

Paper-ID: VGI\_192815



## Rückwärts- und Vorwärtseinschneiden mit der Rechenmaschine

Eduard Doležal <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Hofrat, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **26** (6), S. 87–98

1928

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Dolezal_VGI_192815,  
Title = {R{\u}ckw{\a}rts- und Vorw{\a}rtseinschneiden mit der  
Rechenmaschine},  
Author = {Dole{\v z}al, Eduard},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {87--98},  
Number = {6},  
Year = {1928},  
Volume = {26}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

ORGAN  
des  
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion:

Hofrat Prof. Dr. Ing., techn. et mont. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. K. Lego.

---

Nr. 6.                      Baden bei Wien, im Dezember 1928.                      XXVI. Jahrg.

---

## Rückwärts- und Vorwärtseinschneiden mit der Rechenmaschine.

Von Prof. Dr. E. Doležal.

Mit Recht finden leistungsfähige Rechenmaschinen bei trigonometrischen Punktbestimmungen immer mehr und mehr nützliche Verwendung. Das einfache Rückwärtseinschneiden, mit Zugrundelegung der Collins'schen oder Cassini'schen Konstruktion, führt zu jenen Verfahren, die heute besonders in Deutschland und Österreich in der Praxis des Maschinenrechnens verwendet werden.

Vor zwei Jahren veröffentlichte der holländische Geometer J. M. Tienstra in der Abhandlung: *Punt vereffening door middel van Voorwaardenvergelijkingen in Tydschrift voor Kadasteren Landmeetkunde*, Utrecht 1926, eine überraschend einfache Lösung des Rückwärtseinschneidens, und van der Sterr, der Chef der trigonometrischen Abteilung der Landesvermessung des Kaplandes, befaßte sich in der Studie: *Machine calculation method for resections in The South African Survey Journal*, Cape Town 1926, mit dieser interessanten Lösung.

Dieses Verfahren verdient, in Fachkreisen Deutschlands bekannt zu werden; wir bieten es daher nachfolgend mit Einbeziehung eigener Betrachtungen und ausgedehnt auch auf das Vorwärtseinschneiden.

### I. Das Rückwärtseinschneiden.

Sind  $x_1, x_2, x_3$  und  $y_1, y_2, y_3$  die rechtwinkligen Koordinaten der drei gegebenen Punkte  $P_1, P_2, P_3$  und  $x_0, y_0$  jene des vierten, gesuchten Punktes  $P_0$ , stellen wir uns ferner unter  $g_1, g_2, g_3$  und  $g_0$  die Gewichte der rechtwinkligen Koordinaten dieser Punkte vor, so ergeben sich die rechtwinkligen Koordinaten des zu bestimmenden Standpunktes aus:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3}{g_1 + g_2 + g_3} = \frac{[g x]}{[g]} = \frac{[g x]}{g_0} \\ y_0 &= \frac{g_1 y_1 + g_2 y_2 + g_3 y_3}{g_1 + g_2 + g_3} = \frac{[g y]}{[g]} = \frac{[g y]}{g_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 1)$$

also in Form eines zusammengesetzten arithmetischen Mittels.

Die Richtigkeit dieser Ausdrücke ergibt sich aus den Sätzen der Mechanik über den Gleichgewichtszustand von Kräften, wenn wir unter  $g_1, g_2, g_3$  und  $g_0$  uns Kräfte vorstellen. Denken wir uns in den Punkten  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_0$  einer Ebene die Kräfte  $g_1, g_2, g_3$  und  $g_0$  normal zu dieser Ebene wirkend, so kann man

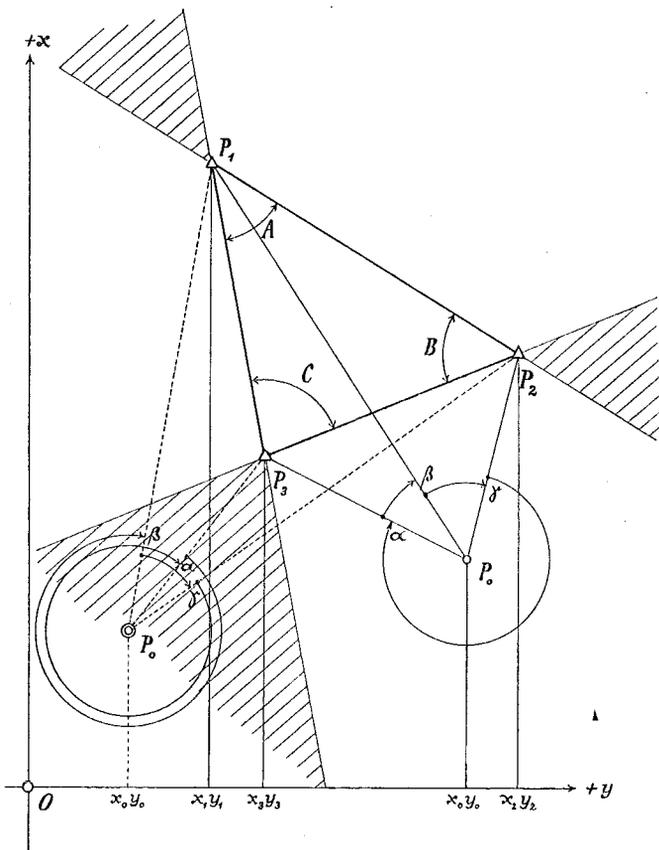


Fig. 1.

den Momentensatz zweimal zur Anwendung bringen (Fig. 1); das erstmal, wenn man sich das Koordinatensystem parallel verschoben, durch  $P_0$  gehend, denkt, wodurch man erhält:

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - x_0) g_1 + (x_2 - x_0) g_2 + (x_3 - x_0) g_3 &= 0 \\ (y_1 - y_0) g_1 + (y_2 - y_0) g_2 + (y_3 - y_0) g_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

Das zweitemal wird das Moment auf die Koordinatenachsen selbst bezogen:

$$\left. \begin{aligned} x_1 g_1 + x_2 g_2 + x_3 g_3 &= x_0 g_0 \\ y_1 g_1 + y_2 g_2 + y_3 g_3 &= y_0 g_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 3)$$

Werden die Gleichungen 2) und 3) in Verbindung gebracht, so folgt die Relation:

$$g_1 + g_2 + g_3 = g_0 \dots \dots \dots 4)$$

d. h. für den Gleichgewichtszustand ist es notwendig, daß in dem Punkte  $P_0$  eine Parallelkraft  $g_0$  wirke, die gleich der Summe der Kräfte ist, die in den drei gegebenen Punkten  $P_1, P_2, P_3$  wirkend gedacht werden.

Unsere Aufgabe ist jetzt die Lösung des Problems: In den Punkten  $P_1, P_2, P_3$  wirken normal zur Zeichenebene die Parallelkräfte  $g_1, g_2, g_3$ ; welche Werte müssen sie besitzen, um der in  $P_0$  wirkenden Parallelkraft  $g_0$  das Gleichgewicht halten zu können?

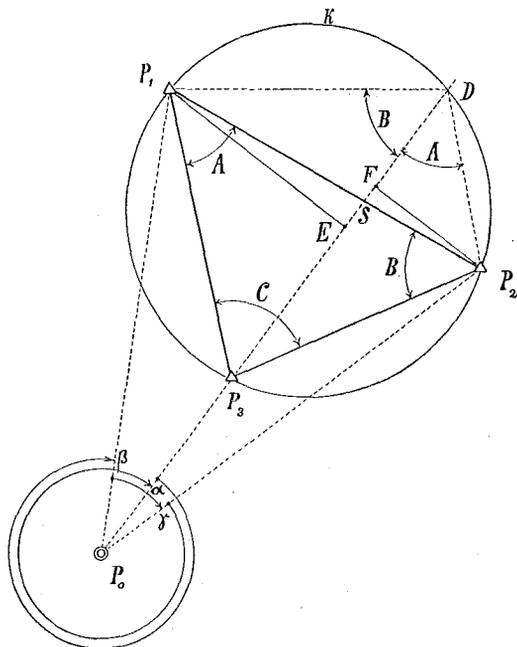


Fig. 2.

Vorerst sei vorausgeschickt, daß wir die inneren Winkel im Triangulierungsdreiecke  $P_1, P_2, P_3$  mit  $A, B, C$ , ferner die im gesuchten Punkte  $P_0$  gemessenen Horizontalwinkel mit  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnen, wobei  $\gamma$  der Seite  $P_1P_2$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  den Seiten  $P_2P_3$  und  $P_3P_1$  gegenüberliegen. Bei dieser Symbolik und der Voraussetzung, daß die genannten Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  konsequent stets im Sinne des Uhrzeigers gemessen werden, ergibt sich deren Summe entweder mit  $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ , je  
 oder  $\alpha + \beta + \gamma = 720^\circ$ , je  
 nachdem der Punkt  $P_0$  im Innern des Dreiecks  $P_1P_2P_3$  oder außerhalb desselben einer Seite gegenüberliegt, oder aber außerhalb dieses Dreiecks in dem in Fig. 1 schraffierten Winkelräumen sich befindet.

Um nun zu Ausdrücken für  $g_1, g_2, g_3$  zu gelangen, stellen wir die folgende Betrachtung an. Wir legen (Fig. 2) über  $P_1P_2P_3$  einen Kreis  $K$ , den sogenannten gefährlichen Kreis, verlängern  $P_3P_0$  bis zum Schnitte mit diesem Kreise in  $D$  und fällen von  $P_1$  und  $P_2$  Normale auf diese Gerade:  $n_1 = P_1E$  und  $n_2 = P_2F$ . Wenn auch der Schnittpunkt von  $P_3P_0$  mit  $P_1P_2$ , nämlich  $S$

bestimmt wird, so kann man sich vom mechanischen Standpunkte vorstellen, daß die in  $P_1$  und  $P_2$  angreifenden Parallelkräfte  $g_1$  und  $g_2$  dann einen Gleichgewichtszustand bedingen, wenn

$$g_1 \times P_1 S = g_2 \times S P_2 \quad \text{oder} \quad \frac{g_1}{g_2} = \frac{S P_2}{S P_1} = \frac{n_2}{n_1} \dots \dots \dots 5)$$

wird.

Diese Gleichung kann man in zweifacher Weise umgestalten; erstens dividieren wir Zähler und Nenner rechter Hand durch  $D P_0 = D F + F P_0 = D E + E P_0$  und zweitens wir multiplizieren beide mit  $\frac{1}{2} P_2 P_0$  und erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{g_1}{g_2} &= \frac{\frac{n_2}{D P_0}}{\frac{n_1}{D P_0}} = \frac{\frac{1}{\frac{D F}{n_2} + \frac{F P_0}{n_2}}}{\frac{1}{\frac{D E}{n_1} + \frac{E P_0}{n_1}}} = \frac{1}{\frac{\text{ctg } A - \text{ctg } \alpha}{\text{ctg } B - \text{ctg } \beta}} \\ \frac{g_1}{g_2} &= \frac{n_2 \cdot \frac{1}{2} P_2 P_0}{n_1 \cdot \frac{1}{2} P_2 P_0} = \frac{f_1}{f_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots 5)$$

