

Paper-ID: VGI\_192810



## Über die Genauigkeit einer eingehängten Dreieckskette

Emil Hellebrand

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **26** (4), S. 51–59

1928

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Hellebrand_VGI_192810,  
  Title =  {"\U}ber die Genauigkeit einer eingeh{"a}ngten Dreieckskette},  
  Author = {Hellebrand, Emil},  
  Journal =  {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
  Pages =  {51--59},  
  Number = {4},  
  Year =  {1928},  
  Volume = {26}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

ORGAN  
des  
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion:

Hofrat Prof. Dr. Ing., techn. et mont. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. K. Lego.

---

Nr. 4.                      Baden bei Wien, im September 1928.                      XXVI. Jahrg.

---

## Über die Genauigkeit einer eingehängten Dreieckskette.

Von Prof. Dr. E. Hellebrand.

Schaltet man einen oder zwei Triangulierungspunkte in ein Dreieckssystem höherer Ordnung ein, so berechnet man gewöhnlich außer den eigentlichen Unbekannten auch ihre mittleren Fehler und gewinnt dadurch einen besseren Einblick in die Güte der Beobachtungen, in die Wirkung der Ausgleichung, allenfalls auch in die Fehler der vorgegebenen Punkte.

Wird aber eine größere Zahl von Neupunkten im Zusammenhange ausgeglichen, dann gibt man sich zufrieden, wenn die Rechnung im ersten Anlauf gelungen ist und man die Koordinaten- oder Richtungsverbesserungen endlich vor sich hat. Man wählt nicht gerne den Umweg über die Gewichtsgleichungen, weil er zu umständlich erscheint und es in den meisten Fällen auch tatsächlich ist. Hat man aber die Mehrarbeit auf sich genommen und die Normalgleichungen allgemein aufgelöst, dann ist man in der angenehmen Lage, über die Genauigkeit aller Punkte, Seiten und Richtungen Auskunft geben zu können, was für die späteren Arbeiten niederer Ordnung unter Umständen von großer Bedeutung sein kann.

Im folgenden soll die Wirkung der Ausgleichung bei einer zwischen vier Punkte eingehängten Kette von acht gleichseitigen Dreiecken untersucht werden.

Die Koordinaten der Punkte  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$  (Abb. 1) gelten als fehlerlos und bezüglich der beobachteten Richtungen sei deren volle Gleichgewichtigkeit vorausgesetzt.

Da die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen geführt werden soll, müssen zunächst die Verbesserungsgleichungen stationsweise aufgestellt werden, worauf nach Ausscheidung der Orientierungsbekanntens  $z$  die jeweiligen Normalgleichungsanteile leicht berechnet werden können.

So hat man für den Standpunkt  $\mathfrak{A}$  mit den Zeigern der Abb. 1 zunächst:

$$\begin{aligned}v_1 &= -z + a_1 dx_1 + b_1 dy_1 - l_1 \\v_2 &= -z && - l_2\end{aligned}$$

und nach Ausscheidung des  $z$

$$v_1 = \frac{1}{2} a_1 dx_1 + \frac{1}{2} b_1 dy_1 - \mathcal{L}_1$$

$$v_2 = -\frac{1}{2} a_1 dx_1 - \frac{1}{2} b_1 dy_1 - \mathcal{L}_2$$

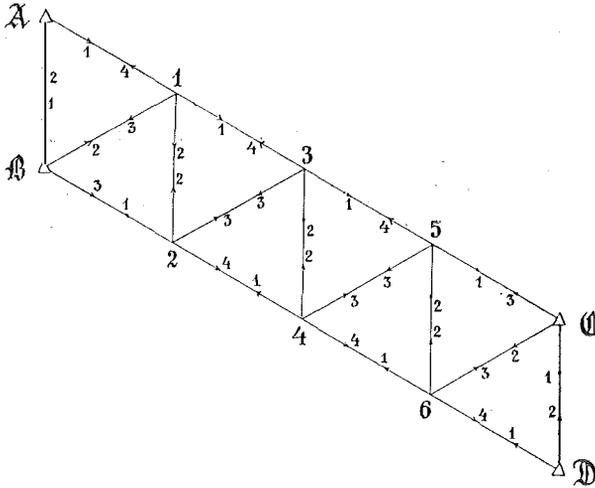


Abb. 1.

