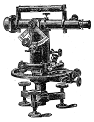


Die rechnerische Auswertung trigonometrischer Höhenmessungen

Hans Rohrer

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **27** (1), S. 2–12

1929

Es wird gewiß von allen freudigst begrüßt werden, daß das beigegebene Bildnis unseres verehrten Bundespräsidenten den Kollegen, die ihn bisher nur aus seinem Wirken als Förderer unseres Faches kennen und dankbarst verehren, nun auch Gelegenheit gibt, ihn im Bilde dauernd zu besitzen.

Die rechnerische Auswertung trigonometrischer Höhenmessungen.

Von Ing. HANS ROHRER.

Für die Auswertung der auf trigonometrischem Wege bestimmten Höhenunterschiede wird für gewöhnlich die Formel

$$\triangle H = s \operatorname{ctg} z + \frac{1-k}{2r} s^2 + J - V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 1)$$

verwendet, worin $\triangle H$ den Höhenunterschied, s die Seitenlänge, z die gemessene Zenitdistanz, k den Refraktionskoeffizient, r den mittleren Krümmungsradius, J die Instrumenthöhe und V die Zielhöhe bedeuten.

Die Formel genügt auch überall dort, wo es sich um geringe Höhenunterschiede und um Vermessungsgebiete handelt, deren absolute Seehöhe nicht beträchtlich ist. Sie ist auch dort am Platze, wo die Lagebestimmung der trigonometrischen Punkte mit derartigen Unsicherheiten behaftet ist, daß ein genaueres Rechnen praktisch keinen Zweck hätte, wie dies teilweise bei der alten Katastertriangulierung der Fall ist.

Bei den trigonometrischen Höhenbestimmungen im Zuge der Neutriangulierungen haben die trigonometrischen Punkte jedoch einen so geringen Punktlagefehler, daß die Verwendung dieser Näherungsformel nicht zulässig erscheint. Des weiteren ist gerade Österreich zum größten Teil ein Gebirgsland, in welchem die trigonometrischen Punkte ganz beträchtliche Seehöhen erreichen und auch relative Höhenunterschiede von mehr als 1000 *m* zwischen benachbarten Triangulierungspunkten nicht selten auftreten.

Die Formel 1) wird in den zuletzt genannten Fällen wie aus den im Anschlusse berechneten Beispiel hervorgeht, nicht entsprechen und es ist notwendig, auf die von Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, II. Band, 8. Auflage, Seite 612 und 613 abgeleitete erweiterte Formel

$$\triangle H = \left(1 + \frac{H_m}{r}\right) a \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2r} \frac{a^2}{\cos^2 \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

zurückzugreifen, die nach Einsetzen der Werte $a = s$ und nach Einführung der Zenitdistanz $z = 90 - \alpha$ für den Höhenwinkel α sowie Hinzufügung der Werte für die Instrument- und Zielhöhe übergeht in

$$\triangle H = \left(1 + \frac{H_m}{r}\right) s \operatorname{ctg} z + \frac{1-k}{2r \sin^2 z} s^2 + J - V \quad . \; . \; . \; . \; . \; 3)$$

Hierin bedeutet H_m die mittlere Meereshöhe der beiden Triangulierungspunkte, deren Höhenunterschied bestimmt werden soll, also $\frac{H_A + H_B}{2}$.

Diese Formel berücksichtigt bereits die Höhenlage des Meßgebietes und den Einfluß eines größeren Höhenwinkels, auf die Ermittlung des Höhenunterschiedes. Sie wäre anwendbar, wenn die Länge der Seite, die aus der vorhergehenden Koordinatenausgleichung im konformen Meridianstreifensystem bekannt ist, der wahren sphärischen Länge entsprechen würde. Durch die Abbildung in der konformen Projektion erleidet die Seite aber eine Vergrößerung, deren Verhältnis in erster Näherung gleich $m = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2}$ gesetzt werden kann.

Die Vergrößerung kann am Rande des Meridianstreifens bei einem Längenunterschied von $1^1/_2{}^0$ vom Bezugsmeridian d. s. im Bereich von Österreich ungefähr 115 *km* schon den Wert von 0·16 *m* für 1000 *m* Seitenlänge erreichen. Da die Koordinaten der Triangulierungspunkte noch $^1/_2{}^0$ über die normale Streifenbreite hinaus berechnet werden müssen, kann es eintreten, daß für die Höhenrechnung Seitenlängen zur Verfügung stehen, die aus Koordinaten abgeleitet sind, welche bis zu 2^0 d. s. rund 150 *km* vom Bezugsmeridian entfernt sind. Ihre Verzerrung würde schon 0·28 *m* für 1000 *m* Seitenlänge betragen. Derselbe Fehler würde bei einem aus einer so weit entfernten Seite berechneten relativen Höhenunterschied von 1000 *m* entstehen.