weil, wie aus Fig. 2 leicht abzulesen ist, die Quotienten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D F}{n_2} &= \text{ctg } A \dots \dots \frac{F P_0}{n_2} = \text{ctg } (180^\circ - \alpha) = - \text{ctg } \alpha \\ \frac{D E}{n_1} &= \text{ctg } B \dots \dots \frac{E P_0}{n_1} = \text{ctg } (180^\circ - \beta) = - \text{ctg } \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots 6)$$

die vermerkten Werte haben und  $f_1, f_2, f_3$  und  $f = f_1 + f_2 + f_3$  die Dreiecksflächen  $P_2 P_3 P_0, P_3, P_1 P_0, P_1, P_2 P_0$  und  $P_1 P_2 P_3$  darstellen.

Wir erhalten daher nach dem vorstehenden und nach zyklischer Vertauschung für das Verhältnis der noch unbekanntenen Parallelkräfte:

$$\left. \begin{aligned} \frac{g_1}{g_2} &= \frac{1}{\frac{\text{ctg } A - \text{ctg } \alpha}{\text{ctg } B - \text{ctg } \beta}} = \frac{f_1}{f_2} \\ \frac{g_2}{g_3} &= \frac{1}{\frac{\text{ctg } B - \text{ctg } \beta}{\text{ctg } C - \text{ctg } \gamma}} = \frac{f_2}{f_3} \\ \frac{g_3}{g_1} &= \frac{1}{\frac{\text{ctg } C - \text{ctg } \gamma}{\text{ctg } A - \text{ctg } \alpha}} = \frac{f_3}{f_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 7)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} g_1 : g_2 : g_3 &= \frac{1}{\text{ctg } A - \text{ctg } \alpha} : \frac{1}{\text{ctg } B - \text{ctg } \beta} : \frac{1}{\text{ctg } C - \text{ctg } \gamma} \\ &= \frac{1}{f_1} : \frac{1}{f_2} : \frac{1}{f_3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 8)$$

und endlich für die gesuchten Parallelkräfte:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{g_0}{f} f_1 \\ g_2 &= \frac{1}{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} \beta} = \frac{g_0}{f} f_2 \\ g_3 &= \frac{1}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma} = \frac{g_0}{f} f_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 9)$$

Die rechtwinkligen Koordinaten des vierten Punktes  $P_0$  lauten:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} \alpha} x_1 + \frac{1}{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} \beta} x_2 + \frac{1}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma} x_3}{\frac{1}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma}} \\ y_0 &= \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} \alpha} y_1 + \frac{1}{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} \beta} y_2 + \frac{1}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma} y_3}{\frac{1}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma}} \end{aligned} \right\} I$$

Werden die Flächen eingeführt, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3}{f} = \frac{[f x]}{f} \\ y_0 &= \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3}{f} = \frac{[f y]}{f} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots I'$$

## II. Das Vorwärtseinschneiden.

Die Punkte  $P_1, P_2$  mit den Koordinaten  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  sind gegeben; jene von  $P_0$ , nämlich  $x_0, y_0$  sind zu bestimmen auf Grund der in  $P_1$  und  $P_2$  gemessenen inneren Winkel  $\alpha_0, \beta_0$  des Dreiecks  $P_1 P_2 P_0$ .

Die Zurückführung des Vorwärtseinschneidens auf das Rückwärtseinschneiden im rechtwinkligen Koordinatensystem und die Gewinnung der zur Berechnung nötigen Formeln aus den Gleichungen I) kann auf zweifache Weise erfolgen.

### 1. Art.

Wir denken uns den dritten Punkt beim Rückwärtseinschneiden  $P_3$  in der Richtung der  $x$ -Achse unendlich fern (Fig. 3), also  $x_3 = \infty$ ; dann haben wir für die Winkel nach der Symbolik für das Rückwärtseinschneiden:

$$\left. \begin{aligned} A &= \rho_{1,2} & \alpha &= \rho_{1,2} - \beta_0 \\ B &= 180^\circ - \rho_{1,2} & \beta &= 180^\circ - (\rho_{1,2} + \alpha_0) \\ C &= 0 & \gamma &= 180^\circ + (\alpha_0 + \beta_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 10)$$

und weiter:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} \alpha} &= \frac{1}{\operatorname{ctg} \rho_{1,2} - \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} \\ \frac{1}{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} \beta} &= \frac{1}{-\operatorname{ctg} \rho_{1,2} + \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)} \\ \frac{1}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma} &= \frac{1}{\infty + \operatorname{ctg} (\alpha_0 + \beta_0)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 11)$$

Rückwärtseinschneiden mit Zugrundelegung der Formel I.