Legt man die positive  $x$ -Achse nach Norden, die  $y$ -Achse nach Osten und bezeichnet die Koeffizienten von  $dx_1, dy_1; dx_2, dy_2; dx_3, dy_3; dx_4, dy_4; dx_5, dy_5; dx_6, dy_6$ ; mit  $A, B; C, D; E, F; G, H; J, K; M, N$ , so erhält man wegen

$$a_1 = -\frac{\rho \sqrt{3}}{s} \frac{1}{2}, \quad b_1 = -\frac{\rho}{s} \frac{1}{2}$$

die Normalgleichungsanteile der Station  $\mathcal{A}$ :

$$[AA] = \frac{\rho^2}{s^2} \cdot \frac{3}{8}, \quad [AB] = \frac{\rho^2}{s^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}, \quad [BB] = \frac{\rho^2}{s^2} \cdot \frac{1}{8}.$$

Ähnliches gilt für den Standpunkt  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{aligned} v_1 &= -z && -l_1 \\ v_2 &= -z + a_2 dx_1 + b_2 dy_1 && -l_2 \\ v_3 &= -z && + a_3 dx_2 + b_3 dy_2 - l_3; \end{aligned}$$

nach Eliminierung des  $z$ :

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{1}{3} a_2 dx_1 - \frac{1}{3} b_2 dy_1 - \frac{1}{3} a_3 dx_2 - \frac{1}{3} b_3 dy_2 - \mathcal{L}_1 \\ v_2 &= +\frac{2}{3} \quad \cdot \quad +\frac{2}{3} \quad \cdot \quad -\frac{1}{3} \quad \cdot \quad -\frac{1}{3} \quad \cdot \quad -\mathcal{L}_2 \\ v_3 &= -\frac{1}{3} \quad \cdot \quad -\frac{1}{3} \quad \cdot \quad +\frac{2}{3} \quad \cdot \quad +\frac{2}{3} \quad \cdot \quad -\mathcal{L}_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Für} \quad a_2 &= -\frac{\rho}{s} \frac{\sqrt{3}}{2}, & a_3 &= -\frac{\rho}{s} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b_2 &= +\frac{\rho}{s} \frac{1}{2}, & b_3 &= -\frac{\rho}{s} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

lauten dann die Anteile der Station  $\mathfrak{B}$ :

$$\begin{aligned} [AA] &= \frac{\rho^2}{s^2} \cdot \frac{1}{2}, & [AB] &= -\frac{\rho^2}{s^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{usw. bis} \\ [CD] &= \frac{\rho^2}{s^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}, & [DD] &= \frac{\rho^2}{s^2} \cdot \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Im übrigen soll nur noch die Rechnung für den Punkt 1, der vor- und rückwärts eingeschnitten ist, kurz angedeutet werden:

$$\begin{aligned} v_1 &= -z + a_1 dx_1 + b_1 dy_1 & + a_1 dx_3 + b_1 dy_3 - l_1 \\ v_2 &= -z + a_2 \cdot + b_2 \cdot & + a_2 dx_2 + b_2 dy_2 & - l_2 \\ v_3 &= -z + a_3 \cdot + b_3 \cdot & & - l_3 \\ v_4 &= -z + a_4 \cdot + b_4 \cdot & & - l_4; \end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned} v_1 &= \left( a_1 - \frac{[a]}{4} \right) dx_1 + \left( b_1 - \frac{[b]}{4} \right) dy_1 - \frac{1}{4} a_2 dx_2 - \frac{1}{4} b_2 dy_2 + \frac{3}{4} a_1 dx_3 + \frac{3}{4} b_1 dy_3 - \varrho_1 \\ v_2 &= \left( a_2 - \frac{[a]}{4} \right) \cdot + \left( b_2 - \frac{[b]}{4} \right) \cdot + \frac{3}{4} \cdot + \frac{3}{4} \cdot - \frac{1}{4} \cdot - \frac{1}{4} \cdot - \varrho_2 \\ v_3 &= \left( a_3 - \frac{[a]}{4} \right) \cdot + \left( b_3 - \frac{[b]}{4} \right) \cdot - \frac{1}{4} \cdot - \frac{1}{4} \cdot - \frac{1}{4} \cdot - \frac{1}{4} \cdot - \varrho_3 \\ v_4 &= \left( a_4 - \frac{[a]}{4} \right) \cdot + \left( b_4 - \frac{[b]}{4} \right) \cdot - \frac{1}{4} \cdot - \frac{1}{4} \cdot - \frac{1}{4} \cdot - \frac{1}{4} \cdot - \varrho_4 \end{aligned}$$

und mit den Richtungskoeffizienten

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\rho}{s} \frac{\sqrt{3}}{2}, & a_2 &= 0, & a_3 &= -\frac{\rho}{s} \frac{\sqrt{3}}{2}, & a_4 &= -\frac{\rho}{s} \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ b_1 &= \frac{\rho}{s} \frac{1}{2}, & b_2 &= \frac{\rho}{s}, & b_3 &= \frac{\rho}{s} \frac{1}{2}, & b_4 &= -\frac{\rho}{s} \frac{1}{2}, \\ a_1 &= -\frac{\rho}{s} \frac{\sqrt{3}}{2}, & a_2 &= \bullet, \\ b_1 &= -\frac{\rho}{s} \frac{1}{2}, & b_2 &= -\frac{\rho}{s} \end{aligned}$$

ergeben sich die Anteile der Station 1:

$$\begin{aligned} [AA] &= \frac{\rho^2}{s^2} \cdot \frac{33}{16}, & [AB] &= \frac{\rho^2}{s^2} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{16} \quad \text{usw. bis} \\ [EF] &= \frac{\rho^2}{s^2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{16}, & [FF] &= \frac{\rho^2}{s^2} \cdot \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Faßt man die Normalgleichungsanteile für alle Stationen zusammen — ohne  $\frac{\rho^2}{s^2}$  —, so bekommt man zur Berechnung der ersten Gruppe von  $Q$ -Werten, d. i.  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,12}$ , die Gleichungen:



Der allen Gliedern gemeinsame Faktor  $\frac{\rho^2}{s^2}$  wird erst am Schlusse der Rechnung berücksichtigt, indem die für  $Q_{1,1} \dots Q_{1,12}$  gefundenen Zahlenwerte mit  $\frac{s^2}{\rho^2}$  multipliziert werden.

Obiges Gleichungssystem sollte, bei gleichzeitigem Vorrücken des Absolutgliedes  $-1$  (bzw.  $-\frac{s^2}{\rho^2}$ ) bis in die letzte Gleichung, zwölfmal aufgelöst werden, um alle  $Q$ -Werte bis  $Q_{12,1} \dots Q_{12,12}$  zu erhalten. Die Rechnung läßt sich indes dadurch abkürzen, daß man jeder Reduktionsstufe eine weitere Reihe von Absolutgliedern anhängt, wie im folgenden an den drei Gleichungssystemen zur Bestimmung von  $Q_{1,1} \dots Q_{3,3}$  gezeigt werden soll.

