

Paper-ID: VGI_193111



Die Vektorgleichung für das Rückwärtseinschneiden in der Ebene

Alfred Basch ¹

¹ *Oberbaurat im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **29** (4), S. 73–84

1931

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Basch_VGI_193111,  
Title = {Die Vektorgleichung für das Rückwärtseinschneiden in der  
Ebene},  
Author = {Basch, Alfred},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen},  
Pages = {73--84},  
Number = {4},  
Year = {1931},  
Volume = {29}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

ORGAN

des

ÖSTERREICHISCHEN VEREINS FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Redaktion:

Hofrat Prof. Dr. Dr. Dr. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. H. Rohrer.

Nr. 4.

Baden bei Wien, im August 1931.

XXIX. Jahrg.

Die Vektorgleichung für das Rückwärtseinschneiden in der Ebene.

Von Privatdozent Dr. Alfred Basch, Oberbaurat im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen.

Die Angabe von Gleichungen, die für eine bestimmte Methode der geodätischen Ortsbestimmung die Koordinaten oder den Ortsvektor des Neupunktes explizit durch die Koordinaten oder Ortsvektoren der Altpunkte darstellen, bringt mehrere Vorteile gegenüber einer indirekten Bestimmungsweise oder einer nicht expliziten Darstellung mit sich. Sie führt eine bedeutende Erleichterung bei der Berechnung der Koordinaten des Neupunktes mit Hilfe der Rechenmaschine herbei, was für die Praxis von großer Wichtigkeit ist. Die explizite Darstellung des Ortsvektors des Neupunktes bietet aber auch den geeignetsten Ausgangspunkt für eine anzuschließende fehlertheoretische Untersuchung, die allgemeine, nicht nur für den Einzelfall geltende Gesetze für die Fehlerentstehung, vor allem aber für die Fehlerübertragung liefert ¹⁾. Eine solche fehlertheoretische Untersuchung gehört in das Gebiet der sogenannten „Vektorrechnung zweiter Stufe“, d. i. der „Affinorrechnung“, die von mancher Seite auch „Tensorrechnung“ genannt wird. In der folgenden Untersuchung soll lediglich die elementare Vektorrechnung, d. i. die Vektoralgebra erster Stufe, zur Anwendung gelangen.

Die für die Punktbestimmung durch Vorwärtseinschneiden geltende Vektorgleichung habe ich an anderer Stelle angegeben und aus ihr die Gesetze für die Fehlerübertragung bei dieser Art der Ortsbestimmung abgeleitet ²⁾.

¹⁾ Vgl. A. Basch, Die Fehlertensoren und das Fehlerübertragungsgesetz der vektoralgebraischen Elementaroperationen. Sitzungsberichte der Akad. Wien, 137. Bd., Abt. II a, 1928, S. 583—598. Fehlertensoren und Fehlerübertragung. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 8. Bd. 1928, S. 436—438. Fehlertensoren, Fehleraffinoren und allgemeine Fehlerübertragungsgesetze. Sitzungsberichte der Akad. Wien, 138. Bd. 1929, S. 125—168.

²⁾ A. Basch, Vektorische Fehlertheorie und geodätische Fehlerübertragung. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech., 9. Bd. 1929, S. 304—305.

Der Ortsvektor des Neupunktes ist im Fall des Vorwärtseinschneidens eine lineare homogene Funktion der Ortsvektoren der Altpunkte, in der die Vorzahlen nicht gewöhnliche Zahlen (Skalare); sondern spezielle Affinoren, und zwar Drehstrecker sind. Die aus der Vektorgleichung folgenden Fehlerübertragungsgesetze sind dementsprechend einigermaßen verwickelt, gestatten aber schöne geometrische Deutungen, die zu einfachen Konstruktionsmöglichkeiten für die Fehlerellipse des Neupunktes führen ³⁾.

Bei der Ortsbestimmung durch Rückwärtseinschneiden in der Ebene liegen die Verhältnisse im allgemeinen bedeutend einfacher. Der Ortsvektor r des Neupunktes P kann, wie auch hier gezeigt werden wird, in der Form

$$r = \sum_1^3 \gamma_\nu r_\nu \quad \left(\sum_1^3 \gamma_\nu = 1 \right) \dots \dots \dots (1) \text{ } ^4)$$

durch die Ortsvektoren r_ν der Altpunkte P_ν ($\nu = 1, 2, 3$) explizit dargestellt werden, wobei die Vorzahlen γ_ν gewöhnliche Skalare sind. Durch die Bedingung $\sum \gamma_\nu = 1$ ist die Unabhängigkeit des durch die Vektorgleichung (1) festgelegten Punktes von der Wahl des Bezugspunktes gesichert.

Bringt man in drei Punkten P_ν ($\nu = 1, 2, 3$) einer Ebene (bzw. in zwei Punkten einer Geraden oder in vier Punkten des Raumes) Punktmassen m_ν an, so ist (wie übrigens auch bei einer beliebigen Anzahl von Punkten) der Ortsvektor des Massenmittelpunktes oder Schwerpunktes des von den Punktmassen gebildeten Systems durch

$$r = \frac{\sum m_\nu r_\nu}{\sum m_\nu} \dots \dots \dots (2)$$

gegeben. Wir wollen voraussetzen, daß die drei Punkte P_ν der Ebene nicht in einer Geraden liegen (bzw. die zwei Punkte der Geraden nicht zusammenfallen, bzw. die vier Punkte des Raumes keiner gemeinsamen Ebene angehören). Die drei (bzw. zwei, bzw. vier) mit Punktmassen belegten Punkte wollen wir dann als Grundpunkte bezeichnen. Durch entsprechende Wahl des Verhältnisses der Punktmassen kann jeder beliebige Punkt P der Ebene (bzw. der Geraden oder des Raumes) zum Schwerpunkt eines aus in den Grundpunkten befindlichen Punktmassen bestehenden Massensystems (eines H. Graßmann'schen „Punktvereines“) gemacht werden. Der mit einer der Summe der Punktmassen m_ν gleichen Masse belegte Punkt P wird von H. Graßmann als „Summe des Punktvereines“ bezeichnet ⁵⁾. Die Punktmassen m_ν , die positiv, negativ aber auch Null sein können, sind die von F. Möbius eingeführten baryzentrischen Koordinaten des Punktes P ⁶⁾.