$x_1$	12'73	$y_1$	57'23	$\alpha$	80° 35' 45"	$\rho_{1,2}$	63	46	38
$x_2$	67'04	$y_2$	205'83	$\beta$	28 15 30	$\rho_{2,1}$	18	53	28
$x_3$	97'60	$y_3$	35'19	$\gamma$	251 58 45	$\rho_{3,2}$	97	19	54
$x_2 - x_1$	54'31	$y_2 - y_1$	263'06	$\alpha + \beta + \gamma$	360 00 00	$\rho_{3,1}$			
$x_3 - x_2$	30'56	$y_3 - y_2$	241'02						
$x_1 - x_3$	84'87	$y_1 - y_3$	22'04						
$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	4'843 6751	$\rho_{1,2}$	101 39 54	$A = \rho_{1,3} - \rho_{1,2}$					
$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	7'886 7801	$\rho_{2,3}$	262 46 26	$B = \rho_{2,1} - \rho_{2,3}$					
$\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$	0'259 6913	$\rho_{3,1}$	345 26 32	$C = \rho_{3,2} - \rho_{3,1} + 360^\circ$					
$P_1$		$P_2$		$P_3$	$A + B + C$	180	00	00	
ctg A	+ 0'492 5549	ctg B	+ 2'922 2403	ctg C	- 0'128 6647				
ctg x	+ 0'165 6236	ctg $\beta$	+ 1'860 4415	ctg $\gamma$	+ 0'341 4831				
ctg A - ctg $\alpha$	+ 0'326 9313	ctg B - ctg $\beta$	+ 1'061 7988	ctg C - ctg $\gamma$	- 0'470 1478				
$s_1 = \frac{ctg A - ctg \alpha}{1}$	+ 3'058 7466	$s_2 = \frac{ctg B - ctg \beta}{1}$	+ 0'941 7980	$s_3 = \frac{ctg C - ctg \gamma}{1}$	- 2'126 9907				[g] + 1'873 5539
$s_1 x_1$	38'937 8442	$s_1 y_1$	175'052 0679						
$s_2 x_2$	63'138 1379	$s_2 y_2$	193'850 2823						
$s_3 x_3$	207'594 2923	$s_3 y_3$	74'848 8027						
$[g x]$	+ 105'518 3102	$[g y]$	+ 93'647 0171						
$x_0 = \frac{[g x]}{[g]}$	+ 56'32	$y_0 = \frac{[g y]}{[g]}$	+ 49'98						
$x_1 - x_0$	69'05	$y_1 - y_0$	107'21	Kontrolle:					
$x_2 - x_0$	123'36	$y_2 - y_0$	155'85	$\alpha' = \alpha$					
$x_3 - x_0$	153'92	$y_3 - y_0$	85'17	$\beta' = \beta$					
$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$	+ 1'552 6430	$\rho_{0,1}$	237° 12' 57"	$\alpha' = \rho_{0,3} - \rho_{0,2}$	80° 35' 41"				
$\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$	- 1'263 3755	$\rho_{0,2}$	128 21 46	$\beta' = \rho_{0,1} - \rho_{0,3}$	28 15 30				
$\frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0}$	+ 0'553 3394	$\rho_{0,3}$	208 57 27	$\gamma' = x_{0,2} - \rho_{0,1} + 360^\circ$	251 08 49				
				Summe ..	360 00 00				

die kleinen Differenzen in der Kontrolle erklären sich aus der Abrundung von  $y_0, x_0$  auf cm

Nach Einführung dieser Werte in die Gleichungen 1) folgt:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \rho_{1,2} - \operatorname{ctg}(\rho_{1,2} - \beta_0)} x_1 + \frac{1}{-\operatorname{ctg} \rho_{1,2} + \operatorname{ctg}(\rho_{1,2} + \alpha_0)} x_2 + \frac{1}{\infty + \operatorname{ctg}(\alpha_0 + \beta_0)} \infty}{\frac{1}{\operatorname{ctg} \rho_{1,2} - \operatorname{ctg}(\rho_{1,2} - \beta_0)} + \frac{1}{-\operatorname{ctg} \rho_{1,2} + \operatorname{ctg}(\rho_{1,2} + \alpha_0)}} \\ y_0 &= \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \rho_{1,2} - \operatorname{ctg}(\rho_{1,2} - \beta_0)} y_1 + \frac{1}{-\operatorname{ctg} \rho_{1,2} + \operatorname{ctg}(\rho_{1,2} + \alpha_0)} y_2}{\frac{1}{\operatorname{ctg} \rho_{1,2} - \operatorname{ctg}(\rho_{1,2} - \beta_0)} + \frac{1}{-\operatorname{ctg} \rho_{1,2} + \operatorname{ctg}(\rho_{1,2} + \alpha_0)}} \end{aligned} \right\} 12)$$

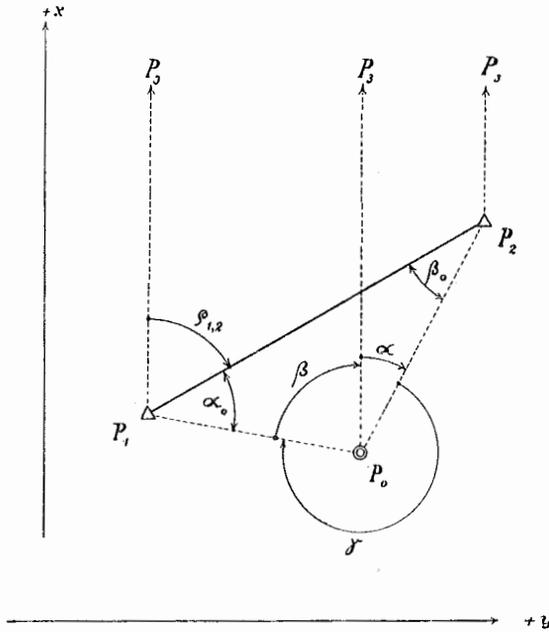


Fig. 3.

