Beobachtungswerte l'_1 und l'_2 vor, also ist m_{10} jetzt nur mit Hilfe einer einzigen überschüssigen Beobachtung bestimmt worden. Die Unsicherheit μ_{10} von m_{10} ist jetzt also

$$\mu_{10} = \frac{m_{10}}{\sqrt{2}} = 0{\cdot}71\, m_{10}$$
$$\mu = 10\, .\, 0{\cdot}71\, m_{10} = 7{\cdot}1\, m_{10}$$

Die Unsicherheiten μ, mit denen der mittlere Kilometerfehler m_k bestimmt wurde, verhalten sich also für die zehnmal nivellierte 200-*m*-Strecke und die zweimal nivellierte 1000-*m*-Strecke wie

$$2{\cdot}4 : 7{\cdot}1$$

Die Wahl der 200-*m*-Strecke verdient also den Vorzug. Man kann nun also sagen, daß der mittlere Kilometerfehler um so genauer erhalten wird, je kleiner man die Versuchsstrecken wählt. Man kann also dann zu einer Versuchsstrecke von 20 *m* Länge übergehen und sie 100mal abnivellieren. Hiergegen ist aber folgendes zu sagen.

Die vorstehende kleine Rechnung berücksichtigt allerdings scheinbar nur den „unregelmäßigen" Kilometerfehler. Daneben gibt es aber noch regelmäßige Fehler, d. h. solche Fehler, die stets mit gleichem Vorzeichen auftreten, z. B. Einsinken von Instrument und Latte, Wirkungen der Strahlenbrechung und persönliche Fehler. Diese Wirkungen kann man, indem sich ihre kleinen Beträge fortgesetzt addieren, bei längeren Nivellements wohl rechnerisch erfassen, bei kürzeren aber nicht. Dies würde also für die Wahl längerer Versuchsstrecken sprechen. Aber andererseits sind diese Beträge im Verhältnis zu den Wirkungen der unregelmäßigen Fehler klein. Bei Nivellements hoher Genauigkeit rechnet man z. B. auf 1·5 *mm* unregelmäßige Fehler nur 0·3 *mm* regelmäßige Fehler. Also tut man trotz allem gut, bei der Wahl der Länge der Versuchsstrecke hauptsächlich auf die Fortpflanzung der unregelmäßigen Fehler Rücksicht zu nehmen. Aber auch diese Rücksicht erfordert eine gewisse Mannigfaltigkeit der äußeren Umstände, die es nicht ratsam erscheinen lassen würden, eine ganz kleine Versuchsstrecke von nur einem Stande zu wählen. Wählt man, rein gefühlsmäßig schätzend, etwa 200 *m* Streckenlänge, so kann man jedenfalls damit rechnen, daß neben den großen unregelmäßigen Wirkungen auch schon die kleinen Wirkungen regelmäßiger Fehler in den Messungsergebnissen wenigstens teilweise zum Ausdruck gelangen.

Denkt man sich nun eine Versuchsstrecke von 200 *m* Länge in 10 Teilstrecken von je 20 *m* Länge zerlegt, etwa abgepflockt, und diese 200-*m*-Strecke hin und zurück Teilstrecke für Teilstrecke nivelliert, so hat man für den Höhenunterschied $\triangle h$ irgend einer Teilstrecke 10 Messungsergebnisse $l_1, \ldots, l_{10}$, so daß sich ergibt:

$$\triangle h = \frac{[l]_1^{10}}{10}$$

$$v_1 = -l_1 + \triangle h$$

$$\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

$$v_{10} = -l_{10} + \triangle h$$

$$m_{20} = \sqrt{\frac{[v.v]}{9}} = \sqrt{2}\,.\,m_{10}$$

Da 9 überschüssige Beobachtungen vorliegen, hat man für die mittlere Unsicherheit μ_{20} von m_{20}:

$$\mu_{20} = \frac{m_{20}}{\sqrt{18}}, \text{ da } m_{10} \text{ gleich } m_{20} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist, so hat man für μ_{10}:

$$\mu_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m_{20}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot m_{10}$$

Werte für m_{10} erhält man aber aus jeder der 10 Teilstrecken. Bildet man aus allen 10 Werten das arithmetische Mittel m_{10*}, so ist dessen Unsicherheit μ_{10*} nur $\frac{1}{\sqrt{10}}$ von der Unsicherheit des einzelnen Wertes. Man hat also:

$$\mu_{10*} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot m_{10*} = \frac{1}{\sqrt{180}} \cdot m_{10*} = 0{\cdot}075\, m_{10*}$$

Da $m_k = m_{10*} \cdot 10$ ist, so ist:

$$\mu = 10 \cdot \mu_{10*} = 0{\cdot}75\, m_{10*}$$

Die zuletzt besprochene Methode zur Ermittlung des mittleren Kilometerfehlers ist also von den besprochenen Methoden bei weitem die beste.

Referat.

(Vortrag, gehalten von H. A. Angelroth.)

Entwicklung, Arbeiten und Aufgaben der Junkers-Luftbild-Zentrale im In- und Ausland.

Am 12. Februar 1931 hielt der Leiter der Junkers-Luftbild-Zentrale in der Monatsversammlung der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie einen, allgemeines Interesse erweckenden Vortrag über den Anteil der Junkers-Luftbild-Zentrale am internationalen Luftbildwesen. Einleitend gab der Vortragende einen umfassenden Überblick über die auf der ganzen Welt durchgeführten aërophotogrammetrischen Arbeiten und über die sich damit befassenden Firmen und entwarf so ein anschauliches Bild von dem derzeitigen Stand dieses modernsten Zweiges des Vermessungswesens. Mit besonderer Wärme hob der Vortragende die Verdienste hervor, die die Österreichische Gesellschaft für Photogrammetrie sich um die Entwicklung und Förderung dieser Wissenschaft erworben hat, wie die Namen eines Scheimpflug, Kammerer und Doležal beweisen. Wenn auch in dem kapitalsarmen Österreich sich keine Gesellschaften für die Anwendung dieses Verfahrens bilden konnten, so sind doch zahlreiche Österreicher im überseeischen Ausland für die Verbreitung der Luftphotogrammetrie tätig oder tätig gewesen, wie z. B. v. Hübl, Wolf, Vallo und Lemberger.

Nachdem der Vortragende in dankenswerter Weise dieser Männer und ihrer Verdienste gedacht hatte, brachte er einen Überblick über die luftphotogrammetrische Tätigkeit des Auslandes.

Die größte Luftbildfirma, sowohl in bezug auf Personal, Kapital, als auch durchgeführte Arbeiten, ist die Aircraft Operating Co. in London. Ihr hauptsächlichstes Arbeitsgebiet ist Kanada, Indien und Südafrika. Interessant ist, daß die englischen Firmen (außer der genannten bestehen noch zwei weitere in London) das stereophotogrammetrische Verfahren fast gar nicht benützen. Ursache dürfte der Mangel an geschulten Arbeitskräften sein, aber auch der Umstand, daß dieses Verfahren Ergänzungsmessungen am Boden verlangt, die in den zur Aufnahme kommenden Gebieten oft nicht möglich sind.

In jüngster Zeit wurde die genannte Firma mit der Vermessung von Rio de Janeiro (1·4 Millionen Einwohner) betraut.