³⁾ Vgl. die beiden zuletzt zitierten Veröffentlichungen des Verfassers. Ferner: F. Ackerl, Über den Einfluß fehlerhafter Festpunkte auf das Ergebnis des Vorwärtseinschneidens. Ztschr. f. Vermessungswesen. 59. Bd., 1930, Heft 2.

⁴⁾ Im weiteren sind alle Summenzeichen und ebenso die später verwendeten Produktzeichen Π , auch wenn die diesbezügliche Angabe weggelassen wurde, als von $\nu = 1$ bis $\nu = 3$ wirkend zu erstrecken.

⁵⁾ H. Graßmann, Die Ausdehnungslehre, Berlin, 1862. Ges. Werke. 1. Bd. 2. Teil. Leipzig. 1896, S. 136.

⁶⁾ F. Möbius, Der baryzentrische Kalkül, Leipzig. 1827.

Die Gleichungen (1) und (2) stimmen mit einander überein, wenn man

$$\gamma_v = \frac{m_v}{\sum m_v} \dots \dots \dots (3)$$

setzt. Es soll vorausgesetzt werden, daß $\sum_v m \neq 0$ ist, d. h. daß die Gesamtmasse des Punktvereines von Null verschieden ist. Im entgegengesetzten Fall wäre der Schwerpunkt des Massensystems ein uneigentlicher Punkt der Ebene (bzw. der Geraden, bzw. des Raumes). Die baryzentrischen Koordinaten sind homogene Koordinaten. Ihre Größe selbst ist belanglos; es kommt lediglich auf ihr Verhältnis an. In der geodätischen Literatur werden die baryzentrischen Koordinaten vielfach auch als „Gewichte“ bezeichnet, wiewohl es vorteilhaft wäre, diese Benennung zu vermeiden oder nur für die Genauigkeitsmaße bei fehlertheoretischen Untersuchungen zu verwenden. Die Vorzahlen γ_v in Gleichung (1) sind ebenfalls baryzentrische Koordinaten, die der besonderen Bedingung $\sum \gamma_v = 1$ unterworfen sind. Wir wollen sie „normierte baryzentrische Koordinaten“ nennen.

Herr Hofrat Doležal hat in dieser Zeitschrift auf synthetischem Wege gezeigt, wie sich im Fall der Punktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden die baryzentrischen Koordinaten m_v des Neupunktes in bezug auf die drei Altpunkte durch Winkelfunktionen der Sehwinkel und der Winkel des Altpunktendreieckes ausdrücken lassen⁷⁾. Im folgenden soll zunächst eine knappe vektoranalytische Ableitung für das Verhältnis der baryzentrischen Koordinaten gebracht und dann der Ausnahmefall besprochen werden, in dem diese Koordinaten nicht verwendbar sind. Schließlich soll eine vektoralgebraische Lösung angegeben werden, die sowohl für den allgemeinen als auch für den Ausnahmefall zutrifft.

In Fig. 1 sind P_1, P_2, P_3 die Altpunkte, P der Neupunkt. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sind die orientierten Sehwinkel, unter denen die gerichteten Seiten des Altpunktendreieckes

$$s_1 = r_3 - r_2, s_2 = r_1 - r_3, s_3 = r_2 - r_1$$

vom Neupunkte aus erscheinen, ψ_1, ψ_2, ψ_3 die orientierten Außenwinkel des Altpunktendreieckes. Es ist

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \begin{cases} 0 \\ \pm 2\pi \end{cases}$$

wobei 0 für den Fall gilt, daß der Neupunkt P außerhalb, $\pm 2\pi$ für den Fall, daß er innerhalb des Altpunktendreieckes liegt. Hierbei gilt zuletzt das +- oder - Zeichen, je nachdem die Reihenfolge $P_1 P_2 P_3$ eine Dreiecksumfahrung in positivem oder negativem Drehsinn darstellt. Dementsprechend ist auch

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \pm 2\pi$$

Fig. 1 entspricht dem Fall der Innenlage des Neupunktes und dem positiven Drehsinn, als welcher der dem Uhrzeiger entgegengerichtete festgesetzt

⁷⁾ E. Doležal, Rückwärts- und Vorwärtseinschneiden mit der Rechenmaschine. Österr. Ztschr. f. Vermessungswesen. 26. Bd., 1928, S. 87—97.

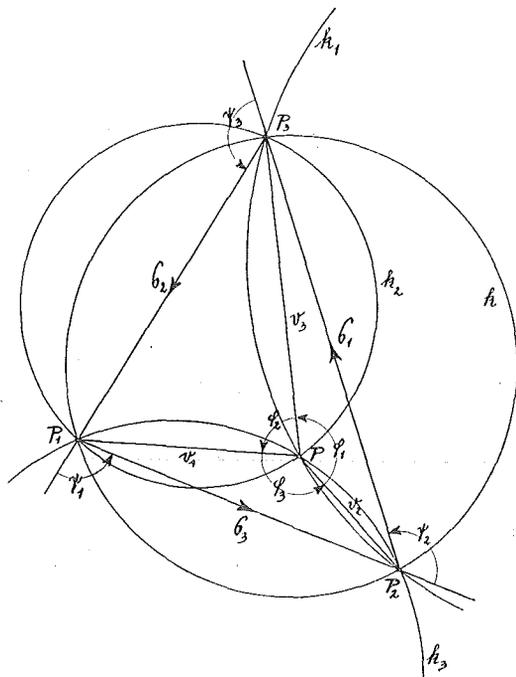


Fig. 1.

wurde. Dementsprechend sind alle Schwinkel φ_ν und die Dreiecksaußenwinkel ψ_ν positiv.