Im Zähler der gesuchten Abszisse erscheint die unbestimmte Form:  $\frac{x_3}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma} = \frac{\infty}{\infty}$ . Diese läßt sich wie folgt behandeln; wenn man der Einfachheit halber den Punkt  $P_3$  auf der Abszisse von  $P_1$  unendlich fern annimmt (Fig. 4), dann wird:  $x_3 = 0$ ,  $y_3 = y_1$  und

$$\operatorname{ctg} C = \frac{x_3 - x_2}{y_2 - y_1} \text{ und}$$

$$\frac{x_3}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma} = \frac{x_3}{\frac{x_3 - x_2}{y_2 - y_1} - \operatorname{ctg} \gamma} = \frac{(y_2 - y_1) \times x_3}{x_3 - [x_2 + (y_2 - y_1) \operatorname{ctg} \gamma]},$$

welcher Bruch nach Einführung von  $y_2 - y_1 = p$   
 $x_2 + (y_2 - y_1) \operatorname{ctg} \gamma = q$   
 übergeht in:

$$\frac{x_3}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma} = \frac{p \cdot x_3}{x_3 + q} = \frac{p}{1 + \frac{q}{x_3}}$$

Geht man zu den Grenzen über, so erhält man:

$$\lim_{x_3 \rightarrow \infty} \frac{x_3}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma} = \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \frac{p}{1 + \frac{q}{x_3}} = p = y_2 - y_1 \quad \dots \quad 13)$$

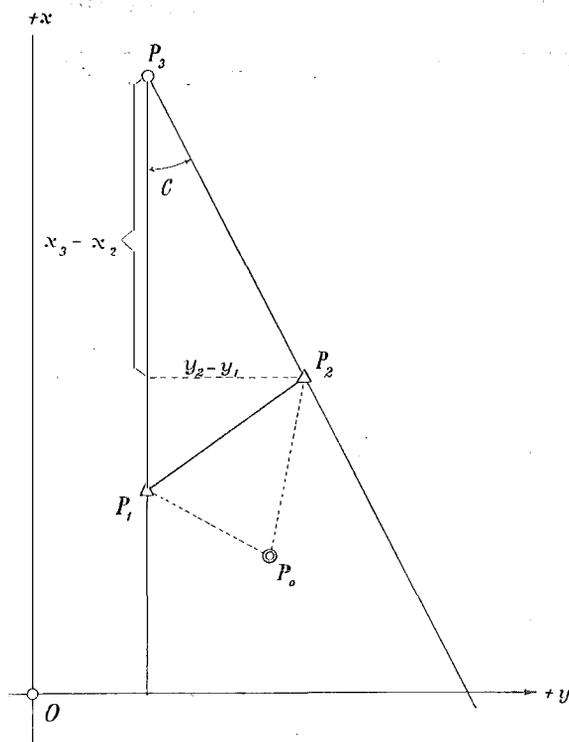


Fig 4

Der Wert des dritten Summanden im Zähler der Abszisse  $x_0$  ist damit bestimmt und wir erhalten für die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes  $P_0$ :

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{\operatorname{ctg} \rho_{1,2} - \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} x_1 + \frac{1}{-\operatorname{ctg} \rho_{1,2} + \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} + \rho_0)} + (y_2 - y_1) \\ &\quad \frac{1}{\operatorname{ctg} \rho_{1,2} - \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} + \frac{1}{-\operatorname{ctg} \rho_{1,2} + \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)} \\ y_0 &= \frac{1}{\operatorname{ctg} \rho_{1,2} - \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} y_1 + \frac{1}{-\operatorname{ctg} \rho_{1,2} + \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)} y_2 \\ &\quad \frac{1}{\operatorname{ctg} \rho_{1,2} - \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} + \frac{1}{-\operatorname{ctg} \rho_{1,2} + \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)} \end{aligned} \right\} \text{II.}$$

2. Art.

Wir erhalten zwei andere Ausdrücke für die Koordinaten  $x_0, y_0$ , wenn wir den dritten Punkt  $P_3$  in der Richtung der  $y$ -Achse ins Unendliche uns verlegt denken (Fig. 5), also  $y_3 = \infty$  setzen.

Wir erhalten dann:

$$\left. \begin{aligned} A &= 90^\circ - \rho_{1,2} & \alpha &= 90^\circ - (\rho_{1,2} - \beta_0) \\ B &= 90^\circ + \rho_{1,2} & \beta &= 90^\circ + (\rho_{1,2} + \alpha_0) \\ C &= 0 & \gamma &= 180^\circ - (\alpha_0 + \beta_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 14)$$

daher für die Brüche:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} \alpha} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \rho_{1,2} - \operatorname{tg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} \\ \frac{1}{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} \beta} &= \frac{1}{-\operatorname{tg} \rho_{1,2} + \operatorname{tg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)} \\ \frac{1}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma} &= \frac{1}{\infty + \operatorname{ctg} (\alpha_0 + \beta_0)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 15)$$

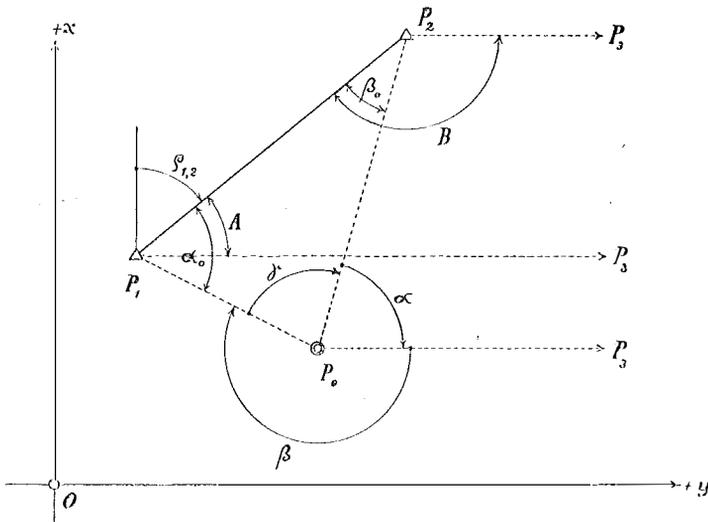


Fig. 5.

