Die Punkteinschaltung mit Ausgleichsverfahren nach der Methode der bedingten Beobachtungen

Artur Morpurgo [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **27** (4, 5), S. 53–59, 69–78

1929


```
@ARTICLE{Morpurgo_VGI_192911,
Title = {Die Punkteinschaltung mit Ausgleichsverfahren nach der Methode der
   bedingten Beobachtungen},
Author = {Morpurgo, Artur},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {53--59, 69--78},
Number = {4, 5},
Year = {1929},
Volume = {27}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.
Redaktion:
Hofrat Prof. Dr. Ing., techn. et mont. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. K. Lego.
Nr. 4. Baden bei Wien, im September 1929. XXVII. Jahrg.

Die Punkteinschaltung mit Ausgleichsverfahren nach der Methode der bedingten Beobachtungen.

Von Hofrat Ing. ARTUR MORPURGO.

Wenn die beobachteten Größen einem in sich abgeschlossenen Gebilde zugehören wie bei der Einschaltung von Dreiecks- und Nivellementsnetzen, sind die von den ausgeglichenen Werten streng zu erfüllenden Bedingungen in leichter Art mathematisch zu erfassen.

Anders bei der Punkteinschaltung, wo zwar die einzig zu erfüllende Bedingung einfachster Natur ist: die den gemessenen Richtungen anzubringenden, im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate bestmöglichen Verbesserungen müssen derart beschaffen sein, daß die verbesserten Richtungen auf einem Punkt zusammentreffen, welcher Bedingung jedoch allgemein nur auf dem Umwege der Koordinatenausgleichung entsprochen wird.

Die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen wird der erwähnten Bedingung a priori entsprechen müssen, da das Endergebnis des Ausgleiches die Lage e i n e s Punktes bestimmt.

Wenn wir aber die Aufgabe der Punkteinschaltung nach bedingten Beobachtungen behandeln wollen, was von theoretischem Interesse ist, so müssen wir voresrt feststellen, welche Bedingungen zwischen den Verbesserungen bestehen müssen, damit dieselben einen gemeinsamen Schnittpunkt der ausgeglichenen Richtungen gewährleisten.

In Jordans Handbuch der Vermessungskunde, 8. Aufl., 2. Bd., Seiten 410 bis 412, finden wir eine konstruktive Lösung des Problems, die jedoch nur für das Vorwärtseinschneiden mit drei Strahlen Anwendung finden kann. In den Heften 7 und 8, ex 1916 dieser Zeitschrift behandelt Prof. Dr. Dokulil die Lösung des mehrfachen Rückwärtseinschneidens nach der Methode der bedingten Beobachtungen. Wir wollen hier die allgemeine Lösung dieser Aufgabe bringen.

Die folgenden Betrachtungen sollen sich auf Richtungsmessungen beschränken, da etwaige Winkelmessungen vor der Ausgleichung zu Richtungssätzen vereinigt werden können.

I. Vorwärtseinschneiden.

a) *Vorwärtseinschneiden mit drei Strahlen.*

Der Punkt P (Fig. 1) soll durch die auf den koordinatenmäßig gegebenen Punkten P_1, P_2, P_3, gemessenen Richtungen R_1, R_2, R_3, bestimmt werden.

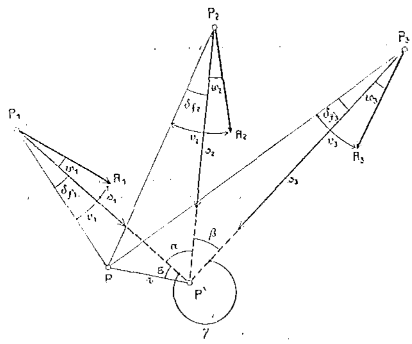

Fig. 1.

Der auf Grund der vorläufigen Koordinaten gegebene Punkt P' wird durch den Ausgleich eine Rückung nach P erfahren, wodurch die vorläufigen Südwinkel der Seiten $P' P_1$, $P' P_2$, $P' P_3$ Richtungsänderungen $\delta\varphi$ erleiden werden. Da die Rückung des Punktes nur klein sein soll, können wir setzen:

$$\delta\varphi_1 = \frac{r\rho}{s_1} \sin \varepsilon$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{r.\rho}{s_2} \sin (\varepsilon + \alpha) \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{r\rho}{s_3} \sin (\varepsilon + \alpha + \beta)$$

Die weitere Entwicklung ergibt:

$$\delta\varphi_1 s_1 = r\rho \sin \varepsilon$$

$$\delta\varphi_2 s_2 = r\rho (\sin \varepsilon \cos \alpha + \cos \varepsilon \sin \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

$$\delta\varphi_3 s_3 = r\rho (\sin \varepsilon \cos \alpha \cos \beta - \sin \varepsilon \sin \alpha \sin \beta +$$
$$+ \cos \varepsilon \sin \alpha \cos \beta + \cos \varepsilon \cos \alpha \sin \beta)$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung der Gruppe (2) mit $\sin \beta$, die zweite mit $\sin \gamma$ und die dritte mit $\sin \alpha$, wobei wir berücksichtigen, daß $\sin \gamma = - \sin (\alpha + \beta)$ ist, so gelangen wir zu den Gleichungen:

$$\delta\varphi_1 s_1 \sin \beta = r\rho \sin \varepsilon \sin \beta$$

$$\delta\varphi_2 s_2 \sin \gamma = r\rho (- \sin \varepsilon \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta - \sin \varepsilon \cos^2 \alpha \sin \beta -$$
$$- \cos \varepsilon \sin^2 \alpha \cos \beta - \cos \varepsilon \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta) \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

$$\delta\varphi_3 s_3 \sin \alpha = r\rho (\sin \varepsilon \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta - \sin \varepsilon \sin^2 \alpha \sin \beta +$$
$$+ \cos \varepsilon \sin^2 \alpha \cos \beta + \cos \varepsilon \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta)$$

Wir addieren nun die Gleichungen (3):

$$\delta\varphi_1 s_1 \sin \beta + \delta\varphi_2 s_2 \sin \gamma + \delta\varphi_3 s_3 \sin \alpha = r\rho [\sin \varepsilon \sin \beta - \sin \varepsilon \sin \beta (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)] \quad 4)$$

und schließlich erhalten wir:

$$\delta\varphi_1 s_1 \sin \beta + \delta\varphi_2 s_2 \sin \gamma + \delta\varphi_3 s_3 \sin \alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

oder:

$$\underline{\delta\varphi_1 s_1 \sin (\varphi_3 - \varphi_2) + \delta\varphi_2 s_2 \sin (\varphi_1 - \varphi_3) + \delta\varphi_3 s_3 \sin (\varphi_2 - \varphi_1) = 0} \quad \ldots \quad 6)$$

Dieser Satz setzt uns in die Lage, bei sämtlichen Aufgaben der trigonometrischen Punktbestimmung die Ausgleichung nach der Theorie der bedingten Beobachtungen anzuwenden.