Es sei:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{[aa]} Q_{1,1} + \underline{[ab]} Q_{1,2} + \underline{[ac]} Q_{1,3} - 1 = 0 \\ \quad + \underline{[bb]} \quad \quad + \underline{[bc]} \quad \quad + 0 = 0 \\ \quad \quad \quad + \underline{[cc]} \quad \quad + 0 = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots 1_1$$

ferner

$$\left. \begin{array}{l} \underline{[aa]} Q_{2,1} + \underline{[ab]} Q_{2,2} + \underline{[ac]} Q_{2,3} + 0 = 0 \\ \quad + \underline{[bb]} \quad \quad + \underline{[bc]} \quad \quad - 1 = 0 \\ \quad \quad \quad + \underline{[cc]} \quad \quad + 0 = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots 1_2$$

und

$$\left. \begin{array}{l} \underline{[aa]} Q_{3,1} + \underline{[ab]} Q_{3,2} + \underline{[ac]} Q_{3,3} + 0 = 0 \\ \quad + \underline{[bb]} \quad \quad + \underline{[bc]} \quad \quad + 0 = 0 \\ \quad \quad \quad + \underline{[cc]} \quad \quad - 1 = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots 1_3.$$

Dann lautet die erste Reduktionsstufe der Gleichungen  $1_1$  und  $1_2$ :

$$\underline{[bb.1]} Q_{k,2} + \underline{[bc.1]} Q_{k,3} \left. \begin{array}{l} k=1 \\ k=2 \\ + \frac{[ab]}{[aa]} \quad -1 \\ + \frac{[ac]}{[aa]} \quad +0 \end{array} \right\} = 0 \dots \dots \dots I$$

und sinngemäß die zweite Reduktionsstufe für die Gleichungen  $1_1, 1_2, 1_3$ :

$$\underline{[cc.2]} Q_{k,3} \left. \begin{array}{l} k=1 \\ k=2 \\ k=3 \\ + \frac{[ac]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]} \frac{[bc.1]}{[bb.1]} \\ + \frac{[bc.1]}{[bb.1]} \quad -1 \end{array} \right\} = 0 \dots \dots \dots II$$

Nun liefert die letzte — dreifache — Gleichung II die Werte von  $Q_{1,3}, Q_{2,3}, Q_{3,3}$ , damit die erste — doppelte — Gleichung aus I die Größen  $Q_{1,2}, Q_{2,2}$  und schließlich die erste — einfache — Gleichung aus  $1_1$  den noch fehlenden Wert  $Q_{1,1}$ .

Dieses abgekürzte Verfahren entbehrt der Kontrollen, die in der Beziehung

$$Q_{k,n} = Q_{n,k}$$

liegen; im vorliegenden Falle ist dies bedeutungslos, da die Dreieckskette genügend viele Überprüfungsmöglichkeiten anderer Art bietet.

Von der Auflösung der zwölf Normalgleichungen seien hier nur die Eliminationsgleichungen der einzelnen Reduktionsstufen — mit drei Dezimalen — angeführt.

Siehe beigeheftete Tabelle.

Die sechsstellig geführte Rechnung ergab die nachfolgenden Zahlenwerte, denen noch der Faktor  $\frac{s^2}{\rho^2}$  beizufügen ist:

$Q_{1,12} = + 0\cdot027\ 633$	$Q_{1,11} = + 0\cdot131\ 579$	$Q_{1,10} = + 0\cdot195\ 651$
$Q_2 = + 0\cdot199\ 063$	$Q_2 = + 0\cdot027\ 633$	$Q_2 = + 0\cdot308\ 757$
$Q_3 = - 0\cdot242\ 821$	$Q_3 = + 0\cdot139\ 862$	$Q_3 = - 0\cdot234\ 578$
$Q_4 = + 0\cdot308\ 757$	$Q_4 = + 0\cdot195\ 651$	$Q_4 = + 0\cdot551\ 210$
$Q_5 = - 0\cdot163\ 710$	$Q_5 = + 0\cdot212\ 707$	$Q_5 = - 0\cdot013\ 276$
$Q_6 = + 0\cdot568\ 909$	$Q_6 = + 0\cdot112\ 472$	$Q_6 = + 0\cdot987\ 442$
$Q_7 = - 0\cdot354\ 946$	$Q_7 = + 0\cdot386\ 048$	$Q_7 = - 0\cdot356\ 055$
$Q_8 = + 0\cdot707\ 630$	$Q_8 = + 0\cdot191\ 110$	$Q_8 = + 1\cdot112\ 604$
$Q_9 = - 0\cdot351\ 906$	$Q_9 = + 0\cdot232\ 242$	$Q_9 = - 0\cdot471\ 325$
$Q_{10} = + 0\cdot740\ 452$	$Q_{10} = + 0\cdot022\ 234$	$Q_{10,10} = + 1\cdot387\ 183$
$Q_{11} = - 0\cdot174\ 026$	$Q_{11,11} = + 0\cdot582\ 465$	
$Q_{12,12} = + 0\cdot908\ 502$		