Im weiteren soll durch $a \cdot b$ das Skalarprodukt, durch $a \times b$ das Vektorprodukt der Vektoren a und b bezeichnet werden. Die Einführung des \times -Zeichens als Zeichen für die vektorielle Multiplikation dürfte sich in der Geodäsie darum empfehlen, weil die eckige Klammer seit C. F. Gauß in der Ausgleichsrechnung als Summenzeichen verwendet wird. Mit $a \cdot b$ soll das sogenannte Gibbs'sche Produkt der Vektoren a und b bezeichnet werden, das auch „unvollständiges“ oder „dyadisches“ Produkt genannt wird. Das Skalarprodukt v der „Dyade“ $a \cdot b$ als Linksfaktor mit dem Vektor c als Rechtsfaktor

$$v = (a \cdot b) c = a \cdot b c$$

ist ein Vektor, der mit dem Vektor a gleich- oder entgegengesetzt gerichtet ist, je nachdem $b c \gtrless 0$ ist, und dessen Betrag

$$|v| = |a| |b c|$$

dem Produkt der Beträge des Vektors a und des Skalarproduktes $b c$ gleicht. Analog wird das Produkt w des Vektors c als Linksfaktor und der Dyade $a \cdot b$ als Rechtsfaktor gebildet:

$$w = c (a \cdot b) = c a \cdot b$$

Es ist je nach Vorzeichen des Skalarproduktes ca ein Vektor von gleicher oder entgegengesetzter Richtung wie der Vektor b . Sein Betrag

$$|w| = |c a| |b|$$

Der Punkt besitzt hier gleichzeitig die Bedeutung eines Multiplikations- und eines Trennungszeichens.

Durch die Unterklammerung, das sogenannte „Axiatorzeichen“ $\underline{\quad}$, wird nach J. Spielrein angedeutet, daß der unterklammerte Vektor \underline{a} mit einem ihm nachbarlich geschriebenen vektoriell zu multiplizieren ist, so daß man schreiben kann

$$a \times b = \underline{a} b = a \underline{b} \text{ } ^8)$$

was sich im folgenden bei komplizierteren Ausdrücken als vorteilhaft erweisen wird. So wird man z. B. unter Verwendung des Axiatorzeichens schreiben können

$$a \times b + a c \cdot b = a (\underline{b} + c \cdot b)$$

\bar{i} ($\bar{i}^2 = 1$) soll den zur Ebene senkrechten, nach ihrer positiven Seite, d. i. nach oben, gerichteten Einheitsvektor bedeuten. Der Bezugspunkt wird in der Ebene des Altpunktedreieckes gewählt.

Es ist dann

$$\frac{(r_2 - r) \times (r_3 - r)}{(r_2 - r) (r_3 - r)} = \bar{i} \operatorname{tg} \varphi_1 \dots \dots \dots (4)$$

Wird diese Gleichung mit $(r_2 - r) (r_3 - r) \cotg \varphi_1$ multipliziert und entsprechend geordnet, so erhält man die erste der Gleichungen des folgenden Systems. Die beiden anderen ergeben sich dann durch zyklische Permutation der Zeiger.

$$\left. \begin{aligned} r^2 \cdot \bar{i} + r \left\{ \underline{(r_3 - r_2)} \cotg \varphi_1 - (r_3 - r_2) \cdot \bar{i} \right\} &= r_2 \times r_3 \cotg \varphi_1 - r_2 r_3 \cdot \bar{i} \\ r^2 \cdot \bar{i} + r \left\{ \underline{(r_1 - r_3)} \cotg \varphi_2 - (r_1 - r_3) \cdot \bar{i} \right\} &= r_3 \times r_1 \cotg \varphi_2 - r_3 r_1 \cdot \bar{i} \\ r^2 \cdot \bar{i} + r \left\{ \underline{(r_2 - r_1)} \cotg \varphi_3 - (r_2 - r_1) \cdot \bar{i} \right\} &= r_1 \times r_2 \cotg \varphi_3 - r_1 r_2 \cdot \bar{i} \end{aligned} \right\} \cdot (5)$$

Diese drei Gleichungen sind die Gleichungen der Ortskreise k_1, k_2, k_3 (Fig. 1), die durch je zwei Altpunkte und den Neupunkt gehen. Der Neupunkt P selbst ist ihr gemeinsamer Schnittpunkt. Durch Subtraktion je zweier dieser Gleichungen erhält man das System:

$$\left. \begin{aligned} r \left\{ \underline{r_1} (\cotg \varphi_2 + \cotg \varphi_3) - \underline{r_2} \cotg \varphi_3 - \underline{r_3} \cotg \varphi_2 - (r_3 - r_2) \cdot \bar{i} \right\} &= \\ - r_1 \left\{ \underline{r_2} \cotg \varphi_3 + \underline{r_3} \cotg \varphi_2 + (r_3 - r_2) \cdot \bar{i} \right\} & \\ r \left\{ \underline{r_2} (\cotg \varphi_3 + \cotg \varphi_1) - \underline{r_3} \cotg \varphi_1 - \underline{r_1} \cotg \varphi_3 - (r_1 - r_3) \cdot \bar{i} \right\} &= \\ - r_2 \left\{ \underline{r_3} \cotg \varphi_1 + \underline{r_1} \cotg \varphi_3 + (r_1 - r_3) \cdot \bar{i} \right\} & \\ r \left\{ \underline{r_3} (\cotg \varphi_1 + \cotg \varphi_2) - \underline{r_1} \cotg \varphi_2 - \underline{r_2} \cotg \varphi_1 - (r_2 - r_1) \cdot \bar{i} \right\} &= \\ - r_3 \left\{ \underline{r_1} \cotg \varphi_2 + \underline{r_2} \cotg \varphi_1 + (r_2 - r_1) \cdot \bar{i} \right\} & \end{aligned} \right\} (6)$$

