Paper-ID: VGI_192906

Verwertung astronomischer Beobachtungen in einem trigonometrischen Netz

Hans S. Jelstrup [1]

[1] *Astronom der Norwegischen Landesaufnahme*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **27** (3), S. 33–37

1929

BibTeX:

```
@ARTICLE{Jelstrup_VGI_192906,
Title = {Verwertung astronomischer Beobachtungen in einem trigonometrischen
   Netz},
Author = {Jelstrup, Hans S.},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {33--37},
Number = {3},
Year = {1929},
Volume = {27}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.
Redaktion:
Hofrat Prof. Dr. Ing., techn. et mont. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. K. Lego.

Nr. 3. Baden bei Wien, im Juli 1929. XXVII. Jahrg.

Verwertung astronomischer Beobachtungen in einem trigonometrischen Netz.

Von Hans S. Jelstrup, Astronom der Norwegischen Landesaufnahme.

Werden in einem trigonometrischen Netz oder in einer Dreieckskette außer den geodätischen auch astronomische Beobachtungen durchgeführt, so kann man für das betreffende Gebiet ein Lotabweichungssystem berechnen.

Der Vorgang ist hiebei folgender*):

1. Man muß für das betreffende Land oder Gebiet einen festen Ausgangspunkt, einen „National Standard Datum" wählen und dessen definitive Lage durch Berechnung von φ, λ und α (Breite, Länge und Azimut) auf dem den Berechnungen zugrundegelegten (oder erst zu bestimmenden) Referenzellipsoid bestimmen. Dies geschieht durch eine astronomisch-geodätische Ausgleichung.

Auf Grund dieser Ausgleichung kann man auch, wenn man es für zweckmäßig findet, ein für das betreffende Land bestanschließendes Umdrehungsellipsoid berechnen.

Vor der Durchführung der Ausgleichung müssen die Lotstörungen nach „Topographie" und „Isostasie" korrigiert werden.

Ferner ist durch Variation der Residuen (Reste, Widersprüche) der Bedingungsgleichungen zu untersuchen, welche der Hayfordschen Alternativen (*B*, *E*, *H*, *G* oder *A*) für eine isostatische Kompensation im betrachteten Gebiet am plausibelsten ist.

Die Ausgleichung ist nach der sogenannten Arealmethode durchzuführen und kann durch folgendes Bild veranschaulicht werden:

Man denkt sich für das betrachtete Gebiet ein unendlich verkleinertes Modell des zugehörigen Geoidteiles mit allen seinen Erhebungen und Senkungen aus einem plastischen Stoff gebildet. Dieses Geoidflächenstück ist vom Netze begrenzt und durch die verteilt angeordneten astronomischen Punkte bestimmt.

---

* Vergl. a) Konferenz der Internationalen Erdmessung, Berlin 1886, Vorwort von Helmert. b) Geodesy, Figure of the Earth and Isostasy, von Hayford, Washington 1909.

Es besteht nun die Aufgabe, das betrachtete Referenzellipsoid auf eine solche Weise umzugestalten, daß es sich überall so nahe als möglich an das Geoid anschließt.

Der Ausgangspunkt erhält dadurch gewisse zu bestimmende Korrektionen (φ), (λ) und (α).

Die Bedingungsgleichungen erhalten dann die Form:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Breite:} & k_1(\varphi) + l_1(\lambda) + m_1(\alpha) + \varphi_A - \varphi' = D_M \\ \text{Länge:} & k_2(\varphi) + l_2(\lambda) + m_2(\alpha) + \cos\varphi'(\lambda_A - \lambda') = D_P \\ \text{Azimut:} & k_3(\varphi) + l_3(\lambda) + m_3(\alpha) - \operatorname{ctg}\varphi'(\alpha_A - \alpha') = D_{P'}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Hierin bedeuten φ_A, λ_A und α_A die in den astronomischen Stationen beobachteten astronomischen Werte, φ', λ' und α' dagegen die von der Ausgangsstation her geodätisch abgeleiteten Werte, welche Rechnungen auf einem bestimmten Ellipsoid, z. B. dem Hayfordschen oder dem Besselschen durchgeführt werden müssen. D_M ist die sich ergebende Meridianlotabweichung und D_P diejenige im ersten Vertikal.