$Q_{1,9} = + 0\cdot139\ 862$	$Q_{1,8} = + 0\cdot112\ 473$	$Q_{1,7} = + 0\cdot212\ 706$
$Q_2 = - 0\cdot242\ 821$	$Q_2 = + 0\cdot568\ 908$	$Q_2 = - 0\cdot163\ 710$
$Q_3 = + 0\cdot394\ 951$	$Q_3 = - 0\cdot522\ 743$	$Q_3 = + 0\cdot520\ 220$
$Q_4 = - 0\cdot234\ 577$	$Q_4 = + 0\cdot987\ 441$	$Q_4 = - 0\cdot013\ 275$
$Q_5 = + 0\cdot520\ 221$	$Q_5 = - 0\cdot401\ 101$	$Q_5 = + 0\cdot559\ 469$
$Q_6 = - 0\cdot522\ 744$	$Q_6 = + 1\cdot519\ 874$	$Q_6 = - 0\cdot401\ 100$
$Q_7 = + 0\cdot610\ 190$	$Q_7 = - 0\cdot519\ 756$	$Q_{7,7} = + 0\cdot999\ 979$
$Q_8 = - 0\cdot571\ 857$	$Q_{8,8} = + 1\cdot901\ 852$	
$Q_{9,9} = + 0\cdot775\ 787$		

$Q_{1,6} = + 0\cdot191\ 111$	$Q_{1,5} = + 0\cdot386\ 047$	$Q_{1,4} = + 0\cdot022\ 235$
$Q_2 = + 0\cdot707\ 631$	$Q_2 = - 0\cdot354\ 945$	$Q_2 = + 0\cdot740\ 453$
$Q_3 = - 0\cdot571\ 856$	$Q_3 = + 0\cdot610\ 189$	$Q_3 = - 0\cdot471\ 324$
$Q_4 = + 1\cdot112\ 605$	$Q_4 = - 0\cdot356\ 054$	$Q_{4,4} = + 1\cdot387\ 184$
$Q_5 = - 0\cdot519\ 756$	$Q_{5,5} = + 0\cdot999\ 978$	
$Q_{6,6} = + 1\cdot901\ 853$		

$Q_{1,3} = + 0\cdot232\ 241$	$Q_{1,2} = - 0\cdot174\ 024$	$Q_{1,1} = + 0\cdot582\ 465$
$Q_2 = - 0\cdot351\ 905$	$Q_{2,2} = + 0\cdot908\ 503$	
$Q_{3,3} = + 0\cdot775\ 786$		

In der besprochenen Dreieckskette sind einander zugeordnet die Punkte:

$\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$ ,

ebenso 1 und 6, daher auch die Zeiger 1 und 11, 2 und 12,

2 „ 5, „ „ „ 3 „ 9, 4 „ 10,

3 „ 4, „ „ „ 5 „ 7, 6 „ 8.

Die Rechnungen erscheinen demnach genügend überprüft durch:

$$Q_{1,1} = Q_{11,11}, \quad Q_{1,2} = Q_{11,12}, \quad Q_{1,3} = Q_{11,9} = Q_{9,11} \text{ usw.};$$

doch sei bemerkt, daß die obigen  $Q$ -Werte auch die sechsstelligen Ausgangsgleichungen vollkommen befriedigen.