Solche und noch größere Höhenunterschiede kommen im Gebirge besonders gegenüber den auf Hängen und im Tale gelegenen trigonometrischen Punkten häufig vor, also gerade gegen solche Punkte, die den Anschluß an das Präzisions-Nivellement vermitteln sollen.

Um genauere Höhenwerte zu erhalten, muß die Seite s, wie sie aus der Berechnung in dem konformen Meridianstreifen hervorgeht, durch das Vergrößerungsverhältnis m dividiert werden.

Die Formel 3) geht über in

$$\triangle H = \frac{1 + \frac{H_m}{r}}{1 + \frac{y^2_m}{2\,r^2}}\, s \operatorname{ctg} z + \frac{1-k}{2\,r \sin^2 s}\, s^2 + J + V^{*)} \quad \ldots \quad 4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Bezeichnet man den Wert } \dfrac{1 + \frac{H_m}{r}}{1 + \frac{y^2_m}{2\,r^2}}\, s = S \\[2ex] \qquad\qquad\qquad \text{und } \dfrac{1-k}{2\,r} = q \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

so erhält man die vollständige Formel in einfacherer Darstellung

$$\triangle H = S \operatorname{ctg} z + \frac{q}{\sin^2 z}\, s^2 + J - V \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Zur Erleichterung der Auswertung der Formel auf logarithmischem Wege können die nachstehenden Tabellen I, II und III verwendet werden.

Tabelle I und II sind bis auf Einheiten der 7. logarithmischen Dezimale gegeben, da die Seitenlänge auch auf soviel Stellen aus der vorhergegangenen Berechnung bekannt ist.

---

*) y_m ist darin die mittlere Entfernung der Seite vom Bezugsmeridian.

Die Tabellen sind für eine mittlere Breite von Österreich ($\varphi = 47^0\,45'$ mit dem mittleren Krümmungshalbmesser von $\log r = 6.804\,7804$) zusammengestellt worden. Strenge genommen sollte für genauere Rechnungen der Krümmungshalbmesser für das betreffende Azimut benützt werden; doch macht der Fehler im zweiten Glied der Formel 6) der durch die Einführung eines mittleren Krümmungshalbmessers für das zirka $2^2/_3$ Breitengrade umfassende Österreich bei Seiten unter 10 *km*, wie sie bei der trigonometrischen Höhenmessung nur verwendet werden sollen, etwas über 1 *cm* aus.

Tabelle I enthält den Logarithmus des Ausdruckes $\left(1 + \frac{H_m}{r}\right)$, der zum Logarithmus der Seite stets zu addieren ist, in Abstufungen von 100 zu 100 *m*. Eine Seitentafel dient zur Interpolation der Zehnermeter.

Tabelle II enthält den Logarithmus $\left(1 + \frac{y^2_m}{2\,r^2}\right)$ für die in Kilometer angegeben mittlere Entfernungen y_m der Seiten vom Bezugsmeridian von 1—150 *km*, was ungefähr einer Längendifferenz von 2^0 entspricht. Diese Verbesserung ist von dem Seitenlogarithmus zu subtrahieren.

Unter Benützung dieser Behelfe läßt sich der Ausdruck $S \operatorname{ctg} z$ rasch berechnen (s. Beispiel am Schlusse).

Tabelle I.

H_m in *m*	$\log\left(1+\frac{H_m}{r}\right)$	H_m in *m*	$\log\left(1+\frac{H_m}{r}\right)$	H_m in *m*	$\log\left(1+\frac{H_m}{r}\right)$	H_m in *m*	$\log\left(1+\frac{H_m}{r}\right)$
0	0.000 0000	1000	0.000 0681	2000	0.000 1362	3000	0.000 2042
100	68	1100	749	2100	1430	3100	2110
200	136	1200	817	2200	1498	3200	2179
300	204	1300	885	2300	1566	3300	2247
400	272	1400	953	2400	1634	3400	2315
500	340	1500	1021	2500	1702	3500	2383
600	409	1600	1089	2600	1770	3600	2451
700	477	1700	1157	2700	1838	3700	2519
800	545	1800	1225	2800	1906	3800	2587
900	613	1900	1294	2900	1974	3900	2655
1000	681	2000	1362	3000	2042	4000	2723

Interpolationstafel zu Tabelle I.