Die letzten zwei Gleichungen von (1) enthalten das „Laplacesche Kriterium".

(φ), (λ) und (α) sind, wie schon erwähnt, die zu bestimmenden Korrektionen der geographischen Koordinaten des Ausgangspunktes.

Wenn diese Koordinatenkorrektionen sich mit großen Werten aus der Ausgleichung ergeben, kann es zweckmäßig werden, einen anderen, neuen Ausgangspunkt mit der Bedingung zu wählen, daß in ihm nach neuerlichem Ausgleich möglichst kleine Lotabweichungen bezüglich des zu berechnenden bestanschließenden Ellipsoids auftreten.

Für die Koeffizienten k, l und m, welche mit Hilfe der Werte des Ausgangspunktes und des trigonometrischen Netzes zu berechnen sind, hat Hayford besonders praktische Formeln gegeben und auch gezeigt, daß für den vorliegenden Zweck für die Berechnung geodätischer Linien eine genäherte Berechnung vollständig ausreicht.

Die Größen $\varphi_A - \varphi'$, $\cos\varphi'(\lambda_A - \lambda')$ und $\operatorname{cotg}\varphi'(\alpha_A - \alpha')$, welche die aufscheinenden Lotabweichungskomponenten vorstellen, stammen aus folgenden Quellen:

1. Aus der ungünstigen Wahl des Ausgangspunktes auf dem Referenzellipsoid.
2. Aus Fehlern der astronomischen Beobachtungen.
3. Aus Fehlern des trigonometrischen Netzes (Seitenlängen und Horizontalwinkel).
4. Aus den wirklichen Lotabweichungen.

Hayford sagt: „Eine genaue Untersuchung des Materiales der Vereinigten Staaten zeigt, daß die Lotabweichungen um vieles die Fehler der astronomischen und geodätischen Beobachtungen übersteigen".

Die Ausgleichung muß nun danach streben, die Abweichungen im Ausgangspunkt auf ein Minimum zu reduzieren, also $\Sigma D_M^2 + \Sigma D_P^2$ zu einem Minimum zu machen.

H a y f o r d zeigt weiter, wie die nach dem Ausgleich übrigbleibenden Reste abnehmen, wenn die Lotabweichungen bezüglich „Topographie" und „Isostasie" reduziert werden, wofür die von ihm verfaßten Formeln und „templates" äußerst praktisch sind.

Von dem Einfluß der geodätischen Netzfehler auf das Resultat der astronomisch-geodätischen Ausgleichung behauptet Hayford: „Die Fehler in der geographischen Länge haben nur einen geringen Anteil an der Bildung der Residuen. Die Residuen würden um weniger als $^1/_{10}$ verringert werden, wenn absolut genaue Längen eingesetzt werden würden".

Auch der Anteil, den die Fehler der Horizontalwinkel des trigonometrischen Netzes hervorrufen, ist, wie schon bemerkt, gewöhnlich klein im Verhältnis zu den Lotabweichungen.

Hiedurch werden wir auf den anderen wichtigen Zweck von astronomischen Beobachtungen im Netze geleitet, nämlich:

2. Die Kontrolle durch die astronomischen Laplaceschen Punkte für die geodätische Übertragung, indem jeder Laplacesche Punkt folgende Bedingungsgleichung gibt:

$$\cos \varphi' \, (\lambda_A - \lambda') = - \operatorname{ctg} \varphi' \, (\alpha_A - \alpha') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Residuen dieser Laplaceschen Gleichung sind nämlich, sowohl was Größe als Vorzeichen betrifft, in ausgezeichneter Weise dazu geeignet, um eine Untersuchung darüber anstellen zu können, ob im Netze eine Drehung (turnist) oder andere Fehleranhäufungen vorhanden sind.