Zunächst wollen wir den Fall annehmen, es seien nur drei äußere Richtungen gegeben. Zwischen den gerechneten vorläufigen Südwinkeln und den gemessenen Richtungswinkeln ergeben sich die Widersprüche:

$$w = \varphi - R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Um den Anforderungen der Ausgleichsrechnung zu genügen, müssen die vorläufigen Südwinkel solche Änderungen $\delta\varphi$ erfahren, daß

1. der Bedingung des Satzes (6) entsprochen und
2. die Quadratsumme der verbleibenden v ein Minimum wird.

Zwischen den Verbesserungen v und den Richtungsänderungen $\delta\varphi$ besteht folgende Beziehung:

$$\varphi + \delta\varphi = R + v \quad \ldots \quad 8)$$

oder: $$v = \varphi - R + \delta\varphi \quad \ldots \quad 9)$$

und mit Rücksicht auf 7):

$$v = w + \delta\varphi \quad \ldots \quad 10)$$

Wir erhalten für die 3 Strahlen:

$$\begin{aligned} v_1 - w_1 &= \delta\varphi_1 \\ v_2 - w_2 &= \delta\varphi_2 \quad \ldots \quad 11) \\ v_3 - w_3 &= \delta\varphi_3 \end{aligned}$$

Wenn wir nun wieder jede dieser Gleichungen mit dem zugehörigen s und dem sin $(\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1})$ multiplizieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} v_1 s_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - w_1 s_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) &= \delta\varphi_1 s_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \\ v_2 s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - w_2 s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) &= \delta\varphi_2 s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \quad \ldots \quad 12) \\ v_3 s_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - w_3 s_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) &= \delta\varphi_3 s_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Addiert, ergeben diese Gleichungen unter Hinweis auf den Satz 6):

$$\begin{aligned} & v_1 s_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + v_2 s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + v_3 s_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - w_1 s_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - \\ & - w_2 s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - w_3 s_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad \ldots \quad 13) \end{aligned}$$

Setzen wir:

$$\begin{aligned} s_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) &= a_1 \\ s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) &= a_2 \quad \ldots \quad 14) \\ s_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) &= a_3 \\ - a_1 w_1 - a_2 w_2 - a_3 w_3 &= W \end{aligned}$$

so gelangen wir zu der Bedingungsgleichung:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + W = 0 \quad \ldots \quad 15)$$

Nach der Theorie der bedingten Beobachtungen lautet die einzige Normalgleichung:

$$[aa]\, k + W = 0 \quad \ldots \quad 16)$$

$$\text{wobei } k = -\frac{W}{[aa]} \text{ ist} \quad \ldots \quad 17)$$

Auf Grund der ermittelten Korrelate k ergeben sich für die gesuchten Verbesserungen v folgende Werte:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 k \\ v_2 &= a_2 k \quad \ldots \quad 18) \\ v_3 &= a_3 k \end{aligned}$$

Für die Quadratsumme der v und den mittleren Fehler einer Beobachtung gelten die Formeln:

$$[vv] = k^2 [aa] \quad \ldots \quad 19)$$

$$m = \pm k \sqrt{[aa]} \quad \ldots \quad 20)$$

Eine kleine Vereinfachung des Rechnungsganges kann allenfalls dadurch erzielt werden, daß die vorläufigen Koordinaten genau nach dem Werte zweier gemessener Richtungen abgeleitet werden, wodurch zwei Widersprüche w Null werden.

Wir haben bisher gleich genaue Beobachtungen angenommen. Kommen den Beobachtungen ungleiche Gewichte p_1, p_2, p_3 zu, so wird die Normalgleichung lauten:

$$\left[\frac{aa}{p}\right] k + W = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

Die Formeln für die Verbesserungen werden die Form annehmen:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1}{p_1} k \\ v_2 &= \frac{a_2}{p_2} k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 22) \\ v_3 &= \frac{a_3}{p_3} k \end{aligned}$$

1. Beispiel: Vorwärtseinschneiden mit 3 Strahlen:

Nr.	R gemessen	φ gerechnet	$w = \varphi - R$	s	$\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1}$	$\sin(\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1})$	$a = s \cdot \sin$	$a w$	a^2	$v = ak$		vv
1	16°42′15″	16°42′06″	− 9″	3.2	255°26′	−0.97	−3.10	+27.90	9.61	$v_1 =$	−12″.65	160.02
2	61°14′24″	61°14′34″	+10″	2.9	60°02′	+0.87	+2.52	+25.20	6.35	$v_2 =$	+10″.28	105.68
3	316°40′03″	316°40′17″	+14″	2.6	44°32′	+0.70	+1.82	+25.48	3.31	$v_3 =$	+ 7″.43	55.20
					360°00′		$[aw] =$	+78.58	19.27			320.90

$$k = \frac{[aw]}{[aa]} = +4.08 \qquad m = \pm \sqrt{320.90} = \pm 17.91''$$

b) *Vorwärtseinschneiden mit mehr als 3 Strahlen.*

Sind zur Bestimmung des Punktes n Strahlen vorhanden, so werden nach der Anzahl der überschüssigen Beobachtungen $n-2$ Bedingungsgleichungen aufzustellen sein.

Damit die Strahlen R_1, R_2, R_3 sich nach der Ausgleichung in einem Punkte schneiden, ist die Bedingung des Satzes (13) zu erfüllen:

$$\begin{aligned} & v_1 s_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + v_2 s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + v_3 s_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \\ & \quad - w_1 s_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - w_2 s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - w_3 s_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{aligned}$$

Damit auch der Strahl R_4 durch denselben Punkt gehe, werden wir zwei Strahlen der ersten Gruppe (R_1, R_2, R_3) mit dem Strahle R_4 zu einer neuen Dreistrahlengruppe vereinigen. Diese Bedingung kann also etwa so geformt werden:

$$\begin{aligned} & v_1 s_1 \sin(\varphi_4 - \varphi_2) + v_2 s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_4) + v_4 s_4 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \\ & \quad - w_1 s_1 \sin(\varphi_4 - \varphi_2) - w_2 s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_4) - w_4 s_4 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{aligned}$$

Mit den Strahlen R_5, R_6 . . . . . . R_n verfahren wir in analoger Weise, wodurch sich die $n-2$ Bedingungsgleichungen ergeben:

$$
\begin{aligned}
a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + W_1 &= 0 \\
b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_4 v_4 + W_2 &= 0 \\
c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_5 v_5 + W_3 &= 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 23) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
l_1 v_1 + l_2 v_2 + l_n v_n + W_{n-2} &= 0
\end{aligned}
$$

Wir haben nur aus praktischen Gründen zwei sich günstig schneidende Richtungen für alle Gruppen beibehalten. Die Gruppierung zu je 3 Strahlen kann auch anders kombiniert werden, ist jedoch an die Bedingung geknüpft, daß in den $n-2$ Strahlengruppen jede Richtung mindestens einmal vorkommen muß.