Somit ergeben sich für die Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{\operatorname{tg} \rho_{1,2} - \operatorname{tg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} x_1 + \frac{1}{-\operatorname{tg} \rho_{1,2} + \operatorname{tg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)} x_2 \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} \rho_{1,2} - \operatorname{tg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} + \frac{1}{-\operatorname{tg} \rho_{1,2} + \operatorname{tg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)} \\ y_0 &= \frac{1}{\operatorname{tg} \rho_{1,2} - \operatorname{tg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} y_1 + \frac{1}{-\operatorname{tg} \rho_{1,2} + \operatorname{tg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)} y_2 + \frac{1}{\infty + \operatorname{ctg} (\alpha_0 + \beta_0)} \infty \end{aligned} \right\} 16)$$

Im Zähler der Ordinate  $y_0$  erscheint die unbestimmte Form:

$$\frac{y_3}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma} = \frac{\infty}{\infty + \operatorname{ctg} (\alpha_0 + \beta_0)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Nun kann, ähnlich wie wir es bei der ersten Art der Transformation getan haben, die unbestimmte Form untersucht werden. Wir erhalten vorerst:

$$\operatorname{ctg} C = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_1}$$

und nach Einführung dieses Wertes in die unbestimmte Form:

$$\lim_{y_3 \rightarrow \infty} \frac{y_3}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma} = \lim_{y_3 \rightarrow \infty} \frac{r}{1 + \frac{s}{y_3}} = r = x_2 - x_1, \quad \dots \quad (17)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} r &= x_2 - x_1 \\ s &= y_2 + (x_2 - x_1) \operatorname{ctg} \gamma \end{aligned} \right\}$$

bedeuten.

Die endgültigen Koordinaten des gesuchten Punktes lauten dann:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \rho_{1,2} - \operatorname{tg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} x_1 + \frac{1}{-\operatorname{tg} \rho_{1,2} + \operatorname{tg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)} x_2}{\frac{1}{\operatorname{tg} \rho_{1,2} - \operatorname{tg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} + \frac{1}{-\operatorname{tg} \rho_{1,2} + \operatorname{tg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)}} \\ y_0 &= \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \rho_{1,2} - \operatorname{tg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} y_1 + \frac{1}{-\operatorname{tg} \rho_{1,2} + \operatorname{tg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)} y_2 + (x_2 - x_1)}{\frac{1}{\operatorname{tg} \rho_{1,2} - \operatorname{tg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} + \frac{1}{-\operatorname{tg} \rho_{1,2} + \operatorname{tg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)}} \end{aligned} \right\} \quad \text{III}$$

Wenn in den Gleichungen II und III die Brüche umgeformt und entsprechend reduziert werden, so gelangen wir zu den folgenden Ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{\operatorname{ctg} \beta_0 - \operatorname{ctg} \rho_{1,2} x_1 + (\operatorname{ctg} \alpha_0 + \operatorname{ctg} \rho_{1,2}) x_2 - (1 + \operatorname{ctg}^2 \rho_{1,2}) (y_2 - y_1)}{\operatorname{ctg} \alpha_0 + \operatorname{ctg} \beta_0} \\ y_0 &= \frac{(\operatorname{ctg} \beta_0 - \operatorname{ctg} \rho_{1,2}) y_1 + (\operatorname{ctg} \alpha_0 + \operatorname{ctg} \rho_{1,2}) y_2}{\operatorname{ctg} \alpha_0 + \operatorname{ctg} \beta_0} \end{aligned} \right\} \quad \text{IV}$$

und

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{(\operatorname{ctg} \beta_0 + \operatorname{tg} \rho_{1,2}) x_1 + (\operatorname{ctg} \alpha_0 + \operatorname{tg} \rho_{1,2}) x_2}{\operatorname{ctg} \alpha_0 + \operatorname{ctg} \beta_0} \\ y_0 &= \frac{(\operatorname{ctg} \beta_0 + \operatorname{tg} \rho_{1,2}) y_1 + (\operatorname{ctg} \alpha_0 - \operatorname{tg} \rho_{1,2}) y_2 + (1 + \operatorname{tg}^2 \rho_{1,2}) (x_2 - x_1)}{\operatorname{ctg} \alpha_0 + \operatorname{ctg} \beta_0} \end{aligned} \right\} \quad \text{V}$$

in welchen im Zähler von  $x_0$  bzw.  $y_0$  in den Formeln IV und V drei Summanden auftreten, sonst aber nur zwei erscheinen. Es lassen sich aber aus IV und V sowie aus II und III Ausdrücke für die Koordinaten  $x_0$  und  $y_0$  auswählen, die im Zähler und Nenner der Brüche nur zwei Summanden enthalten, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{(\operatorname{ctg} \beta_0 + \operatorname{tg} \rho_{1,2}) x_1 + (\operatorname{ctg} \alpha_0 + \operatorname{tg} \rho_{1,2}) x_2}{\operatorname{ctg} \alpha_0 + \operatorname{ctg} \beta_0} \\ y_0 &= \frac{(\operatorname{ctg} \beta_0 - \operatorname{ctg} \rho_{1,2}) y_1 + (\operatorname{ctg} \alpha_0 + \operatorname{ctg} \rho_{1,2}) y_2}{\operatorname{ctg} \alpha_0 + \operatorname{ctg} \beta_0} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \text{VI}$$

und

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \rho_{1,2} - \operatorname{tg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} x_1 + \frac{1}{-\operatorname{tg} \rho_{1,2} + \operatorname{tg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)} x_2}{\frac{1}{\operatorname{tg} \rho_{1,2} - \operatorname{tg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} + \frac{1}{-\operatorname{tg} \rho_{1,2} + \operatorname{tg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)}} \\ y_0 &= \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \rho_{1,2} - \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} y_1 + \frac{1}{-\operatorname{ctg} \rho_{1,2} + \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)} y_2}{\frac{1}{\operatorname{ctg} \rho_{1,2} - \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} - \beta_0)} + \frac{1}{-\operatorname{ctg} \rho_{1,2} + \operatorname{ctg} (\rho_{1,2} + \alpha_0)}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \text{VII.}$$