In dem früher erwähnten Vorwort von H e l m e r t heißt es: „Diese Arbeiten über die Lotabweichungen verfolgen den Zweck einer systematischen Ausnützung derjenigen Kontrollen, welche sich durch Doppelbestimmung der ost-westlichen Lotabweichungskomponenten aus geographischer Länge und Azimut ergeben und in der Form der sogenannten Laplaceschen Gleichung auftreten. Diese Kontrollen gewinnen mit der Ausdehnung ....".

3. In einem Gebirgslande können die Lotabweichungen auch Einfluß auf Höhenmessung und Nivellement und sogar direkte praktische Bedeutung bei Tunnelabsteckungen usw. haben.

Von Bedeutung ist auch der schon erwähnte Umstand, daß geodätische und astronomische Beobachtungsfehler sowie auch ihre Anhäufungen im geodätischen Netz gegenüber den Lotabweichungen von relativ kleiner Größe sind und daß geodätische Fehleranhäufungen aus den Laplaceschen Gleichungen ersichtlich werden.

Betrachten wir jetzt, wie die Verhältnisse bei einer Landestriangulierung liegen, bei welcher die astronomischen Werte in die allgemeine Ausgleichung noch nicht einbezogen sind!

Man nimmt zuerst die Laplaceschen Punkte allein (und auch jene Punkte, auf welchen nur die astronomische Breite und das astronomische Azimut beobachtet worden sind), stellt das für diese Punkte am Anfang dieses Artikels erwähnte Gleichungssystem auf und gleicht es unter Berücksichtigung von „Topographie" und „Isostasie" aus. Dadurch werden die Korrektionen f ü r den bisherigen Koordinatenausgangspunkt (φ), (λ) und (α) erhalten, welche am Ausgangspunkt anzubringen sind, um die Lotabweichungen der übrigen Punkte so klein als möglich zu machen. Der bisherige Koordinatenanfangspunkt wird in diesem neuen System mit einer gewissen Lotabweichung auftreten müssen (und nicht mehr Null wie vorher sein, d. h. das Ellipsoid wird nicht mehr im Ausgangspunkt tangieren).

Jedenfalls haben dadurch der „Standard Datum" sowie die Laplaceschen Punkte ihre geodätischen Werte auf dem Ellipsoid erhalten — derart, daß die Unterschiede von den astronomischen Werten (d. s. die zurückbleibenden Lotabweichungsbeträge) so klein als möglich werden.

Man hätte nun auch noch weitergehen und aus der Ausgleichung der Laplaceschen Punkte ein neues Ellipsoid berechnen können, und zwar das günstigste für das betreffende Gebiet, so daß die übrigbleibenden Lotabweichungen noch kleiner würden.

Die astronomischen Punkte, auf welchen nur die Breite und das Azimut beobachtet worden sind, geben selbstverständlich ihren Beitrag zur Ausgleichung nur in der Form der ersten und der letzten der drei erwähnten Bedingungsgleichungen (1).

Figur 1 zeigt, wie sich die Lotabweichungen einer Schar gegebener Punkte durch die Ausgleichung ändern.

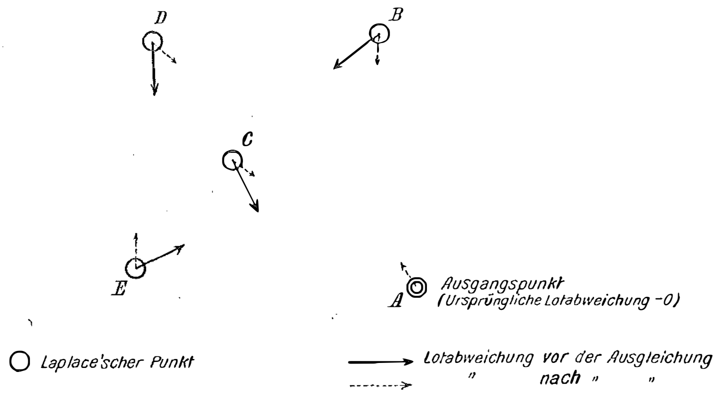

Fig. 1.