Es ist noch die Frage zu erörtern, wann wir die bedingten Beobachtungen auf vermittelnde zurückführen sollen und wann es vorteilhafter erscheint, die Methode der Korrelaten anzuwenden.

Ist nur eine überschüssige Beobachtung gegeben, wird zweifellos stets das letztere Verfahren vorteilhafter sein, da wir in diesem Falle nur eine Normalgleichung aufzulösen haben. Bei r überschüssigen Stücken werden bei der Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen immer nur 2, bei der Korrelatenmethode jedoch r Normalgleichungen erforderlich sein. Dem Vorteile der Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen steht der Vorteil der Korrelatenmethode gegenüber, daß die Koeffizienten und absoluten Glieder der Normalgleichungen einfacher beschaffen sind. Wir glauben daher, daß für unseren speziellen Zweck beide Verfahren als gleichwertig angenommen werden können.

Wir wollen den Rechnungsvorgang für beide Fälle näher betrachten.

Nach der Korrelatenmethode werden die $n-2$ Normalgleichungen die Form annehmen:

$$
\begin{aligned}
&[aa]\,k_1 + [ab]\,k_2 + [ac]\,k_3 + \ldots + [al]\,k_{n-2} + W_1 = 0 \\
&[ab]\,k_1 + [bb]\,k_2 + [bc]\,k_3 + \ldots + [bl]\,k_{n-2} + W_2 = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 24) \\
&[al]\,k_1 + [bl]\,k_2 + [cl]\,k_3 \ldots \quad [ll]\,k_{n-2} + W_{n-2} = 0
\end{aligned}
$$

Hiebei ist:

$$
\begin{array}{llll}
a_1 = s_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) & b_1 = s_1 \sin(\varphi_4 - \varphi_2) & \ldots\ldots & l_1 = s_1 \sin(\varphi_n - \varphi_2) \\
a_2 = s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) & b_2 = s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_4) & & l_2 = s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_n) \\
a_3 = s_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & b_4 = s_4 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & & l_n = s_n \sin(\varphi_2 - \varphi_1)
\end{array}
$$

und

$$
\begin{aligned}
W_1 &= -w_1 a_1 - w_2 a_2 - w_3 a_3 \\
W_2 &= -w_1 b_1 - w_2 b_2 - w_4 b_4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
W_{n-2} &= -w_1 l_1 - w_2 l_2 - w_n l_n
\end{aligned}
$$

Nach Auflösung der Normalgleichungen erhalten wir die gesuchten Verbesserungen:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + d_1 k_4 + \ldots\ldots + l_1 k_{n-2} \\
v_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + d_2 k_4 + \ldots\ldots + l_2 k_{n-2} \\
v_3 &= a_3 k_1 \\
v_4 &= \qquad b_4 k_2 \\
v_5 &= \qquad\qquad c_5 k_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 25) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad l_n k_{n-2}
\end{aligned}
$$

Bei der Zurückführung der bedingten Beobachtungen auf vermittelnde werden wir die $n-2$ Bedingungsgleichungen durch v_1 und v_2 ausdrücken und für $v_1 = x$ und $v_2 = y$ setzen, so daß wir n neue Fehlergleichungen erhalten:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= x \\
v_2 &= \qquad y \\
v_3 &= -\frac{a_1}{a_3} x - \frac{a_2}{a_3} y - \frac{W_1}{a_3} \\
v_4 &= -\frac{b_1}{b_4} x - \frac{b_2}{b_4} y - \frac{W_2}{b_4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 26) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_n &= -\frac{l_1}{l_n} x - \frac{l_2}{l_n} y - \frac{W_{n-2}}{l_n}
\end{aligned}
$$

oder wenn wir für die Koeffizienten und absoluten Glieder einfachere Bezeichnungen einführen:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= x \\
v_2 &= \qquad y \\
v_3 &= A_1 x + B_1 y + W_1' \\
v_4 &= A_2 x + B_2 y + W_2' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_n &= A_{n-2} x + B_{n-2} y + W'_{n-2}
\end{aligned}
$$

Daraus ergeben sich die zwei Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
[AA]\, x + [AB]\, y + [AW'] &= 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 28) \\
[AB]\, x + [BB]\, y + [BW'] &= 0
\end{aligned}
$$

Nach Ermittlung von x und y werden die übrigen Unbekannten auf Grund der Fehlergleichungen (27) abgeleitet.

Bei ungleichen Gewichten ist in beiden Fällen in gewohnter Weise vorzugehen.

2. *Beispiel: Vorwärtseinschneiden mit 4 Strahlen (Korrelatenmethode).*

2. Beispiel: Vorwärtseinschneiden mit 4 Strahlen (Korrelatenmethode).

Nr.	R	φ	$w = \varphi - R$	s	$\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1}$ 1, 2, 3	$\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1}$ 1, 2, 4	$\sin(\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1})$ 1, 2, 3	$\sin(\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1})$ 1, 2, 4	$a = s. \sin$	$b = s. \sin$	a^2	b^2	ab	aw	bw	Normalgleichungen
1	259° 14′ 15.1″	259° 14′ 14.7″	−0.4″	4.9	65° 34′	194° 02′	+0.91	−0.24	+4.46	−1.18	19.89	1.39	−5.26	−1.78	+0.47	$26.74\,k_1 - 8.46\,k_2 + 5.63 = 0$
2	315 02 32.6	315 02 31.0	−1.6	2.0	238 38	110 10	−0.85	+0.94	−1.70	+1.88	2.89	3.53	−3.20	+2.72	−3.01	$-8.46\,k_1 + 8.27\,k_2 - 0.94 = 0$
3	20 36 50.0	20 36 46.7	−3.3	2.4	55 48		+0.83		+1.99		3.96			−6.57		$k_1 = -0.25$
4	149 04 12.3	149 04 14.2	+1.9	2.2		55 48		+0.83		+1.83		3.35			+3.48	$k_2 = -0.14$
					360 00	360 00					+26.74 $[aa]$	+8.27 $[bb]$	−8.46 $[ab]$	−5.63 $-W_1$	+0.94 $-W_2$	

$v =$	$a\,k_1 + b.\,k_2$	v	v^2
$v_1 =$	−1.11 + 0.17	−0.94	0.88
$v_2 =$	+0.42 − 0.26	+0.16	0.03
$v_3 =$	−0.50	−0.50	0.25
$v_4 =$	− 0.26	−0.26	0.07
		$[vv] =$	1.23

$m = \pm 0.79''$