H_m in *m*	$\log\left(1+\frac{H_m}{r}\right)$	H_m in *m*	$\log\left(1+\frac{H_m}{r}\right)$
10	0.000 0007	60	0.000 0041
20	14	70	48
30	20	80	55
40	27	90	61
50	34	100	68

Tabelle II

y_m in km	$\log\left(1+\frac{y_m^2}{2r^2}\right)$	y_m in km	$\log\left(1+\frac{y_m^2}{2r^2}\right)$	y_m in km	$\log\left(1+\frac{y_m^2}{2r^2}\right)$	y_m in km	$\log\left(1+\frac{y_m^2}{2r^2}\right)$	y_m in km	$\log\left(1+\frac{y_m^2}{2r^2}\right)$
1	0.000 0000	31	0.000 0051	61	0.000 0199	91	0.000 0442	121	0.000 0781
2	0	32	55	62	205	92	452	122	794
3	1	33	58	63	212	93	462	123	807
	1	34	62	64	219	94	472	124	820
5	1	35	65	65	225	95	482	125	834
6	2	36	69	66	232	96	492	126	847
7	3	37	73	67	240	97	502	127	861
8	3	38	77	68	247	98	512	128	874
9	4	39	81	69	254	99	523	129	888
10	5	40	85	70	262	100	534	130	902
11	0.000 0007	41	0.000 0090	71	0.000 0269	101	0.000 0544	131	0.000 0916
12	8	42	94	72	277	102	555	132	930
13	9	43	99	73	284	103	566	133	944
14	11	44	103	74	292	104	577	134	958
15	12	45	108	75	300	105	588	135	972
16	14	46	113	76	308	106	600	136	987
17	15	47	118	77	316	107	611	137	1002
18	17	48	123	78	325	108	622	138	1016
19	19	49	128	79	333	109	634	139	1031
20	21	50	133	80	342	110	646	140	1046
21	0.000 0024	51	0.000 0139	81	0.000 0350	111	0.000 0657	141	0.000 1061
22	26	52	144	82	359	112	669	142	1076
23	28	53	150	83	368	113	681	143	1091
24	31	54	156	84	377	114	693	144	1106
25	33	55	161	85	386	115	706	145	1122
26	36	56	167	86	395	116	718	146	1137
27	39	57	173	87	404	117	730	147	1153
28	42	58	180	88	413	118	743	148	1169
29	45	59	186	89	423	119	756	149	1185
30	48	60	192	90	432	120	768	150	1201

Zur Auswertung des Gliedes $\frac{q}{\sin^2 s} \cdot s^2$ empfiehlt es sich für Österreich jenen Wert von k zu benützen, den Major Hartl des ehemaligen Militärgeographischen Institutes auf Grund der in verschiedenen Seehöhen durchgeführten Beobachtungen empirisch mit

$$k = 0{\cdot}1470 - 0{\cdot}0008\left(\frac{H_m}{100}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

für die Mittagsstunden in den österreichischen Alpenländern gefunden hat. (s. Mitteilungen des Militärgeographischen Institutes, IV. Band, 1884, Seite 173).

Auf Grund der vorstehenden Formel sind die in Tabelle III ausgewiesenen Worte von k und die daraus abgeleiteten von $\log q$ für dieselbe Mittelbreite von Österreich ($\varphi = 47^0\,45'$ und $\log r = 6.80478$) berechnet worden. Trotzdem die Berechnung des Gliedes in der Formel 6) auf logarithmischem Wege unter

Benützung der Tabelle III verhältnismäßig rasch von statten geht, wäre eine Vereinfachung der Rechenarbeit bei den vorkommenden Massenberechnungen sehr erwünscht. Durch die immer mehr fortschreitende Einführung des Maschinenrechnens werden in den meisten Fallen die Längen der Seiten aus der vorhergehenden Berechnung numerisch und nicht in Logarithmen zur Verfügung stehen.

Tabelle III.