Nun lassen sich die mittleren Fehler aller Seiten und Richtungen innerhalb der Dreieckskette leicht berechnen, gleichwie die Fehlerellipsen aller Neupunkte 1, 2, ... 6. Bezeichnet  $m$  den mittleren Fehler einer Richtung vor der Ausgleichung,  $A$  bzw.  $B$  die große bzw. kleine Halbachse der jeweiligen Fehlerellipse und  $\mathfrak{D}$  den Richtungswinkel von  $A$ , so gelten für den Punkt 1:

$$\operatorname{tg} 2 \mathfrak{D} = \frac{2 Q_{1,2}}{Q_{1,1} - Q_{2,2}} \quad \text{und mit} \quad Q = \frac{2 Q_{1,2}}{\sin 2 \mathfrak{D}} = \frac{Q_{1,1} - Q_{2,2}}{\cos 2 \mathfrak{D}}$$

$$A^2 = \frac{m^2}{2} (Q_{1,1} + Q_{2,2} + Q),$$

$$B^2 = \frac{m^2}{2} (Q_{1,1} + Q_{2,2} - Q).$$

Damit findet man für die Punkte 1 und 6:

$$\mathfrak{D} = 113^\circ 26',$$

$$A^2 = \frac{m^2 s^2}{\rho^2} \cdot 0.983 94,$$

$$B^2 = \frac{m^2 s^2}{\rho^2} \cdot 0.507 03;$$

2 und 5:

$$\mathfrak{D} = 118^\circ 31', \quad \left( \operatorname{tg} 2 \mathfrak{D} = \frac{2 Q_{3,4}}{Q_{3,3} - Q_{4,4}} \right)$$

$$A^2 = \frac{m^2 s^2}{\rho^2} \cdot 1.643 27,$$

$$B^2 = \frac{m^2 s^2}{\rho^2} \cdot 0.519 70;$$

3 und 4:

$$\mathfrak{D} = 114^\circ 32',$$

$$A^2 = \frac{m^2 s^2}{\rho^2} \cdot 2.139 02,$$

$$B^2 = \frac{m^2 s^2}{\rho^2} \cdot 0.762 81.$$

Was die mittleren Fehler der ausgeglichenen Richtungen und Seiten anbelangt, so hat man beispielsweise für  $\mathfrak{A}_{,1}$  ( $\nu_{\mathfrak{A}_{,1}} = \nu$ ,  $s_{\mathfrak{A}_{,1}} = s$ ):

$$d\nu = a_1 dx_1 + b_1 dy_1,$$

$$ds = \cos \nu dx_1 + \sin \nu dy_1;$$

daher

$$m_\nu^2 = m^2 (a_1^2 Q_{1,1} + b_1^2 Q_{2,2} + 2 a_1 b_1 Q_{1,2}),$$

$$m_s^2 = m^2 (\cos^2 \nu Q_{1,1} + \sin^2 \nu Q_{2,2} + 2 \cos \nu \sin \nu Q_{1,2})$$

und in Zahlen:

$$m_\nu = m \cdot 0.716,$$

$$m_s = \frac{m s}{\rho} \cdot 0.988 8.$$

Analog lauten die Ansätze etwa für die Richtung 2,4:

$$d\nu = a_4 dx_2 + b_4 dy_2 + a_4 dx_4 + b_4 dy_4,$$

$$ds = -\cos \nu dx_2 - \sin \nu dy_2 + \cos \nu dx_4 + \sin \nu dy_4;$$

demnach

$$m_v^2 = m^2 (a_4^2 Q_{3,3} + b_4^2 Q_{4,4} + a_4^2 Q_{7,7} + b_4^2 Q_{8,8} \\ + 2 a_4 b_4 Q_{3,4} + 2 a_4 a_4 Q_{3,7} + 2 a_4 b_4 Q_{3,8} \\ + 2 b_4 a_4 Q_{4,7} + 2 b_4 b_4 Q_{4,8} + 2 a_4 b_4 Q_{7,8}),$$

$$m_s^2 = m^2 (\cos^2 \nu \{ Q_{3,3} + Q_{7,7} - 2 Q_{3,7} \} + \sin^2 \nu \{ Q_{4,4} + Q_{8,8} - 2 Q_{4,8} \} \\ + 2 \cos \nu \sin \nu \{ Q_{3,4} - Q_{3,8} - Q_{4,7} + Q_{7,8} \})$$