Die Gleichungen dieses Systems sind die Gleichungen der von dem Neupunkte P nach den Altpunkten P_1, P_2, P_3 gerichteten Visierstrahlen v_1, v_2, v_3 (Fig. 1). Die drei Gleichungen sind als Gleichungen dreier sich in einem Punkte schneidender Geraden von einander nicht unabhängig; ihre Addition gibt die Identität $0 = 0$.

Aus zwei Gleichungen des Systems (6) kann, wie es am Ende dieser Untersuchung auch geschehen wird, unter Hinzufügung der Gleichung $r \bar{i} = 0$ auf rein vektoralgebraischem, allerdings etwas kompliziertem Wege der Ortsvektor r

⁸⁾ J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung. Zweite Auflage. Stuttgart. 1926.

des Neupunktes bestimmt werden. Die Vektorrechnung bietet aber den Vorteil, daß man im jeweils passenden Zeitpunkt zu dem für den gegebenen Fall vorteilhaftesten Koordinatensystem übergehen kann, und das ist hier das baryzentrische System mit den drei Altpunkten als Grundpunkte. Außerdem wird es sich hier wie bei vielen anderen Untersuchungen als zweckmäßig erweisen, den Bezugspunkt derart zu wählen, daß die Gleichungen sich tunlichst vereinfachen.

Wir drücken nun r mit Hilfe der baryzentrischen Koordinaten m_1, m_2, m_3 durch die Ortsvektoren r_1, r_2, r_3 der Altpunkte aus und lassen gleichzeitig den Bezugspunkt 0 mit dem Altpunkt P_1 zusammenfallen. Dann wird $r_1 = 0$ und

$$(m_1 + m_2 + m_3) r = m_2 r_2 + m_3 r_3$$

Die erste Gleichung des Systems (6) geht infolgedessen über in $\{r_2 \times r_3 \cotg \varphi_2 + r_2 (r_3 - r_2) \cdot \bar{i}\} m_2 + \{-r_2 \times r_3 \cotg \varphi_3 + r_3 (r_3 - r_2) \cdot \bar{i}\} m_3 = 0$ woraus sich ergibt

$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{r_2 \times r_3 \cotg \varphi_3 - r_3 (r_3 - r_2) \cdot \bar{i}}{r_2 \times r_3 \cotg \varphi_2 + r_2 (r_3 - r_2) \cdot \bar{i}}$$

Zähler und Nenner des in der letzten Gleichung auf der rechten Seite stehenden Bruches sind Vektoren von der Richtung \bar{i} . Multipliziert man Zähler und Nenner skalar mit diesem Einheitsvektor und beachtet, daß

$$\bar{i} r_2 r_3 = 2 f$$

ist, wobei f den orientierten Flächeninhalt des Altpunktdreieckes $P_1 P_2 P_3$ bedeutet, und berücksichtigt weiter, daß, nachdem P_1 als Bezugspunkt gewählt wurde, $r_2 = s_3, r_3 = -s_2$ (vgl. Fig. 2), so ergibt sich

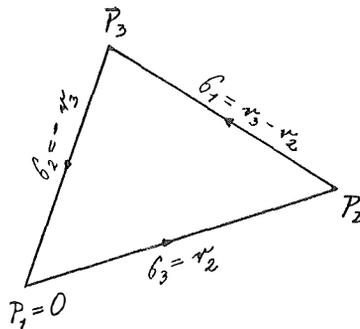


Fig. 2.

$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{2 f \cotg \varphi_3 + s_1 s_2}{2 f \cotg \varphi_2 + s_3 s_1}$$

Bezeichnet man mit r den Halbmesser des Umkreises k des Altpunktdreieckes, so ist

$$2 f = 4 r^2 \sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3 \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} s_1 s_2 &= 4 r^2 \sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_3 \\ s_3 s_1 &= 4 r^2 \sin \psi_3 \sin \psi_1 \cos \psi_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

und daher, da $r \sin \psi_1 \neq 0$ ist,

$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{\sin \psi_2 (\sin \psi_3 \cotg \varphi_3 + \cos \psi_3)}{\sin \psi_3 (\sin \psi_2 \cotg \varphi_2 + \cos \psi_2)} = \frac{\sin \varphi_2 \sin \psi_2 \sin (\varphi_3 + \psi_3)}{\sin \varphi_3 \sin \psi_3 \sin (\varphi_2 + \psi_2)} \dots (9)$$

oder auch

$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{\cotg \varphi_3 + \cotg \psi_3}{\cotg \varphi_2 + \cotg \psi_2} \dots (9')$$

Dieses Verhältnis läßt sich nach entsprechender Umformung aus dem Gesichtspunkt der Symmetrie oder durch Zuhilfenahme und analoge Behandlung einer weiteren Gleichung des Systems (6) zu dem Verhältnis der drei baryzentrischen Koordinaten des Neupunktes erweitern und es ergibt sich

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{\sin \varphi_1 \sin \psi_1}{\sin (\varphi_1 + \psi_1)} : \frac{\sin \varphi_2 \sin \psi_2}{\sin (\varphi_2 + \psi_2)} : \frac{\sin \varphi_3 \sin \psi_3}{\sin (\varphi_3 + \psi_3)} \dots (10)$$

oder

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{1}{\cotg \varphi_1 + \cotg \psi_1} : \frac{1}{\cotg \varphi_2 + \cotg \psi_2} : \frac{1}{\cotg \varphi_3 + \cotg \psi_3} (10')$$