H^m in m	k	log q	H^m in m	k	log q
0	0.1470	2.82514—10	2000	0.1310	2.83321—10
100	0.1462	2.82555	2100	0.1302	2.83361
200	0.1454	2.82595	2200	0.1294	2.83401
300	0.1446	2.82636	2300	0.1286	2.83441
400	0.1438	2.82677	2400	0.1278	2.83481
500	0.1430	2.82717	2500	0.1270	2.83520
600	0.1422	2.82758	2600	0.1262	2.83560
700	0.1414	2.82798	2700	0.1254	2.83600
800	0.1406	2.82839	2800	0.1246	2.83640
900	0.1398	2.82879	2900	0.1238	2.83679
1000	0.1390	2.82919—10	3000	0.1230	2.83719—10
1100	0.1382	2.82960	3100	0.1222	2.83759
1200	0.1374	2.83000	3200	0.1214	2.83798
1300	0.1366	2.83040	3300	0.1206	2.83838
1400	0.1358	2.83080	3400	0.1198	2.83877
1500	0.1350	2.83121	3500	0.1190	2.83917
1600	0.1342	2.83161	3600	0.1182	2.83956
1700	0.1334	2.83201	3700	0.1174	2.83995
1800	0.1326	2.83241	3800	0.1166	2.84035
1900	0.1318	2.83281	3900	0.1158	2.84074
2000	0.1310	2.83321—10	4000	0.1150	2.84113—10

Dann erfordert aber die Ausrechnung der verbesserten Seite S als auch die des zweiten Gliedes in der Formel 6) einen nicht unwesentlichen Zeitaufwand, der bei Massenberechnungen ins Gewicht fällt.

Aus diesem Grunde wurde daran gedacht auch hier eine Vereinfachung der Rechenarbeit zu erreichen. Da sich Tabellen für die numerische Rechnung nicht so gut eignen, wie bei der logarithmischen Rechnung, ist zur graphischen Berechnung gegriffen worden. Die beiliegende Rechentafel enthält ein Diagramm, aus welchem die Größen der Seiten-Verbesserungen infolge der Meereshöhe und der Projektion im Maßstab 1 : 25 entnommen und abgelesen werden können.

Zu diesem Behufe war es notwendig die Formeln 5) und 6) für das numerische Rechnen etwas umzugestalten. Schreibt man $\dfrac{1+\dfrac{H_m}{r}}{1+\dfrac{y^2_m}{2r^2}} \cdot s = S$ in der Form $S = \left(1+\dfrac{H_m}{r}\right)\left(1+\dfrac{y^2_m}{2r^2}\right)^{-1} \cdot s$, wird entwickelt und die Multiplikation unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Kleinheitsordnung ausgeführt, so erhält man

$$S = \left(1 + \frac{H_m}{r} - \frac{y^2_m}{2r^2}\right) . s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8)$$

Außerdem kann der Ausdruck q für eine beliebige Höhenlage dargestellt werden durch

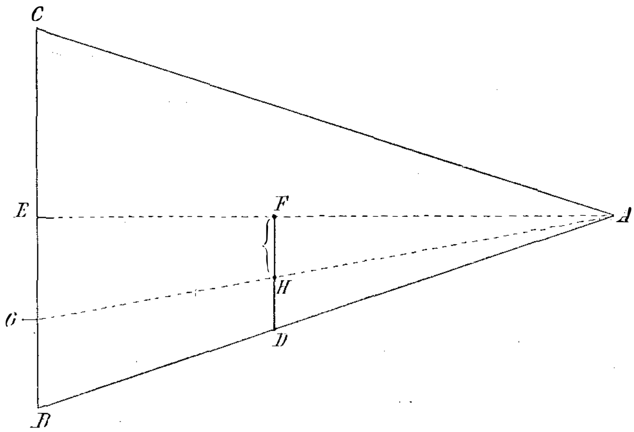
$$q = q_0 f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 9)$$

worin q_0 mit dem Wert von k_0 für den Meesresspiegel berechnet ist.

Die Formel 6) stellt sich mit den durchgeführten Änderungen nunmehr dar

$$\triangle H = S \operatorname{ctg} z + \frac{q_0 f}{\sin^2 z} s^2 + J - V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10)$$

Das vorher erwähnte Diagramm zur Berechnung der Verbesserung $\left(\frac{H_m}{r} - \frac{y^2_m}{2\,r^2}\right) s$ ist ähnlich wie das im österreichischen Kataster gebräuchliche Horskysche Diagramm angelegt.



Figur 1.

Auf der geraden AB ist die Teilung für die Seiten von 0—10 km im Maßstab 1 : 25.000 angebracht. BC enthält auf der Innenseite eine gleichmäßige Teilung im Maßstab 1 : 25 mit den Werten $\frac{H_m}{r}$ für 10 km Seitenlänge von 0—4000 m Meereshöhe von 100 zu 100 m abgestuft.

Auf der Außenseite von BC ist eine ungleichmäßige Teilung mit den Werten $\frac{y^2_m}{2\,r^2}$ 10.000 im Maßstab 1 : 25 aufgetragen und nach y_m in K lometer beziffert.