3. Beispiel: Wie Beispiel 2 (Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen).

Fehlergleichungen	Bestimmungsgleichungen
$4.46\,v_1 - 1.70\,v_2 + 1.99\,v_3 + 5.63 = 0$	$v_1 = x$
$-1.18\,v_1 + 1.88\,v_2 + 1.83\,v_4 - 0.94 = 0$	$v_2 = y$
	$v_3 = -2.23x + 0.85y - 2.82$
$v_3 = \dfrac{-4.46v_1 + 1.70v_2 - 5.63}{1.99}$	$v_4 = 0.64x - 1.03y + 0.51$
$v_4 = \dfrac{1.18\,v_1 - 1.88\,v_2 + 0.94}{1.83}$	

Nr.	A	B	W'	AA	AB	AW'	BB	BW'
1	1	0	0	1.00	0.	0	0	0
2	0	1	0	0	0.	0	1.00	0
3	−2.23	+0.85	−2.82	4.97	−1.90	+6.29	0.72	−2.40
4	+0.64	−1.03	+0.51	0.41	−0.66	+0.33	1.06	−0.53
Normalgleichungen:				6.38	−2.56	+6.62	2.78	= −2.93
$6.38x - 2.56y + 6.62 = 0$								
$-2.56x + 2.78y - 2.93 = 0$				$v_1 =$	−0.98			= −0.98
$x = -0.98$				$v_2 =$	+0.15			= +0.15
$y = +0.15$				$v_3 =$	+2.19	+0.13	−2.82	= −0.50
				$v_4 =$	−0.63	−0.15	+0.51	= −0.27

(Fortsetzung folgt.)

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.
Redaktion:
Hofrat Prof. Dr. Ing., techn. et mont. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. K. Lego.

Nr. 5. Baden bei Wien, im November 1929. XXVII. Jahrg.

Die Punkteinschaltung mit Ausgleichsverfahren nach der Methode der bedingten Beobachtungen.

Von Hofrat Ing. ARTUR MORPURGO.

(Schluß.)

II. Rückwärtseinschneiden.

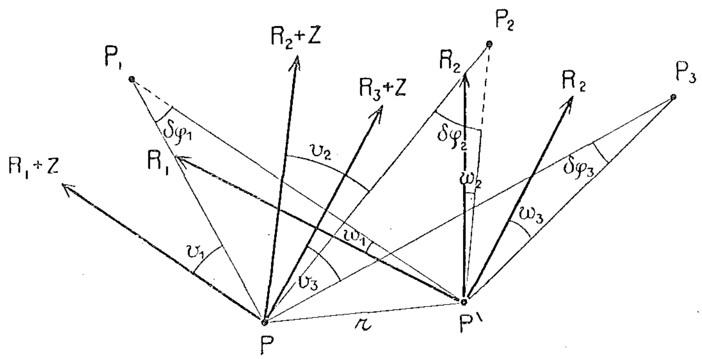

Fig. 2.

Der Punkt P (Fig. 2) soll aus n inneren Richtungen bestimmt werden. Nach Berechnung der vorläufigen Südwinkel können wir die Messungs- den Rechnungswerten gegenüberstellen und erhalten die Widersprüche:

$$\begin{aligned} w_1 &= \varphi_1 - R_1 \\ w_2 &= \varphi_2 - R_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1) \\ &\ldots\ldots \\ w_n &= \varphi_n - R_n \end{aligned}$$

Durch die Ausgleichung wird der Südwinkel φ die Änderung $\delta\varphi$ erfahren, die Richtung R wird infolge der noch erforderlichen Orientierung den Wert $R + Z$ annehmen. Die verbleibenden Fehler v werden mithin sein:

$$\begin{aligned} v_1 &= (\varphi_1 + \delta\varphi_1) - (R_1 + Z) \\ v_2 &= (\varphi_2 + \delta\varphi_2) - (R_2 + Z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= (\varphi_n + \delta\varphi_n) - (R_n + Z) \end{aligned}$$

Oder im Hinblicke auf die Gl. (1)

$$
\begin{aligned}
v_1 &= w_1 + \delta\varphi_1 - Z \\
v_2 &= w_2 + \delta\varphi_2 - Z \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_n &= w_n + \delta\varphi_n - Z
\end{aligned}
$$

Um der Bedingung zu entsprechen, daß nach der Ausgleichung sämtliche Richtungen in einem Punkte zusammentreffen müssen, werden wir in gewohnter Weise die n Strahlen in n—2 Gruppen zu je 3 Strahlen einteilen.

Wie vorher, wollen wir auch jetzt wieder zwei passende Richtungen, R_1 und R_2, für sämtliche Dreistrahlengruppen beibehalten, und zwar:

$$
\begin{array}{lll}
\text{1. Gruppe} & \text{2. Gruppe} & (n-2)\text{te Gruppe} \\
v_1 - w_1 + Z = \delta\varphi_1 & v_1 - w_1 + Z = \delta\varphi_1 \;\ldots\ldots & v_1 - w_1 + Z = \delta\varphi_1 \\
v_2 - w_2 + Z = \delta\varphi_2 & v_2 - w_2 + Z = \delta\varphi_2 & v_2 - w_2 + Z = \delta\varphi_2 \ldots \quad 4) \\
v_3 - w_3 + Z = \delta\varphi_3 & v_4 - w_4 + Z = \delta\varphi_4 & v_n - w_n + Z = \delta\varphi_n
\end{array}
$$

Multiplizieren wir die Gleichungen der ersten Gruppe der Reihe nach mit a_1, a_2, a_3, jene der zweiten mit b_1, b_2, b_4 . . . . und schließlich die Gleichungen der (n—2)ten Gruppe mit l_1, l_2, l_n, so gehen die Gl. (4) über in:

$$
\begin{array}{lll}
(v_1 - w_1 + Z)\,a_1 = \delta\varphi_1\,a_1 & (v_1 - w_1 + Z)\,b_1 = \delta\varphi_1\,b_1 \ldots & (v_1 - w_1 + Z)\,l_1 = \delta\varphi_1\,l_1 \\
(v_2 - w_2 + Z)\,a_2 = \delta\varphi_2\,a_2 & (v_2 - w_2 + Z)\,b_2 = \delta\varphi_2\,b_2 & (v_2 - w_2 + Z)\,l_2 = \delta\varphi_2\,l_2 \;.\; 5) \\
(v_3 - w_3 + Z)\,a_3 = \delta\varphi_3\,a_3 & (v_4 - w_4 + Z)\,b_4 = \delta\varphi_4\,b_4 & (v_n - w_n + Z)\,l_n = \delta\varphi_n\,l_n
\end{array}
$$

Werden die Gleichungen der ersten Gruppe addiert, erhalten wir die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 - a_1 w_1 - a_2 w_2 - a_3 w_3 + Z[a] = \\
\delta\varphi_1 a_1 + \delta\varphi_2 a_2 + \delta\varphi_3 a_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)
\end{aligned}
$$

Da wir für

$$
\begin{aligned}
a_1 &= s_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \\
a_2 &= s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \\
a_3 &= s_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)
\end{aligned}
$$

annehmen wollen, muß die rechte Seite der Gl. (6) Null ergeben.