Führen wir an Stelle der Außenwinkel des Altpunktendreieckes die orientierten Innenwinkel $\alpha_\nu = \pi - \psi_\nu$ ein und multiplizieren die Verhältniszahlen mit -1 , so erhalten wir die von Herrn Hofrat Doležal angegebene Gleichung

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{1}{\cotg \alpha_1 - \cotg \varphi_1} : \frac{1}{\cotg \alpha_2 - \cotg \varphi_2} : \frac{1}{\cotg \alpha_3 - \cotg \varphi_3} (10'')$$

Die normierte baryzentrische Koordinate des Neupunktes kann man dann beispielsweise in der Form ausdrücken

$$\gamma_\nu = \frac{\sin \varphi_\nu \sin \psi_\nu}{\sin (\varphi_\nu + \psi_\nu)} \dots (11)$$

und den Ortsvektor des Neupunktes dementsprechend durch die Gleichung

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_1^3 \frac{\sin \varphi_\nu \sin \psi_\nu}{\sin (\varphi_\nu + \psi_\nu)} \mathbf{r}_\nu}{\sum_1^3 \frac{\sin \varphi_\nu \sin \psi_\nu}{\sin (\varphi_\nu + \psi_\nu)}} \dots (12)$$

oder durch eine entsprechende aus einer der Gleichungen (10') oder (10'') hervorgehende. Die aus (10'') hervorgehende Gleichung für den Ortsvektor des Neupunktes wäre die vektoralgebraische Zusammenfassung der beiden von Herrn Hofrat Doležal angegebenen Gleichungen (9)⁹⁾ für die Koordinaten des Neupunktes¹⁰⁾.

⁹⁾ Vgl. die unter 7) zitierte Veröffentlichung.

¹⁰⁾ Kürzlich hat Herr Dr. K. Ulbrich auf die Proportionalität zwischen den entsprechenden baryzentrischen Koordinaten und den orientierten Flächeninhalten der Gegendreiecke hingewiesen. (Zeitschr. f. Vermessungswesen, 24. Bd., 1930, H. 24.) Diese schon F. Möbius und H. Graßmann bekannte, in entsprechender Analogie auch für beliebig dimensionale Räume geltende Beziehung läßt sich am kürzesten auf folgende Art beweisen:

Sind P_1, P_2, P_3, P vier beliebige, nicht notwendigerweise in einer Ebene liegende Punkte, so sind $\mathbf{r}_\nu' = \mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}$ die Ortsvektoren der Punkte P_ν ($\nu = 1, 2, 3$) in bezug auf den

Da die Altpunkte $P_1 P_2 P_3$ voraussetzungsgemäß nicht auf einer Geraden liegen, so ist $\sin \psi_\nu$ für alle drei Werte und $\sin \varphi_\nu$ mindestens für zwei Werte von Null verschieden. (Nur für zwei dann, wenn der Neupunkt auf einer Geraden durch zwei Altpunkte liegt.) Für den Fall, daß $\sin(\varphi_\nu + \psi_\nu) = 0$ ist, was für $\nu = 1, 2, 3$ gleichzeitig eintritt, liegt der Neupunkt auf dem durch die Altpunkte gelegten Kreis, dem sogenannten „gefährlichen Kreis“. Die Verhältnisse zwischen den baryzentrischen Koordinaten und daher auch die Lage des Neupunktes sind unbestimmbar. Biegt der Neupunkt P in der Nähe des „gefährlichen Kreises“, so wird seine Lagenbestimmung ungenau.

Der Fall, daß die drei Altpunkte in einer Geraden liegen, erfordert eine gesonderte Betrachtung, da hier die Methode der baryzentrischen Koordinaten versagt. Es ist in diesem Fall am zweckmäßigsten, den Bezugspunkt O in der Altpunktegeraden zu wählen. Dann sind die Ortsvektoren der Altpunkte gleichgerichtet, so daß

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = 0$$

ist und sich die rechte Seite der Gleichung des Visierstrahles \mathbf{v}_ν , d. i. der ν -ten Gleichung im System (6), auf

$$-r_\nu(r_{\nu+2} - r_{\nu+1}) \cdot \mathbf{i}^{11}$$

vereinfacht. Macht man die Gerade durch die Altpunkte zur x -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und bezeichnet mit \mathbf{i} bzw. \mathbf{j} die Einheitsvektoren in der Richtung der positiven x - bzw. y -Achse, so ist

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_\nu = x_\nu \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_{\nu+2} = -x_\nu y \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_{\nu+1} = x_\nu x$$

Die Gleichungen von zwei Visierlinien, z. B. der Visierlinien \mathbf{v}_2 und \mathbf{v}_3 , nehmen, wenn man noch die orientierten Seiten

$$s_\nu = x_{\nu+2} - x_{\nu+1}$$

Punkt P und es ist, wenn man mit \mathbf{f}_ν den der Dreiecksfläche $P P_{\nu+1} P_{\nu+2}$ entsprechenden Vektor bezeichnet, nach dem Graßmann'schen Entwicklungssatz (H. Graßmann, Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, Leipzig 1844, Ges. Werke, 1. Bd., 1. Teil, Leipzig 1894, S. 167)

$$2 \mathbf{r}_\nu' \times \mathbf{f}_\nu = \mathbf{r}_\nu' \times (\mathbf{r}_{\nu+1}' \times \mathbf{r}_{\nu+2}') = r_\nu' r_{\nu+2}' \cdot r_{\nu+1}' - r_\nu' r_{\nu+1}' \cdot r_{\nu+2}'$$