Die Ermittlung der Verbesserung geschieht in der Weise, daß man bei der gegebenen Seitenlänge s (D in der Zeichnung) in das Diagramm eingeht und bei der mittleren Höhe E der gegebenen Seite den Punkt F auf der Verbindungslinie EA und der Parallelen durch D zu BC sucht. Der Wert DE im beigegebenen Maßstab 1 : 25 abgegriffen gibt die Verbesserung $\frac{H_m}{r}$ für die betreffende Seitenlänge wegen ihrer mittleren Höhenlage.

Die Richtigkeit der Bestimmung ergibt die einfache Proportion

$$AB : AD = BE : DF$$

oder $\quad DF = \dfrac{AD \,.\, BE}{AB}$

und da $AB = 10.000\ m$ im Maßstab 1 : 25.000

$AD = s\ m$ im Maßstab 1 : 25.000

ferners $BA = \dfrac{H_m}{r} \cdot \dfrac{10.000}{25}$ gemacht wurde,

so ist

$$DF = \frac{\dfrac{H_m}{r} \cdot \dfrac{10.000}{25} \cdot \dfrac{s}{25.000}}{\dfrac{10.000}{25.000}} = \frac{H_m}{r} \cdot \frac{s}{25} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

d. h. man erhält das Verbesserungsglied im Maßstab 1 : 25.

Analog wird die Verbesserung $\dfrac{y^2_m}{2\,r^2}$ gewonnen. Man geht bei der Seitenlänge s in das Diagramm ein, sucht auf der äußeren Randteilung bei G die mittlere Entfernung y_m der gegebenen Seite vom Bezugmeridian auf und bestimmt sich durch Schätzung in das Liniennetz den Schnitt H mit der Geraden DF.

Hier erhält man aus der Proportion

$$DH = \frac{AD \,.\, BG}{AB}$$

AB und AD sind von der früheren Ermittlung bekannt.

$$BG = \frac{y^2_m}{2r^2} \cdot \frac{10.000}{25}$$

und daraus folgt nach Einsetzung der Werte und Kürzung

$$DH = \frac{y^2_m}{2r^2} \cdot \frac{s}{25} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Auch hier bekommt man den Wert DH durch Ablesen der mit dem Zirkel entnommenen Strecke auf dem Maßstab 1 : 25.

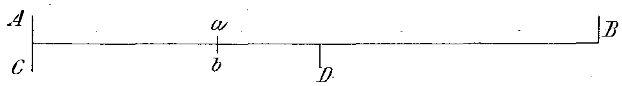
Es ist aber nicht notwendig, jede Verbesserung für sich getrennt zu ermitteln. Man wird zuerst in das Diagramm eingehen und auf die geschilderte Art den Punkt F aufsuchen und dort eine Zirkelspitze einsetzen. Dann sucht man mit der zweiten Zirkelspitze den Punkt H auf. Die Strecke FH stellt die Gesamtverbesserung $\left(\dfrac{H_m}{r} - \dfrac{y_m}{2r^2}\right) s$ vor, deren Wert aus dem Maßstab 1 : 25 zu entnehmen ist. Sie ist positiv und negativ an der gegebenen Seite anzubringen je nachdem $\dfrac{H_m}{r}$ oder $\dfrac{y^2_m}{2r^2}$ überwiegt.

Bei Seiten unter 1 *km* ist es vorteilhaft mit dem zehnfachen Wert der Seiten in das Diagramm einzugehen, dann ist das erhaltene Ergebnis durch 10 zu dividieren. In analoger Art kann bei ausnahmsweise vorkommenden Seiten von über 10 *km* Länge mit dem halben Wert von s in das Diagramm eingegangen werden. Das erhaltene Ergebnis ist dann doppelt zu nehmen. Hiemit wäre die Berechnung des ersten Gliedes in Formel 10) vorbereitet. Der Wert S ist mit ctg z zu multiplizieren, welcher Wert einer trigonometrischen Tafel entnommen wird*).

Um eine Berechnung des zweiten Gliedes in Formel 10) vollständig ersparen zu können, ist nach einer Anregung des Vermessungskommissärs Ing. Eberwein ein weiterer Rechenbehelf nach dem Prinzip des logarithmischen Rechenschiebers in Skala I und II der Rechentafel entworfen worden.