Wenn wir für $-a_1 w_1 - a_2 w_2 - a_3 w_3 = W_1'$ setzen, so nehmen die n—2 Bedingungsgleichungen folgende Form an:

$$
\begin{aligned}
a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + W_1' + [a]\,Z &= 0 \\
b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_4 v_4 + W_2' + [b]\,Z &= 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad 7) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
l_1 v_1 + l_2 v_2 + l_n v_n + W'_{n-2}\,[l]\,Z &= 0
\end{aligned}
$$

Zum Zwecke der Elimination der Orientierungs unbekannten Z, dividieren wir zunächst die erste Gleichung durch $[a]$, die zweite durch $[b]$ und die letzte durch $[l]$, subtrahieren sodann der Reihe nach, die 2., 3., ... (n—2)te Gleichung von der ersten, wodurch wir zu n—3 neuen Bedingungsgleichungen gelangen, die Z-frei sind;

$$\left(\frac{a_1}{[a]} - \frac{b_1}{[b]}\right) v_1 + \left(\frac{a_2}{[a]} - \frac{b_2}{[b]}\right) v_2 + \frac{a_3}{[a]} v_3 - \frac{b_4}{[b]} v_4 + \frac{W_1'}{[a]} - \frac{W_2'}{[b]} = 0$$
$$\left(\frac{a_1}{[a]} - \frac{c_1}{[c]}\right) v_1 + \left(\frac{a_2}{[a]} - \frac{c_2}{[c]}\right) v_2 + \frac{a_3}{[a]} v_3 - \frac{c_5}{[c]} v_5 + \frac{W_1'}{[a]} - \frac{W_3'}{[c]} = 0 \quad . \quad . \quad 8)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\frac{a_1}{[a]} - \frac{l_1}{[l]}\right) v_1 + \left(\frac{a_2}{[a]} - \frac{l_2}{[l]}\right) v_2 + \frac{a_3}{[a]} v_3 - \frac{l_n}{[l]} v_n + \frac{W_1'}{[a]} - \frac{W'_{n-2}}{[l]} = 0$$

oder einfacher ausgedrückt:

$$A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + A_4 v_4 + W_1 = 0$$
$$B_1 v_1 + B_2 v_2 + B_3 v_3 + B_5 v_5 + W_2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 9)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_1 v_1 + K_2 v_2 + K_3 v_3 + K_n v_n + W_{n-3} = 0$$

Die $(n-3)$ Normalgleichungen sind:

$$[AA]\, k_1 + [AB]\, k_2 + [AC]\, k_3 + \ldots . \; [AK]\, k_{n-3} + W_1 = 0$$
$$[AB]\, k_1 + [BB]\, k_2 + [BC]\, k_3 + \ldots . \; [BK]\, k_{n-3} + W_2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[AK]\, k_1 + [BK]\, k_2 + [CK]\, k_3 + \ldots . \; [KK]\, k_{n-3} + W_{n-3} = 0$$

Nach Auflösung der Normalgleichungen werden die Verbesserungen v ermittelt:

$$v_1 = A_1 k_1 + B_1 k_2 + C_1 k_3 + \; . \; . \; . \; K_1 k_{n-3}$$
$$v_2 = A_2 k_1 + B_2 k_2 + C_2 k_3 + \; . \; . \; . \; K_2 k_{n-3}$$
$$v_3 = A_3 k_1 + B_3 k_2 + C_3 k_3 + \; . \; . \; . \; K_3 k_{n-3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11)$$
$$v_4 = A_4 k_1$$
$$v_5 = \qquad B_5 k_2$$
$$v_6 = \qquad\qquad C_6 k_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_n = \qquad\qquad\qquad K_n k_{n-3}$$

Sind nur vier innere Richtungen gegeben, wird die einzige Normalgleichung lauten:

$$[AA]\, k + W = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 12)$$

Für die v dienen die Gleichungen:

$$v_1 = A_1 k$$
$$v_2 = A_2 k \qquad [vv] = k^2 [AA]$$
$$v_3 = A_3 k \qquad m = \pm k \,.\, \sqrt{[AA]}$$

4. Beispiel: Rückwärtseinschneiden mit 4 Strahlen.

Wir wollen noch zeigen, daß wir den Fundamentalsatz für die Richtungsänderungen auch zum Zwecke der Lösung des einfachen Rückwärtseinschneidens verwenden können. Sind wir in der Lage, für den zu bestimmenden Punkt die vorläufigen Koordinaten auf 1 bis 2 m genau einer Karte zu entnehmen, so rechnen wir wieder die vorläufigen Südwinkel und ermitteln weiters die Widersprüche w.

4. Beispiel: Rückwärtseinschneiden mit 4 Strahlen.

Nr.	R	φ	$W = \varphi - R$	red $w = W - M$	s	$\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1}$		sin $(\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1})$		a	b	aw	bw
						1. Gr.	2. Gr.	1. Gr.	2. Gr.				
1	0° 00′ 00″	107° 44′ 00″	+107° 44′ 00″	+ 8″	1.9	34° 12′	178° 44′	+0.56	+0.02	+1.06	+0.04	+8.48	+0.32
2	32° 57′ 44″	140° 41′ 55″	44′ 11″	+19″	2.4	292° 50′		−0.92		−2.21		−41.99	
3	67° 09′ 38″	174° 53′ 30″	43′ 52″	0″	2.4	32° 58′	114° 06′	+0.54	+0.91	+1.30	+2.18	0	0
4	254° 54′ 20″	353° 37′ 44″	43′ 24″	−28″	1.9		67 10		+0.92		+1.75		−49.00
			175′27″	− 1″		360° 00′	360° 00′			+0.15	+3.97	−33.51	−48.68
			$M = +107°43'52''$							$[a]$	$[b]$	$-W_1'$	$-W_2'$

Nr.	$\frac{a}{[a]}$	$\frac{b}{[b]}$	$A = \frac{a}{[a]} - \frac{b}{[b]}$	AA	W	Normalgleichung	$v = AK$	vv
1	+ 7.07	+0.01	+ 7.06	49.85	$\frac{W_1'}{[a]} = +223.40$		$v_1 = -4.47$	19.98
2	−14.73		−14.73	216.97		$332.94\,k + 211.14 = 0$	$v_2 = +9.34$	87.24
3	+ 8.67	+0.55	+ 8.12	65.93	$\frac{W_2'}{[b]} = +\ 12.26$		$v_3 = -5.15$	26.52
4		+0.44	− 0.44	0.19		$k = -0.634$	$v_4 = +0.28$	0.08
			+ 0.01	332.94	$W = +211.14$		+9.62	133.82
							−9.62	
							Diff. ≦ 0.00	

$m = \pm\ 11.57''$

Wir haben vorhin gefunden:

$$v_1 = w_1 + \delta\varphi_1 - Z$$
$$v_2 = w_2 + \delta\varphi_2 - Z$$
$$v_3 = w_3 + \delta\varphi_3 - Z$$

Da aber bei Vorhandensein von nur 3 Strahlen v_1, v_2, v_3 Null werden müssen, erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} w_1 + \delta\varphi_1 &= Z \\ w_2 + \delta\varphi_2 &= Z \\ w_3 + \delta\varphi_3 &= Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

Und weiters:

$$\begin{aligned} w_1\,a_1 + \delta\varphi_1\,a_1 &= Z\,a_1 \\ w_2\,a_2 + \delta\varphi_2\,a_2 &= Z\,a_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14) \\ w_3\,a_3 + \delta\varphi_3\,a_3 &= Z\,a_3 \\ \hline [wa] + 0 \qquad &= Z\,[a] \end{aligned}$$

$$Z = \frac{[wa]}{[a]}$$

Die Richtungsänderungen werden betragen:

$$\left.\begin{aligned} \delta\varphi_1 &= Z - w_1 \\ \delta\varphi_2 &= Z - w_2 \\ \delta\varphi_3 &= Z - w_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