Summiert man diese Gleichung von $\nu = 1$ bis $\nu = 3$, so erhält man

$$\sum_1^3 \mathbf{r}_\nu' \times \mathbf{f}_\nu = \sum_1^3 (\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}) \times \mathbf{f}_\nu = 0$$

Allgemein ist der der Dreiecksfläche $P_1 P_2 P_3$ entsprechende Vektor $\mathbf{f} = \sum_1^3 \mathbf{f}_\nu$. Liegen die vier Punkte in einer Ebene, so ist $\mathbf{f}_\nu = f_\nu \mathbf{k}$, $\mathbf{f} = f \mathbf{k}$ und

$$\sum_1^3 f_\nu r_\nu' = \sum_1^3 f_\nu (\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}) = 0$$

daher

$$\mathbf{r} = \frac{\sum f_\nu \mathbf{r}_\nu}{f}$$

oder

$$m_1 : m_2 : m_3 = f_1 : f_2 : f_3$$

¹¹⁾ Die Addition im Zeiger gilt hier wie auch im weiteren immer zyklisch bezogen auf den Modul Drei.

eingeführt, die Form an

$$\left. \begin{aligned} s_2 x + (s_3 \cotg \varphi_3 - s_1 \cotg \varphi_1) y &= s_2 x_2 \\ s_3 x + (s_1 \cotg \varphi_1 - s_2 \cotg \varphi_2) y &= s_3 x_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

und ergeben als Lösungen die Koordinaten des Neupunktes

$$\left. \begin{aligned} x &= + \frac{s_1^2 x_1 \cotg \varphi_1 + s_2^2 x_2 \cotg \varphi_2 + s_3^2 x_3 \cotg \varphi_3}{s_1^2 \cotg \varphi_1 + s_2^2 \cotg \varphi_2 + s_3^2 \cotg \varphi_3} \\ y &= - \frac{s_1 s_2 s_3}{s_1^2 \cotg \varphi_1 + s_2^2 \cotg \varphi_2 + s_3^2 \cotg \varphi_3} \end{aligned} \right\} \dots \dots (14)$$

Der Nenner in den auf der rechten Seite stehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} &\Sigma s_v^2 \cotg \varphi_v = \\ = & - \frac{1}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3} \left\{ (s_1 \sin \varphi_2 - s_2 \sin \varphi_1)^2 + 4 s_1 s_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin^2 \frac{\varphi_3}{2} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

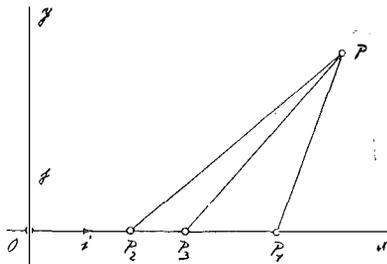


Fig. 3.

Nun kann man die Bezeichnung der drei Altpunkte immer derart wählen, daß die zwei orientierten Seiten s_1 und s_2 das gleiche Vorzeichen besitzen. (In Fig. 3 sind sowohl s_1 als auch s_2 positiv.) Dann besitzen auch $\sin \varphi_1$ und $\sin \varphi_2$ das gleiche Vorzeichen und der Ausdruck in der geschlungenen Klammer ist positiv. Es ist dadurch

$$\text{sign } \Sigma s_v^2 \sin \varphi_v = - \text{sign } \Pi \sin \varphi_v$$

und

$$\text{sign } y = \text{sign } \Pi s_v \cdot \text{sign } \Pi \sin \varphi_v = \text{sign } \Pi s_v \sin \varphi_v$$

wovon man sich auch durch Vergleich der Figur 3 mit einer Figur, in der der Neupunkt P auf der anderen Seite der x -Achse liegt, und zwar bei beliebiger Permutation der Bezeichnungen der Altpunkte, überzeugen kann.

Die hier gebrachten expliziten Gleichungen für die Lage des Neupunktes (12) und (14) leiden an einem Schönheitsfehler. Gleichung (12) gilt für alle Fälle mit Ausschluß des Ausnahmefalles, daß die drei Altpunkte auf einer Geraden liegen; Gleichung (14) gilt wieder nur für diesen Ausnahmefall. Die Gleichung (12) macht von den baryzentrischen Koordinaten Gebrauch, die im Ausnahmefall unwendbar sind; Gleichung (14) verwendet ein dem speziellen Fall entsprechend angepaßtes rechtwinkliges Koordinatensystem.

Die nicht allgemeine Verwendbarkeit der Lösung (12) und die ausschließliche Gültigkeit der Lösung (14) für den Ausnahmefall kann aber zum fühlbaren Mangel werden, wenn es sich darum handelt, an die Lösung Genauigkeits-

betrachtungen anzuschließen, in denen der Einfluß der ungenauen Lagenbestimmung der Altpunkte auf die Lage des Neupunktes untersucht wird und die Altpunkte auch nur angenähert auf einer Geraden liegen, ein Fall, der wohl bei Stromvermessungen öfters vorliegen dürfte¹²⁾.