Skala I besteht aus zwei logarithmischen Leitern. Direkt oberhalb des unteren Randstriches des Teilungsfeldes (s-Teilung) sind die Logarithmen der Zahlen von 1—10 derart aufgetragen, daß der ganzen Teilung 500 *mm* entsprechen. Wegen dieser großen Länge ist die Skala in zwei Reihen und wegen der noch folgenden Berücksichtigung des Ausdruckes $\frac{f}{\sin^2 z}$ auch teilweise übergreifend angeordnet. Die Bezifferung ist derart, daß bei den Logarithmen die zugehörigen Nummern stehen, doch beginnt die Teilung mit $s = 1000$ und läuft über $s = 10.000$ hinaus.

Unter dem Strich ist eine zweite logarithmische Teilung ($q_0\, s^2$), deren Länge nur 250 *mm*, also halb so groß ist, wie die s-Teilung.



Figur 2.

Man denke sich die beiden Teilungen so gegenübergestellt, daß die Anfangspunkte zusammenfallen. Die Bezifferung in der oberen Teilung sei a, jene der unteren Teilung b. Der Lesung a auf der oberen Teilung entspricht ein log a in dieser Teilung. In der unteren Teilung steht der Lesung a die Lesung b gegenüber. Dieser Zahl entspricht ein log b. Da die obere Teilung in doppelten Einheiten der unteren Teilung angelegt ist, so entspricht $\log b = 2 \log a$ und daraus $b = a^2$ oder für $a = s$ gesetzt $b = s^2$. Wenn der Wert $q_0\, s^2$ erhalten werden soll, so muß ich die untere Teilung derart gegenüber der oberen verschieben, daß unter A dem Anfangspunkt der oberen Teilung log q_0 auf der unteren Teilung zu stehen kommt**).

Tatsächlich ist die untere Teilung nun so verschoben, daß der $\log q_0 = 0.82514$ in Einheiten der unteren Teilung unter dem Wert $s = 1000$ der oberen Teilung zu liegen kommt.

Wenn demnach bei einem bestimmten Werte von s in der oberen s-Teilung eingegangen wird, so kann direkt darunter der Wert $q_0\, s^2$ entweder bei kürzeren Seiten direkt auf Zentimeter genau abgelesen oder bei längeren Seiten in ein Intervall von 10 *cm* hineingeschätzt werden. Für Seiten von $s < 1$ *km* Länge kann mit dem zehnfachen Wert eingegangen werden. Hier ist aber zu berück-

*) Eine siebenstellige trigonometrische Tafel für Berechnungen mit der Rechenmaschine ist von H. Brandenburg herausgegeben worden.

Eine sechsstellige Tafel, die für die Höhenrechnung vollkommen genügen würde, ist von Dr. Peters vor kurzem erschienen. Sie ist aber leider sehr teuer.

**) S. auch P. Luckey, Einführung in die Nomographie.

sichtigen, daß der abgelesene Wert $q_0\, s^2$ dann 100fach zu groß erhalten wird. Bei vereinzelt vorkommenden Seiten von $s > 10\,km$ Länge wird mit dem n-ten Teil in die s-Teilung eingegangen, der abgelesene Wert $q_0\, s^2$ wird dann n^2fach zu klein erhalten.

Das zweite Glied in der Formel 10) ist damit noch nicht vollständig berechnet. $q_0\, s^2$ ist noch mit dem Faktor $\frac{f}{\sin^2 z}$ zu multiplizieren, der den Einfluß der Änderung des q infolge der mittleren Höhenlage der Seite über dem Meeresspiegel und den Einfluß einer Steilvisur auf das zweite Glied veranschaulicht.

Die Anbringung dieser verhältnismäßig kleinen Verbesserung kann mit Benützung der Skala II ausgeführt werden, in welcher links die Werte log sin z in doppelten Einheiten der $q_0\, s^2$-Teilung der Skala I nur für die in Betracht kommenden Werte für sin z von 55°—90° bzw. 90°—125° aufgetragen sind; unmittelbar anschließend daran sind rechts die Logarithmen des Ausdruckes f in einfachen Einheiten der qs^2-Teilung für ein H_m vom 0—4 km in Intervallen von Kilometern angereiht.

Greift man in Skala II von $z = 90°$ als Nullpunkt ausgehend nach links die Strecken bis zu dem Wert der gemessenen Zenitdistanz mit einem Zirkel ab und gibt diesen Wert, der $\log \frac{1}{\sin^2 z}$ in Einheiten der unteren Teilung der Skala I entspricht, zum zugehörigen Werte s der s Teilung hinzu (nach rechts) so ist in der unteren Teilung die Multiplikation mit dem Ausdruck $\frac{1}{\sin^2 z}$ vollzogen.