Bei zahlenmäßiger Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten mit der Rechenmaschine kann man verschiedene von den aufgestellten Formeln verwenden. Benützt man II, III oder VII, so schließt man sich mehr an das Rückwärtseinschneiden an, verwendet man hingegen die Ausdrücke IV, V oder VI, so gestaltet sich die Rechnung einfacher.

Vorwärtseinschneiden  
mit Zugrundelegung der Formeln IV, V und VI.

$x_1$	- 26'56	$y_1$	- 214'28	$\alpha_0$	215° 58' 30"
$x_2$	+ 78'20	$y_2$	+ 237'32	$\beta_0$	347 23 35
$x_2 - x_1$	+104'76	$y_2 - y_1$	+ 451'60	ctg $\alpha_0$	+ 1'377 6456
$\text{tg } \rho_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	+ 4'310 8056	$1 + \text{tg}^2 \rho_{1,2}$	+ 19'583 0449	ctg $\beta_0$	- 4'495 7499
$\text{ctg } \rho_{1,2} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$	+ 0'231 9766	$1 + \text{ctg}^2 \rho_{1,2}$	+ 1'053 8131	$N = \text{ctg } \alpha_0 + \text{ctg } \beta_0$	- 3'118 1043
$\text{ctg } \beta_0 - \text{ctg } \rho_{1,2}$	- 4'727 7265	} + Kontr. N... - 3'118 1043			
$\text{ctg } \alpha_0 + \text{ctg } \rho_{1,2}$	+ 1'609 6222				
$(\text{ctg } \beta_0 - \text{ctg } \rho_{1,2}) \cdot x_1$	+125'568 4108	$(\text{ctg } \beta_0 - \text{ctg } \rho_{1,2}) \cdot y_1$	+1013'057 2344		
$(\text{ctg } \alpha_0 + \text{ctg } \rho_{1,2}) \cdot x_2$	+125'872 4560	$(\text{ctg } \alpha_0 + \text{ctg } \rho_{1,2}) \cdot y_2$	+ 381'995 5405		
$-(1 + \text{ctg}^2 \rho_{1,2}) \cdot (y_2 - y_1)$	-475'901 9960				
Z für $x_0$	-224'461 1242	Z für $y_0$	+1395'052 7749		
$x_0 = \frac{Z}{N}$	+ 71'99	$y_0 = \frac{Z}{N}$	-447'40		
$\text{ctg } \beta_0 + \text{tg } \rho_{1,2}$	- 0'184 9443	} + Kontr. N... - 3'118 1043			
$\text{ctg } \alpha_0 - \text{tg } \rho_{1,2}$	- 2'933 1600				
$(\text{ctg } \beta_0 + \text{tg } \rho_{1,2}) \cdot x_1$	+ 4'912 1206	$(\text{ctg } \beta_0 + \text{tg } \rho_{1,2}) \cdot y_1$	+ 39'629 8646		
$(\text{ctg } \alpha_0 - \text{tg } \rho_{1,2}) \cdot x_2$	-229'373 1120	$(\text{ctg } \alpha_0 - \text{tg } \rho_{1,2}) \cdot y_2$	- 696'097 5312		
		$(1 + \text{tg}^2 \rho_{1,2}) \cdot (x_2 - x_1)$	+2051'519 7837		
Z für $x_0$	-224'460 9914	Z für $y_0$	+1395'052 1171		
$x_0 = \frac{Z}{N}$	+ 71'99	$y_0 = \frac{Z}{N}$	- 447'40		

Vorwärtseinschneiden  
mit Zugrundelegung der Formel VI.

$x_1$	- 26'56	$y_1$	-214'28	$\alpha_0$	215° 58' 30"
$x_2$	+ 78'20	$y_2$	+237'32	$\beta_0$	347 23 35
$x_2 - x_1$	+104'76	$y_2 - y_1$	+ 451'60	ctg $\alpha_0$	+ 1'377 6456
$\text{tg } \rho_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	+ 4'310 8056	$\text{ctg } \rho_{1,2} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$	+ 0'231 9766	ctg $\beta_0$	- 4'495 7499
$\text{ctg } \beta_0 + \text{tg } \rho_{1,2}$	- 0'184 9443	$\text{ctg } \beta_0 - \text{ctg } \rho_{1,2}$	- 4'727 7265	$N = \text{ctg } \alpha_0 + \text{ctg } \beta_0$	- 3'118 1043
$\text{ctg } \alpha_0 - \text{tg } \rho_{1,2}$	- 2'933 1600	$\text{ctg } \alpha_0 + \text{ctg } \rho_{1,2}$	+ 1'609 9222		
Summe = Kontr. N.	- 3'118 1043	Summe = Kontr. N.	- 3'118 1043		
$(\text{ctg } \beta_0 + \text{tg } \rho_{1,2}) \cdot x_1$	+ 4'912 1206	$(\text{ctg } \beta_0 - \text{ctg } \rho_{1,2}) \cdot y_1$	+1013'057 2344		
$(\text{ctg } \alpha_0 - \text{tg } \rho_{1,2}) \cdot x_2$	-229'373 1120	$(\text{ctg } \alpha_0 + \text{ctg } \rho_{1,2}) \cdot y_2$	+ 381'995 5405		
Z für $x_0$	-224'460 9914	Z für $y_0$	+1395'052 7749		
$x_0 = \frac{Z}{N}$	+ 71'99	$y_0 = \frac{Z}{N}$	- 447'40		