5. Beispiel: Rückwärtseinschneiden mit 3 Strahlen.

Nr.	R	φ	$W = \varphi - R$	red. $w = W - M$	$R_{n-1} - R_{n+1}$	$\sin R_{n-1} - R_{n+1}$	s	a	aw
1	136° 53′ 05″	135° 47′ 36″	−1° 05′ 29	− 2′11″	41° 03′	+0.6567	1.99	+ 1.307	− 171.22
2	161° 51′ 52″	160° 48′ 43″	−1° 03′ 09″	+ 9″	293° 58′	− 0.9138	1.87	− 1.709	− 15.38
3	202° 54′ 50″	201° 53′ 35″	−1° 01′ 15″	+2′03″	24° 59″	+0.4224	2.39	+ 1.010	+ 24.23
		$M =$ −1°03′18″	+ 1″					+ 2.317	+124.23
								− 1.709	−186.60
								+0.608	−62.37
								$[a]$	$[aw]$

$$Z = \frac{-62.37}{0.608} = -102.6'' = -1'\,43''$$

$$\delta\varphi_1 = Z - \text{red } w_1 = -1'43'' + 2'\,11'' = +\;\;28''$$
$$\delta\varphi_2 = Z - \text{red } w_2 = -1'43'' - \;\;9'' = -1'\,52''$$
$$\delta\varphi_3 = Z - \text{red } w_3 = -1'43'' - 2'\,03'' = -3'\,46''$$

Endgültige Südwinkel	
1	135° 48′ 04″
2	160° 46′ 51″
3	201° 49′ 49″

Wenn die vorläufigen Koordinaten von der richtigen Lage des Punktes erheblich abweichen, so wird der gefundene Wert Z nicht die richtige Orientierung ergeben können. Man müßte, um ein brauchbares Ergebnis zu erhalten, mit den gefundenen Richtungen neuerlich vorläufige Koordinaten ermitteln und den ganzen Rechnungsvorgang wiederholen, wodurch jeder Vorteil in Frage käme.

Die den gemessenen Richtungen entsprechende Lage des zu bestimmenden Punktes sei P (Fig. 3). Die einer Karte, deren Genauigkeit beschränkt ist, entnommenen Koordinaten des Punktes entsprechen der Lage P'.

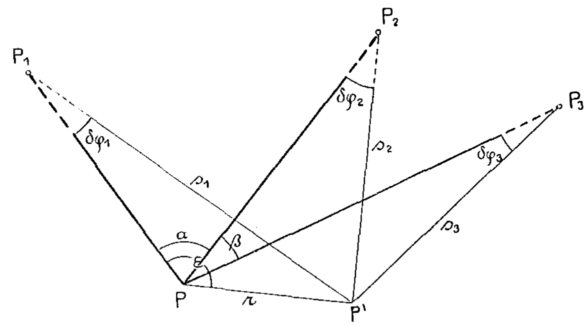

Fig. 3.

Sodann werden die vorläufigen Südwinkel φ_1, φ_2, φ_3 und die Länge der Seiten $P' P_1$, $P'P_2$, $P'P_3$ gerechnet.

Da die frühere Annahme, die Entfernung $PP' = r$ sei klein, hier entfällt, müssen wir den geänderten Verhältnissen Rechnung tragen.

Aus den Dreiecken $PP'P_1$, $PP'P_2$, $PP'P_3$ ergeben sich die Beziehungen:

$$\frac{s_1}{r} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta\varphi_1}$$
$$\frac{s_2}{r} = \frac{\sin(\varepsilon - \alpha)}{\sin \delta\varphi_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16)$$
$$\frac{s_3}{r} = \frac{\sin[\varepsilon - (\alpha + \beta)]}{\sin \delta\varphi_3}$$

Daraus ergeben sich nach Multiplikation mit $\sin \beta$ bzw. $\sin \gamma$, $\sin \alpha$ die Gleichungen:

$$\sin \delta\varphi_1 \, s_1 \sin \beta = r \, . \sin \varepsilon \sin \beta$$
$$\sin \delta\varphi_2 \, s_2 \sin \gamma = r (\sin \varepsilon \cos \alpha - \cos \varepsilon \sin \alpha) \, [-\sin(\alpha + \beta)] \quad \ldots\ldots \quad 17)$$
$$\sin \delta\varphi_3 \, s_3 \sin \alpha = r (\sin \varepsilon \cos \alpha \cos \beta - \sin \varepsilon \sin \alpha \sin \beta - \cos \varepsilon \sin \alpha \cos \beta -$$
$$- \cos \varepsilon \cos \alpha \sin \beta) \sin \alpha$$

Die weitere Entwicklung ergibt schließlich:

$$\underline{\sin \delta\varphi_1 \, s_1 \sin(R_3 - R_2) + \sin \delta\varphi_2 \, s_2 \sin(R_1 - R_3) + \sin \delta\varphi_3 \, s_3 \sin(R_2 - R_1) = 0} \, . \quad 18)$$

Aus den Gleichungen 15) erhalten wir:

$$\sin \delta\varphi_1 = \sin Z \cos w_1 - \cos Z \sin w_1$$
$$\sin \delta\varphi_2 = \sin Z \cos w_2 - \cos Z \sin w_2 \quad \ldots\ldots \quad 19)$$
$$\sin \delta\varphi_3 = \sin Z \cos w_3 - \cos Z \sin w_3$$

Für $s \, . \sin(R_{n-1} - R_{n+1}) = a$ gesetzt, schreiben wir:

$$\sin \delta\varphi_1 \, a_1 = \sin Z \, . \, a_1 \cos w_1 - \cos Z \, . \, a_1 \sin w_1$$
$$\sin \delta\varphi_2 \, a_2 = \sin Z \, . \, a_2 \cos w_2 - \cos Z \, . \, a_2 \sin w_2$$
$$\underline{\sin \delta\varphi_3 \, a_3 = \sin Z \, . \, a_3 \cos w_3 - \cos Z \, . \, a_3 \sin w_3} \quad \ldots\ldots \quad 20)$$
$$0 \qquad = \sin Z \, [a \cos w] - \cos Z \, [a \sin w]$$

Woraus wir zur Orientierungsunbekannten gelangen:

$$\operatorname{tg} Z = \frac{[a \sin w]}{[a \cos w]} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad 21)$$

Diese Formel gestattet uns, die endgültigen Südwinkel mit aller Schärfe auch dann abzuleiten, wenn die vorläufigen Koordinaten des zu bestimmenden Punktes mit einem bedeutenden Fehler behaftet sind. Wir können also die vorläufigen Koordinaten einer Karte entnehmen, ohne deren Genauigkeitsgrad beurteilen zu brauchen.