Ebenso könnte für sich die Multiplikation mit dem Wert f durchgeführt werden. Das empfiehlt sich aber nicht. Man wird vielmehr gleichzeitig mit der linken Zirkelspitze in Skala II die gemessene Zenitdistanz aufsuchen und mit der rechten Zirkelspitze bei der mittleren Seehöhe der Seite einsetzen.

Damit ist innerhalb der Zirkelspitzen der $\log \frac{f}{\sin^2 z}$ in Einheiten der $q_0\, s^2$-Teilung enthalten.

Wenn dieser Wert zum gegebenen s-Wert in Skala I hinzugegeben wird, so kann unterhalb in der Teilung die richtige Größe des zweiten Gliedes der Formel 10) abgelesen werden.

Um die Skala I auch dann verwenden zu können, wenn nur die Seitenlogarithmen bekannt sind, ist oberhalb der s-Teilung in dieser Skala eine zweite frei in der Luft liegende gleichmäßige Teilung, welche nach log s beziffert ist, angebracht. Um Verwechslungen mit der s-Teilung zu vermeiden ist diese Teilung mit schrägen Ziffern beschrieben.

Die Rechentafel kann mit geringfügigen Änderungen für beliebige Werte von q benützt werden. Es ist dann nur die Teilung in Skala II mit dem Argument Hm durch eine andere, den betreffenden q-Werten entsprechende, zu ersetzen.

Die Rechentafel hat den weiteren Vorteil, daß mit einem Blick beurteilt werden kann, ob für ein bestimmtes Vermessungsgebiet wegen der gemessenen Zenitdistanzen und der vorhandenen Seitenlängen eine Berücksichtigung der Verbesserungen überhaupt in Betracht kommt.

Anschließend folgt ein Beispiel für die Berechnung eines Höhenunterschiedes, das der Neutriangulierung in Obersteiermark vom Jahre 1926 entnommen ist.

B e i s p i e l :

Berechnung des Höhenunterschiedes der Seite Liezen—Raidling.

Gemessene Zenitdistanz $= 79^0\,29'\,03{\cdot}9''$ (Mittelwert)

$$H_m = 1280\ m,\ y_m = 65{\cdot}0\ km$$

Instrumentenhöhe $= +\,0{\cdot}32\ m$ über Pfeiler, Zielhöhe $= 3{\cdot}55\ m$.

A. N a c h d e r e i n f a c h e n F o r m e l 1).

$\log s$	3.827 9651 (aus der vorherigen	$2 \log s = 7.656\,06$	
$\log \operatorname{ctg} z$	9.268 6257 Ausgleichung)	$\log q = 2.830\,32$	(aus Tabelle III)
$\log \mathrm{I}$	3.096 5908	$\log \mathrm{II} = 0.486\,38$	

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= +\ 1249{\cdot}08\ m \\ \mathrm{II} &= +\ \ \ \ 3{\cdot}06\ m \\ \mathrm{J} &= +\ \ \ \ 0{\cdot}32\ m \\ \mathrm{V} &= -\ \ \ \ 3{\cdot}55\ m \\ \hline \triangle H &= +\ 1248{\cdot}91\ m \end{aligned}$$

B. N a c h d e r e r w e i t e r t e n F o r m e l a u f l o g a r i t h m i s c h e m W e g e.

$\log s = 3.827\,9651$ (frühere Rechnung) $\qquad 2 \log s = 7.656\,06$

$+ \log\left(1 + \dfrac{H_m}{r}\right) = \quad 872$ (Tab. I) $\qquad \log q = 2.830\,32$ (Tab. III)

$- \log\left(1 + \dfrac{y^2_m}{2r^2}\right) = \quad 225$ (Tab. II) $\qquad \log \dfrac{1}{\sin^2 z} = 0.014\,72$

$\log S = 3.828\,0298 \qquad \log \mathrm{II} = 0.501\,10$

$\log \operatorname{ctg} z = 9.268\,6257$

$\log \mathrm{I} = 3.096\,6555$

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= +\ 1249{\cdot}27 \\ \mathrm{II} &= +\ \ \ \ 3{\cdot}17 \\ \mathrm{J} &= +\ \ \ \ 0{\cdot}32 \\ \mathrm{V} &= -\ \ \ \ 3{\cdot}55 \\ \hline \triangle H &= +\ 1249{\cdot}21 \end{aligned}$$

C. N a c h d e r e r w e i t e r t e n F o r m e l m i t B e n ü t z u n g d e r R e c h e n m a s c h i n e u n d d e r R e c h e n t a f e l.