Wir sehen darin dargestellt, wie die Lotabweichungen durch die Ausgleichung verkleinert werden, während der Ausgangspunkt, der vor der Ausgleichung die Lotabweichung Null hatte, nach derselben mit einer gewissen Lotabweichung behaftet ist.

Wir haben nun endgültige, geodätische Werte für die Laplaceschen Punkte A, B, C, D, E (Fig. 1) erhalten, welche sich so wenig als möglich von den astronomischen Werten unterscheiden. Diese Punkte werden nun als künftige „junction points" aufzufassen sein und man kann nun in der Nähe eines jeden eine Verifikationsbasis anlegen.

Nun kommt der letzte Schritt der Ausgleichung, d. i. die Ausgleichung der einen jeden der verschiedenen Laplaceschen Punkte umgebenden geodätischen Sondernetze, für sich, wobei der geodätische Wert des Laplaceschen Punktes sowie der Basiswert festzuhalten ist. Dies ist eine rein geodätische Ausgleichung.

Das praktische Ergebnis des ganzen Verfahrens ist, daß alle möglichen Kontrollen für die Bestimmung der Grundpfeiler des Kartenwerkes verwendet worden sind und daß wir dadurch erreichen, daß überall die Abweichungen zwischen den Werten der Karte bezüglich Breite, Länge und Azimut von den tatsächlichen durch astronomische Beobachtung erhaltenen Werten so klein wie überhaupt möglich werden.

Abgekürzte Methoden zur Berechnung des mittleren Fehlers.

Von Senatsrat Ing. SIEGMUND WELLISCH.

1. Das Differenzverfahren.

Wählt man als Ausgangspunkt bei Berechnung des Argumentdurchschnittes oder arithmetischen Mittels A anstatt des gewöhnlich angenommenen Wertes Null denjenigen Wert L der vorliegenden Beobachtungen l, der dem gesuchten Mittelwert am nächsten zu liegen scheint, so stellt das arithmetische Mittel aller Abweichungen $a = l - L$, also

$$b = \frac{[p\,a]}{n}$$

die an L noch anzubringende Differenz oder Verbesserung dar, welche notwendig ist, um A zu erhalten, denn es ist

$$A = L + b.$$

Ist das Beobachtungsmaterial in Klassen mit gleichen Spielräumen eingeteilt, wie dies in meiner Abhandlung über „Praktische Untersuchungen in der Ausgleichungsrechnung" (Österr. Zeitschr. f. Verm. 1928, S. 71) des nähern ausgeführt wurde, dann werden die Differenzen oder Abweichungen a der Argumentwerte vom Ausgangswerte Vielfache des Klassenspielraumes sein und es werden daher nur kleine runde Zahlen bei den sonst durch die Vielstelligkeit der Faktoren beschwerlichen und unbequemen Multiplizierungen, Quadrierungen und Summierungen auftreten. Aus den drei Gleichungen für die

Abweichung der Beobachtung vom Ausgangspunkt . . . . $a = l - L$
Abweichung des arithm. Mittels vom Ausgangspunkt . . . . . $b = A - L$
Abweichung der Beobachtung vom arithm. Mittel . . . . $v = l - A$
ergibt sich die Beziehung . . . . $a = v + b$.
Durch Quadrierung erhält man . . . . $a^2 = v^2 + 2\,vb + b^2$,
die Summierung aller Einzelbeträge ergibt $[p\,aa] = [p\,vv] + 2\,b\,[p\,v] + b^2[p]$.
Beachtet man, daß $[pv] = 0$ und $[p] = n$ ist, so liefert die Division durch $n - 1$ die Gleichung

$$\frac{[paa]}{n-1} = \frac{[p\,vv]}{n-1} + \frac{n}{n-1}\,b^2.$$