Eine für alle Fälle gültige Gleichung für den Ortsvektor des Neupunktes kann man durch Lösung des Systems (6) der Visierstrahlgleichungen gewinnen. Zwecks knapperen Ausdruckes mögen außer den gerichteten Seiten $s_v = r_{v+2} - r_{v+1}$ die folgenden Vektoren eingeführt werden:

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= r_2 (\cotg \varphi_3 + \cotg \varphi_1) - r_3 \cotg \varphi_1 - r_1 \cotg \varphi_3 = s_3 \cotg \varphi_3 - s_1 \cotg \varphi_1 \\ u_3 &= r_3 (\cotg \varphi_1 + \cotg \varphi_2) - r_1 \cotg \varphi_2 - r_2 \cotg \varphi_1 = s_1 \cotg \varphi_1 - s_2 \cotg \varphi_2 \\ a_2 &= u_2 \times \xi - s_2 \\ a_3 &= u_3 \times \xi - s_3 \end{aligned} \right\} (16)$$

Dann lauten die Gleichungen der Visierstrahlen v_2 und v_3

$$\left. \begin{aligned} r (u_2 - s_2 \cdot \xi) &= r_2 (u_2 - s_2 \cdot \xi) \\ r (u_3 - s_3 \cdot \xi) &= r_3 (u_3 - s_3 \cdot \xi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

und gehen nach skalarer Multiplikation mit dem Einheitsvektor ξ als Rechtsfaktor über in

$$\left. \begin{aligned} r a_2 &= r_2 a_2 \\ r a_3 &= r_3 a_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

Fügt man zu diesen beiden Gleichungen noch die Gleichung

$$r \xi = 0 \dots \dots \dots (19)$$

hinzu, die aussagt, daß der Neupunkt in der Ebene der Altpunkte liegt, so liegen für den gesuchten Vektor r drei Skalargleichungen vor, so daß er, sofern

$$a_2 a_3 \xi \neq 0$$

ist, durch

$$r = \frac{1}{\xi a_2 a_3} (r_2 a_2 \cdot a_3 - r_3 a_3 \cdot a_2) \times \xi \dots \dots \dots (20)$$

gegeben ist. Nun ist

$$a_2 \times a_3 = \xi u_2 u_3 \cdot \xi + s_2 \times s_3 + (u_3 s_2 - u_2 s_3) \cdot \xi$$

somit

$$\xi a_2 a_3 = \xi (u_2 \times u_3 + s_2 \times s_3) + u_3 s_2 - u_2 s_3$$

Setzt man

$$s_2 \times s_3 = s_3 \times s_1 = s_1 \times s_2 = 2 \bar{f} = 2 f \xi,$$

wobei \bar{f} den der Dreiecksfläche $P_1 P_2 P_3$ entsprechenden, zu ihr senkrechten Vektor, f den orientierten Flächeninhalt des Dreieckes bedeutet, so ergibt sich bei Berücksichtigung der Beziehung

$$\sum_1^3 \cotg \varphi_{v+1} \cotg \varphi_{v+2} = 1$$

¹²⁾ Die Gleichung (12) wird außerdem in der Umgebung des Ausnahmefalles bis zur Unbrauchbarkeit ungenau. Auch für Formeln der Geometrie gilt der von Gerhart Hessenberg für Konstruktionen geprägte Ausspruch: „Versagt eine Konstruktion theoretisch in einem bestimmten Fall, so versagt sie praktisch bereits, wenn dieser Fall nur näherungsweise eintritt.“ (G. Hessenberg, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Herausgegeben von E. Salkowski. Sammlung E. Hilb, Bd. III a, Leipzig, 1929.)

$$u_2 \times u_3 = \sum_1^3 s_{v+1} \times s_{v+2} \cotg \varphi_{v+1} \cotg \varphi_{v+2} = 2f$$

und somit

$$f a_2 a_3 = 4f - \sum_1^3 s_v^2 \cotg \varphi_v \dots \dots \dots (21)$$

Nun verschwindet aber

$$4f - \sum s_v^2 \cotg \varphi_v = -4r^2 \sum \sin^2 \psi_v (\cotg \varphi_v + \cotg \psi_v) \dots (21')$$

ausschließlich für den „gefährlichen Ort“, d. i. im Fall $f \neq 0$ für den Umkreis des Altpunktendreieckes, im Fall $f = 0$ für die Gerade, auf der die Altpunkte in diesem Sonderfall liegen. Für alle nicht auf dem gefährlichen Ort liegenden Punkte ist durch (20) der Ortsvektor des Neupunktes eindeutig bestimmt. Es ist

$$r_2 a_2 = f (r_1 \times r_2 \cotg \varphi_3 - r_2 \times r_3 \cotg \varphi_1) - r_2 s_2 \dots (22)$$

$$r_3 a_3 = f (r_2 \times r_3 \cotg \varphi_1 - r_3 \times r_1 \cotg \varphi_2) - r_3 s_3 \dots$$

$$a_2 \times f = s_1 \cotg \varphi_1 - s_3 \cotg \varphi_3 - s_2 \times f \dots (23)$$

$$a_3 \times f = s_2 \cotg \varphi_2 - s_1 \cotg \varphi_1 - s_3 \times f \dots$$

und infolgedessen

$$(r_2 a_2 \cdot a_3 - r_3 a_3 \cdot a_2) \times f =$$

$$= \sum_1^3 \{ f r_{v+2} \times r_v \cotg \varphi_{v+1} - r_v \times r_{v+1} \cotg \varphi_{v+2} - r_v s_v \} \cdot s_v \cotg \varphi_v -$$

$$- f \sum_1^3 r_{v+1} \times r_{v+2} \cdot s_v \times f \cotg \varphi_v + \sum_1^3 r_v s_v \cdot r_v \times f \dots (24)$$

Nach Berücksichtigung der Beziehung

$$\sum f (r_{v+2} \times r_v \cotg \varphi_{v+1} - r_v \times r_{v+1} \cotg \varphi_{v+2}) \cdot s_v \cotg \varphi_v = 2f \sum r_v \cotg \varphi_{v+1} \cotg \varphi_{v+2}$$

ergibt sich bei Zusammenfassung der Summen in (24) und Division durch Gleichung (21) die allgemein gültige Lösung für den Ortsvektor des Neupunktes

$$r = \frac{\sum \{ 2f r_v \cotg \varphi_{v+1} \cotg \varphi_{v+2} - r_v s_v \cdot s_v \cotg \varphi_v - (f r_{v+1} r_{v+2} \cdot s_v \cotg \varphi_v - r_v s_v \cdot r_v) \times f \}}{4f - \sum s_v^2 \cotg \varphi_v} \dots (25)$$

aus der man im Bedarfsfalle zu zwei gleichwertigen, allerdings etwas langwierigen Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten übergehen kann.