$s = \quad 6730{\cdot}23$ —

$s = 6729{\cdot}23\ m$ (aus der Ausgleichung)

$s\left(\dfrac{H_m}{r} - \dfrac{y^2_m}{2r^2}\right) = +\quad 1{\cdot}00\ m$ (aus dem Diagramm der Rechentafel)

$S = 6730{\cdot}23\ m$

$\operatorname{ctg} z = 0.185\,6204$ (aus der Brandenburg-Tafel)

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{I} & = + 1249{\cdot}27\ m & \text{(mittels Rechenmaschine)} \\
\mathrm{II} & = + \quad 3{\cdot}17\ m & \text{(aus der Rechentafel Skala I und II)} \\
\mathrm{J} & = + \quad 0{\cdot}32\ m & \\
\mathrm{V} & = - \quad 3{\cdot}55\ m & \\
\hline
\triangle H & = + 1249{\cdot}21\ m &
\end{array}
$$

Der Wert II wird erhalten, indem man in Skala II mit einer Zirkelspitze den Wert von 79° 30′ aufsucht und mit der zweiten Zirkelspitze bei $H_m = 1{\cdot}3\ km$ in der rechten Teilung der Skala II einsetzt. Die innerhalb der Zirkelspitzen enthaltene Strecke wird an den Wert 6730 *m* in der *s*-Teilung der Skala I hinzugegeben und beim Endpunkt auf der $q \,.\, s^2$-Teilung der Wert 3·17 *m* durch Schätzung der Zentimeter in das Intervall zwischen 3·1 und 3·2 in Übereinstimmung mit der vorhergehenden Rechnung gefunden.

Auf die gleiche Art kann bei logarithmischer Rechnung der Wert II mittels der Skala I und II der Rechentafel gefunden werden, wenn die Teilung in Skala I mit dem Argument log *s* benützt wird.

Literaturbericht.

1. Bücherbesprechung.

Bibliotheks-Nr. 711: Dr. Alfred H a r n a c k, Studienrat an der Marine-(Ingenieur-)Schule in Kiel: A n g e w a n d t e D i f f e r e n t i a l- u n d I n t e g r a l r e c h n u n g. Eine Einführung in die Grundgedanken neuzeitlicher Mathematik mit besonderer Berücksichtigung technisch-physikalischer Anwendungen. Mit 76 Figuren im Text. Aus der Sammlung: S t u d i e n b ü c h e r d e r M a t h e m a t i k, d e r N a t u r w i s s e n s c h a f t e n u n d T e c h n i k, herausgegeben vom Studiendirektor Dr. Georg W o l f f Band 1. (Format 14×22 *cm*, X, 266.) Verlag Otto S a l l e in Berlin 1928. Preis geb. in Ganzleinen 10 RM.

Werke, die aus der Lehrtätigkeit von Autoren hervorgehen, werden vom Rezensenten stets begrüßt, bieten sie doch zumeist in der Auswahl, Gliederung und Darstellung des Stoffes eine sorgfältig überlegte, ausgereifte Arbeit. So auch die vorliegende H a r n a c k sche Einführung in die Differential- und Integralrechnung.

Voll bewußt, daß in den Kreisen der angehenden Techniker vielfach eine Abneigung gegen das Mathematikstudium besteht, trotzdem die Mathematik das unentbehrlichste Hilfsmittel für seine Studien darstellt, hat der Autor auf folgende Punkte den größten Wert gelegt: Auf die völlige Klarstellung der Begriffe, wie Funktion, Grenzwert, Differential, Integral usw., um den Anfänger von der verderblichen bloßen Aneignung unverständlicher Symbole zu schützen; zweitens auf die zu behandelnden angewandten Beispiele, die Dinge von allgemeiner Bedeutung, wie die Fallbewegung, die harmonische Bewegung, das Arbeits- und Wärmediagramm, das Polarplanimeter, den Wechselstrom u. a. bringen und das Interesse zu wecken geeignet sind, wobei bei einfacher, leicht fließender Sprache alle Darlegungen systematisch und methodisch klar gegeben werden, so daß sie mit Heranziehung vorzüglicher Figuren unbedingt verstanden werden müssen.

Das H a r n a c k sche Werk steht in der Mitte zwischen den Behelfen, die man in der Mittelschule für die Einführung in die höhere Mathematik verwendet und den Lehrbüchern für Hochschulen, die sich absoluter Strenge bei Beweisführungen bedienen.