Während im Beispiel 5 die vorläufigen gegenüber den endgültigen Koordinaten Unterschiede von 1·86 *m* und 2·31 *m* aufweisen, betragen die bezüglichen Differenzen beim folgenden Beispiel 266·86 *m* und 497·69 *m*.

6. Beispiel: Rückwärtseinschneiden mit 3 Strahlen.

Nr.	R	φ'	$w = \varphi' - R$	$R_{n-1} - R_{n+1}$	log sin $(R_{n-1} - R_{n+1})$	log s (km)	log sin w	log cos w
1	136° 53′ 05″	149° 47′ 32″	+ 12° 45′ 27″	41° 02′ 58″	9.817 3736	0.347 6124	9.349 0399	9.988 8852
2	161° 51′ 52″	171° 19′ 43″	+ 9° 27′ 51″	293° 58′ 15″	9.960 8285n	0.356 3271	9.215 9832	9.994 0480
3	202° 54′ 50″	203° 03′ 27″	+ 0° 08′ 37″	24° 58′ 47″	9.625 6185	0.466 1891	7.399 0650	9.999 9986
				360° 00′ 00″				

Nr.	log a sin w	log a cos w	a sin w	a cos w	$\operatorname{tg} Z = \frac{[a \sin w]}{[a \cos w]}$
1	9.514 0259	0.153 8712	+ 0.326 6073	+ 1.425 1849	log $[a \sin w]$ = 8.064 3869n
2	9.533 1388n	0.311 2036n	− 0.341 3019	− 2.047 4042	log $[a \cos w]$ = 9.787 5880
3	7.490 8726	0.091 8062	+ 0.003 0965	+ 1.235 3957	log tg Z = 8.276 7989n
			+ 0.329 7038	+ 2.660 5806	
			− 0.341 3019	− 2.047 4042	$Z = -1^{0}05'01''$
			− 0.011 5981	+ 0.613 1764	

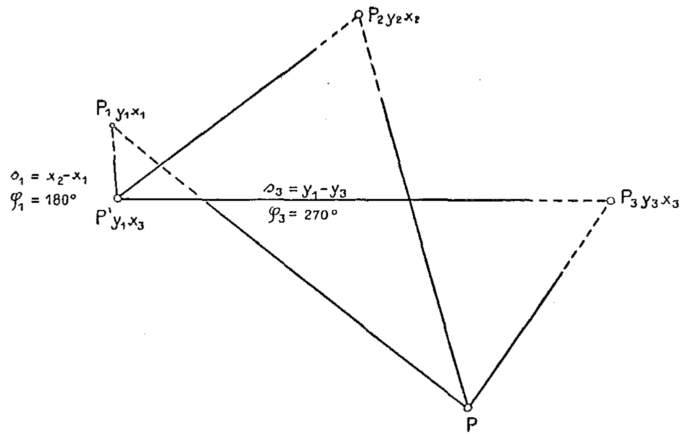

Fig. 4

Die hier erhaltene Orientierungsunbekannte stimmt mit jener des gleichlautenden Beispiels 5 vollkommen überein.

Wenn uns für die vorläufigen Koordinaten keine verläßlichen Werte zur Verfügung stehen — wie im Falle des Beispieles 6 — so wird es vorteilhaft sein, die vorläufigen Koordinaten willkürlich anzunehmen. Wird der in Fig. 4 angedeutete Vorgang eingehalten, so ersparen wir uns die Berechnung zweier vorläufiger Südwinkel und Seiten.

III. Vereintes Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden.

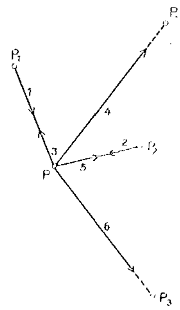

Fig. 5.

Der Punkt P (Fig. 5) soll durch m äußere und n innere Richtungen bestimmt werden. Wir haben $(m + n - 3)$ überschüssige Beobachtungen, weshalb wir ebensoviel Bedingungsgleichungen aufzustellen haben.

Es werden wieder die $m + n$ Richtungen in $(m + n - 2)$ Gruppen zu je 3 Strahlen eingeteilt, wobei zwischen äußeren und inneren Richtungen nur insofern zu unterscheiden ist, als die äußeren Richtungen mit $\pm$ 180^0 in die Rechnung einzuführen sind und bei den inneren Richtungen die noch zu erfolgende Orientierug zu berücksichtigen ist. Weiters ist zu beachten, daß Gegenrichtungen nicht derselben Gruppe angehören sollen.

Den Fall von Fig. 5 angenommen, werden wir die 6 Richtungen in folgende 4 Gruppen abteilen:

1.) 1, 4, 6   2.) 2, 4, 6   3.) 3, 4, 6 und 4.) 4, 5, 6.