Anmerkung. Bei Vorbereitung dieses vor Jahresfrist fertigen Aufsatzes für den Satz lesen wir in „Die Braunschweiger GMC, Monatsschrift, November-Dezember 1928,“ den sehr interessanten Aufsatz von H. F. van Riel, Lektor an der Landwirtschaftlichen Hochschule zu Wageningen in Holland: „Die Lösung des einfachen Rückwärts- und Vorwärtseinschneidens durch symmetrische Funktionen der Koordinaten“, der wiederum zeigt, daß es viele Wege gibt, die zum gleichen Ziele führen.

## Referate.

### Mondkarten.

Ministerialrat i. R. Dr. Karl Müller hielt am 26. April d. J. in der Arbeitsgemeinschaft den von der Vereinigung „Landkarte“ veranstalteten Vortrag über Mondkarten. Der Vortragende wies zunächst auf das besondere Interesse hin, das der Mond für die Kartographie bietet. Während sonst Karten verkleinern, handelt es sich bei Mondkarten um Vergrößerungen, denn der Durchmesser der Mondscheibe in der Sichtweite beträgt ja kaum 2 Millimeter; auch gibt es auf dem Monde vorläufig keine Bezugs-, keine Normalebene, endlich wechseln infolge Änderung der Entfernung, infolge der Libration, infolge der Änderung der Höhe und infolge der Refraktion, ganz abgesehen von dem Wechsel des irdischen Standpunktes, unablässig die Mondbilder. Einige moderne Mondphotographien wurden in schönen Bildern gezeigt und die Aufnahmsinstrumente, die Riesensfernrohre besprochen. Auch von den Mondzeichnungen Galileis (1610) und den schönen Karten des P. van Langrenus (1645) Antwerpen) und des Danziger Ratsherrn Johann Hevelke (1647 Gedani) lagen Lichtbilder vor, aus dem 17. Jahrhundert wurden außerdem die Karten des Neaplers Fontana (1630), des Franzosen Claudius Mellan (1635), des Jesuitenpaters P. Grimaldi (1651 Bologna) und C. Scheiner (Amsterdam 1673), E. Divinis, eines Zeitgenossen Langrens, des Kapuziners Schyr-laues de Rheita (Maria Schyrl 1645 Antwerpen), De la Hire's und Dom. Cassini's (1680, neu ausgegeben von Lalande 1787) und die Zeichnungen der Maria Clara Eimmart in Nürnberg (um 1790) mehr minder eingehend erwähnt. Aus dem 18. Jahrhundert lag die erste auf Positionsbestimmungen gegründete Karte, die des Tobias Mayer (1775) im Lichtbilde, die größere und die Skizzen Mayers in der Ausgabe von Klinkerfues (Göttingen 1881) vor, der ähnlichen Karte des großen Mathematikers Lambert (1774) wurde Erwähnung getan, einiges von den Zeichnungen des Oberamtmannes Johann Hier. Schröter (Lilienthal 1791 und 1802) aus den Selentopographischen Fragmenten konnte im Bilde gezeigt werden. Aus dem 19. Jahrhundert lag die kleine Karte des Münchners Dr. Franz Paula de Gruithuisen vor, ausführlich wurden an der Hand von Bildern die klassischen Mondkarten G. W. Lohrmanns (Dresden 1824 bzw. Leipzig 1878), die Mappa Selenographica von Johann Heinrich Mädler und Wilhelm Beer (1834 Berlin), die Charte der Gebirge des Mondes von Julius Schmidt (1878 Berlin) in ihren Vorzügen und Mängeln behandelt. Die Generalkarten Lohrmanns und Maedlers, die Mondbilder Nasmyths und Carpenters (London 1874). E. Neisons Umarbeitung der Mappa Selenographica (1876 London), C. M. Gaudiberts Carte générale de la lune (Paris 1885), T. Gwyn Elgers Map of the Moon (London 1894), die photographischen Mondatlanten des Lick Observatory, der Pariser Atlas von Loewy und Puiseux, Dr. Lad. Weineks Photographischer Mondatlas (Prag 1897), der auf Lichtbildern beruhende Mondatlas von Johann Nep. Krieger (I. Band, Triest 1898, II. Band bearbeitet von Rudolf König, Wien 1912), W. H. Pickering's Photographic Atlas (1903 New-York) wurden gestreift. Ziemlich eingehend wurde auf die Arbeiten Phil. Fauths (Atlas, Leipzig 1895, Was wir vom Monde wissen, Leipzig 1906) eingegangen, von dessen in Arbeit befindlicher großer Mondkarte sich der Vortragende die Krönung der Mondkartographie erwartet, einige neue Spezialkarten von ihm und seinem Schüler W. Löbering wurden vorgewiesen. Die Messungen am Monde von S. A. Saunder (1900—1911 London), Hayn (1902, 1904, 1907 Leipzig), J. Franz (1913 Halle), L. K. Graff, und die noch unveröffentlichten einschlägigen umfangreichen Arbeiten R. Königs (Wien 1917 bis 1927) wurden kurz behandelt und dann die größtenteils auf diesen Messungen beruhenden Mond-