Im Ausnahmefall ist $f = 0$ und — wenn man dann den Bezugspunkt auf der Altpunktgeraden wählt — auch $r_{v+1} \times r_{v+2} = 0$. Setzt man weiters $r_v = x_v i$, $s_v = i s_v$ und beachtet, daß

$$\sum x_v^2 s_v = -s_1 s_2 s_3 = \Pi s_v$$

so erhält man aus der allgemeinen die für den Ausnahmefall allein gültige Lösung

$$r = \frac{i \sum s_v^2 x_v \cotg \varphi_v - j \Pi s_v}{\sum s_v^2 \cotg \varphi_v} \dots \dots \dots (26)$$

die die Zusammenfassung der beiden Gleichungen (14) darstellt.

Im allgemeinen Fall folgt aus (25), wenn man einen der Altpunkte, z. B. P_1 als Bezugspunkt wählt,

$$(4f - \sum s_v^2 \cotg \varphi_v) r = (2f \cotg \varphi_1 - r_2 r_3) \cdot (r_2 \cotg \varphi_3 + r_3 \cotg \varphi_2 - s_1 \times f) \dots (27)$$

Soferne $f \neq 0$ ist, kann man die Vektoren $r_2 \times \bar{r}$ und $r_3 \times \bar{r}$, die aus den Ortsvektoren r_2 und r_3 durch Drehung in der Dreiecksebene um einen rechten Winkel in positivem Sinne hervorgehen, durch die nicht gedrehten Ausgangsvektoren r_2 und r_3 darstellen, und zwar ist

$$r_2 \times \bar{r} = \frac{1}{2f} (r_2 r_3 \cdot r_2 - r_2^2 \cdot r_3)$$

$$r_3 \times \bar{r} = \frac{1}{2f} (r_3^2 \cdot r_2 - r_2 r_3 \cdot r_3)$$

und daher

$$\varepsilon_1 \times \bar{r} = (r_3 - r_2) \times \bar{r} = \frac{1}{2f} (r_3 \varepsilon_1 \cdot r_2 - r_2 \varepsilon_1 \cdot r_3)$$

Führt man die letzte Gleichung in (27) ein und drückt die zu Skalarprodukten vereinigten Ortsvektoren durch die Dreiecksseiten aus, so erhält man $(4f - \Sigma \varepsilon_v^2 \cotg \varphi_v) r =$

$$= (2f \cotg \varphi_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_3) \cdot \left\{ (\cotg \varphi_3 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{f}) \cdot r_2 + (\cotg \varphi_2 + \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_1}{f}) \cdot r_3 \right\} =$$

$$= 2f (\cotg \varphi_1 + \cotg \psi_1) \left\{ (\cotg \varphi_3 + \cotg \psi_3) r_2 + (\cotg \varphi_2 + \cotg \psi_2) r_3 \right\}$$

und hieraus unter Beachtung von (7) und der Beziehung $\varepsilon_v^2 = 4r^2 \sin^2 \psi_v$

$$r = \frac{\Pi \sin(\varphi_v + \psi_v)}{2 \Pi \sin \varphi_v \sin \psi_v - \Sigma \sin^2 \psi_v \sin \varphi_{v+1} \sin \varphi_{v+2} \cos \varphi_v} \left\{ \frac{\sin \varphi_2 \sin \psi_2}{\sin(\varphi_2 + \psi_2)} r_2 + \frac{\sin \varphi_3 \sin \psi_3}{\sin(\varphi_3 + \psi_3)} r_3 \right\} \quad (28)$$

welches Ergebnis, da

$$\frac{2 \Pi \sin \varphi_v \sin \psi_v - \Sigma \sin^2 \psi_v \sin \varphi_{v+1} \sin \varphi_{v+2} \cos \varphi_v}{\Pi \sin(\varphi_v + \psi_v)} = \Sigma \frac{\sin \varphi_v \sin \psi_v}{\sin(\varphi_v + \psi_v)} \quad (29)$$

mit den früher für die baryzentrischen Koordinaten und für den Ortsvektor des Neupunktes erhaltenen Gleichungen (11) und (12) in vollständigem Einklang steht.

Erneuerung der österreichischen Katasterpläne.

Von Obervermessungsrat P r a x m e i e r, Wien.

Die österreichischen Katasterpläne gehen in ihrer weitaus überwiegenden Mehrheit auf die Meßtischaufnahmen zu Beginn des 19. Jahrhunderts zurück, die, anfänglich nur mangelhaft fortgeführt, in den Jahren um 1870 reambuliert worden sind und seit 1883 systematisch fortgeführt werden. Um die Wende des 19. Jahrhunderts beginnen sich schwache Ansätze zu Neuvermessungen zu zeigen, die sich bis heute zu einer schon ganz ansehnlichen Stärke entwickelt haben und im weiteren Ausbau begriffen sind, so daß sie, wenn auch nur sehr allmählich, zu einer Erneuerung der Katastralkarten wenigstens der allerwichtigsten Gebiete führen werden. Wie lang dieser Weg allerdings sein wird, läßt sich am besten aus der Tatsache ersehen, daß von den insgesamt 7527 Katastralgemeinden Oesterreichs (ohne Burgenland) bisher rund 160 Gemeinden neu vermessen worden sind. Gewiß ist in den kommenden Jahren mit dem weiteren Ausbau der Neuvermessungsabteilungen und daher mit erhöhter Tätigkeit zu rechnen. Diese Tätigkeit wird indessen lange nicht genügen, die immer zahlreicher auftauchenden Wünsche nach neuen Katasterplänen zu befriedigen, sie