Dementsprechend erhalten wir für die Verbesserungen iolgende Beziehungen:

1. Gruppe	2. Gruppe	3. Gruppe	4. Gruppe
$v_1 = w_1 + \delta\varphi_1$	$v_2 = w_2 + \delta\varphi_2$	$v_3 = w_3 + \delta\varphi_3 - Z$	$v_4 = w_4 + \delta\varphi_4 - Z$
$v_4 = w_4 + \delta\varphi_4 - Z$	$v_4 = w_4 + \delta\varphi_4 - Z$	$v_4 = w_4 + \delta\varphi_4 - Z$	$v_5 = w_5 + \delta\varphi_5 - Z$
$v_6 = w_6 + \delta\varphi_6 - Z$	$v_6 = w_6 + \delta\varphi_6 - Z$	$v_6 = w_6 + \delta\varphi_6 - Z$	$v_6 = w_6 + \delta\varphi_6 - Z$

Wir formen diese Gleichungen um:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 - a_1 w_1 \qquad\quad &= a_1 \delta\varphi_1 \\ a_4 v_4 - a_4 w_4 + a_4 Z &= a_4 \delta\varphi_4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2) \\ a_6 v_6 - a_6 w_6 + a_6 Z &= a_6 \delta\varphi_6 \end{aligned}$$

Wir addieren diese Gleichungen, wobei wir den Satz für die Richtungsänderungen berücksichtigen:

$$a_1 v_1 + a_4 v_4 + a_6 v_6 - a_1 w_1 - a_4 w_4 - a_6 w_6 + (a_4 + a_6) Z = 0$$

Die Bedingungsgleichungen werden also sein:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_4 v_4 + a_6 v_6 + W'_1 + (a_4 + a_6) Z &= 0 \\ b_2 v_2 + b_4 v_4 + b_6 v_6 + W'_2 + (b_4 + b_6) Z &= 0 \\ c_3 v_3 + c_4 v_4 + c_6 v_6 + W'_3 + [c] Z &= 0 \quad \ldots\ldots \quad 3) \\ d_4 v_4 + d_5 v_5 + d_6 v_6 + W'_4 + [d] Z &= 0 \end{aligned}$$

Die Gruppe 1 enthält die inneren Richtungen 4 und 6, die zweite 4 und 6, die dritte 3, 4 und 6, die vierte 4, 5 und 6. Wir können daher setzen:

$$(a_4 + a_6) = [a_i],\ (b_4 + b_6) = [b_i],\ [c] = [c_i] \text{ und } [d] = [d_i]$$

Nach Elimination der Orientierungsunbekannten Z erhalten wir die drei reduzierten Bedingungsgleichungen:

$$\frac{a_1}{[a_i]} v_1 - \frac{b_2}{[b_i]} v_2 + \left(\frac{a_4}{[a_i]} - \frac{b_4}{[b_i]}\right) v_4 + \left(\frac{a_6}{[a_i]} - \frac{b_6}{[b_i]}\right) v_6 + \\ + \frac{W'_1}{[a_i]} - \frac{W'_2}{[b_i]} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

$$\frac{a_1}{[a_i]} v_1 - \frac{c_3}{[c_i]} v_3 + \left(\frac{a_4}{[a_i]} - \frac{c_4}{[c_i]}\right) v_4 + \left(\frac{a_6}{[a_i]} - \frac{c_6}{[c_i]}\right) v_6 + \\ + \frac{W'_1}{[a_i]} - \frac{W'_3}{[c_i]} = 0$$

$$\frac{a_1}{[a_i]} v_1 + \left(\frac{a_4}{[a_i]} - \frac{d_4}{[d_i]}\right) v_4 - \frac{d_5}{[d_i]} v_5 + \left(\frac{a_6}{[a_i]} - \frac{d_6}{[d_i]}\right) v_6 + \\ + \frac{W'_1}{[a_i]} - \frac{W'_4}{[d_i]} = 0$$

oder:

$$\begin{aligned} A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_4 v_4 + A_6 v_6 + W_1 &= 0 \\ B_1 v_1 + B_3 v_3 + B_4 v_4 + B_6 v_6 + W_2 &= 0 \quad \ldots\ldots \quad 5) \\ C_1 v_1 + C_4 v_4 + C_5 v_5 + C_6 v_6 + W_3 &= 0 \end{aligned}$$

Daraus gehen die Normalgleichungen hervor:

$$\begin{aligned} [AA]\, k_1 + [AB]\, k_2 + [AC]\, k_3 + W_1 &= 0 \\ [AB]\, k_1 + [BB]\, k_2 + [BC]\, k_3 + W_2 &= 0 \\ [AC]\, k_1 + [BC]\, k_2 + [CC]\, k_3 + W_3 &= 0 \end{aligned}$$

Nach Ermittlung der Korrelaten k_1, k_2, k_3 werden die Verbesserungen v abgeleitet:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 k_1 + B_1 k_2 + C_1 k_3 \\ v_2 &= A_2 k_1 \\ v_3 &= B_3 k_2 \\ v_4 &= A_4 k_1 + B_4 k_2 + C_4 k_3 \\ v_5 &= C_5 k_3 \\ v_6 &= A_6 k_1 + B_6 k_2 + C_6 k_3 \end{aligned}$$

Zum Schlusse soll noch bemerkt werden, daß es genügt, s mit einer, sin $(\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1})$ mit zwei Dezimalstellen in die Rechnung einzuführen, wenn die

Seiten durchwegs über 1 *km* lang und die Widersprüche w verhältnismäßig klein sind. Andernfalls ist um je eine Dezimalstelle mehr zu nehmen. Die Winkel $(\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1})$ können auf Minuten abgerundet werden.

Eine Ausnahme hievon bildet naturgemäß der Fall, daß der Punkt aus 3 inneren Richtungen zu bestimmen ist und die vorläufigen Koordinaten nicht genügend genau ermittelt werden konnten.

Da wir hier mit besonders großen Differenzen zu rechnen haben, sind sämtliche Werte unabgerundet einzusetzen.

Das hier entwickelte Ausgleichsverfahren nach bedingten Beobachtungen wird in allen solchen Fällen jedem anderen Verfahren vorzuziehen sein, in denen lediglich eine überschüssige Beobachtung verfügbar ist, was bei der Kleintriangulierung sehr häufig vorkommt. In diesen Fällen werden wir mit einer einzigen Normalgleichung die bestmöglichen Werte rascher erhalten, als selbst bei Anwendung eines graphischen Verfahrens mit zweifelhaften Ergebnissen.

Referate.

Vortrag des Dr. F. Hopfner über „Die Reduktion von Bruns-Bowie".

Auf der Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft zu Dresden (3. bis 5. Oktober 1929) hielt der Chefastronom des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen Dr. F. Hopfner einen Vortrag über die Folgeerscheinungen, die sich bei der Berücksichtigung der bisher unbeachtet gebliebenen Reduktion von Bruns-Bowie bei der rechnerischen Bearbeitung der Schwerkraftmessungen für den Unterschied zwischen den ozeanischen und kontinentalen Schwerkraftwerten einstellen *). Der Vortrag wurde mit großer Aufmerksamkeit aufgenommen, da der Vortragende zeigte, daß die Berücksichtigung der genannten Reduktion die bisherigen Vorstellungen von der Schwerkraftverteilung auf der Erde von Grund auf ändert, wodurch sich neue Gesichtspunkte für die Beurteilung der Lehre von der Isostasie ergeben.

Literaturbericht.

1. Bücherbesprechung.

Bibliotheks-Nr. 722: Hay Alfred, Dr.: Die Photographie in Wissenschaft und Praxis. Ein Sammelwerk von A. E. Conrady, Ch. R. Davidson, Ch. R. Gibson, W. B. Hislop, F. C. V. Laws, J. H. G. Monnypenny, H. Moss, Geo. H. Rodmann, S. E. Sheppard, W. L. F. Wastell, Wilfred Mark Webb, Col. H. S. L. Winterbotham. Autorisierte deutsche Ausgabe. Mit 192 Abbildungen im Text und einem Bilderatlas als Anhang (XII, 532 Seiten 26×17 cm), Verlag Franz Deuticke, Leipzig und Wien 1929. Preis geh. M. 32.—, geb. M. 35.—.

Unstreitig ist die Photographie wegen ihrer absolut objektiven Darstellung ein geradezu unentbehrliches Hilfsmittel zahlreicher Wissenschaften geworden; beispielsweise der Astro-

*) Die Reduktion von Bruns-Bowie vermittelt den Übergang von der Niveaufläche (Geoid) auf das Niveausphäroid gleichen Potentialwertes. (Vergleiche F. Hopfner: „Zur Begründung der Lehre von der Isostasie", ferner „Über die Wirkung der Undulationen auf die Größe der scheinbaren Schwerkraftstörungen". Beide Abhandlungen sind erschienen in: „Gerlands Beiträge zur Geophysik, 22. Bd. 1929".)