und in Zahlen:

$$m_v = m \cdot 0.697,$$

$$m_s = \frac{m s}{\rho} \cdot 1.250 \text{ 4.}$$

Einen Überblick über die Genauigkeitsverhältnisse innerhalb der Dreieckskette gewährt Abb. 2, in welcher die Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  aus

$$m_v = m \cdot c_1,$$

$$m_s = \frac{m s}{\rho} \cdot c_2$$

bei jeder einzelnen Seite nebeneinander eingetragen sind. Man erkennt, daß die äußeren Dreiecksseiten einen kleineren Richtungs- und einen größeren Längenfehler aufweisen im Gegensatz zu den Querseiten, bei denen der Richtungsfehler im Durchschnitt um 25% größer, der Längenfehler um den gleichen Betrag kleiner ist; all dies stimmt mit der Lage der Fehlerellipsen vollkommen überein.

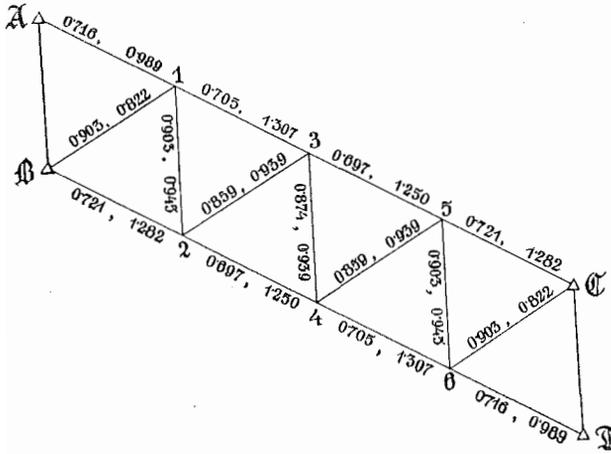


Abb. 2.

Wendet man die obigen Formeln auf Dreiecke erster Ordnung an und setzt

$$m = \pm 1'', \quad s = 50.000 \text{ m,}$$

so erhält man beispielsweise für die Fehlerellipsen in den Punkten 3 und 4:

$$A = 35.5 \text{ cm,} \quad B = 21.2 \text{ cm}$$

und für den mittleren Punktfehler nach der bisher üblichen Berechnungsart

$$M = 41.3 \text{ cm,}$$

ebenso die Richtungs- und Längenfehler der vom Punkte 3 ausgehenden Seiten:

$$m_{\nu_{3,1}} = \pm 0'705'', \quad m_{s_{3,1}} = \pm 31'7 \text{ cm}$$

$$m_{\nu_{3,2}} = \pm 0'859'', \quad m_{s_{3,2}} = \pm 22'8 \text{ cm}$$

$$m_{\nu_{3,4}} = \pm 0'874'', \quad m_{s_{3,4}} = \pm 22'8 \text{ cm}$$

$$m_{\nu_{3,5}} = \pm 0'697'', \quad m_{s_{3,5}} = \pm 30'3 \text{ cm}.$$

Wie groß die Wirkung der Einhängung und Ausgleichung bei obiger Dreieckskette ist, ersieht man am besten, wenn man deren Punktfehler jenen gegenüberstellt, die eine von  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  ausgehende freie Kette aufweisen würde bei  $m = \pm 1''$ ,  $s = 50.000 \text{ m}$ :

$$M_1 = 29'6 \text{ cm}, \quad \mathfrak{M}_1 = 39'6 \text{ cm} \text{ (freie Kette)}$$

$$M_2 = 35'7 \text{ cm}, \quad \mathfrak{M}_2 = 56'0 \text{ cm}$$

$$M_3 = 41'3 \text{ cm}, \quad \mathfrak{M}_3 = 88'5 \text{ cm}$$

$$M_4 = 41'3 \text{ cm}, \quad \mathfrak{M}_4 = 118'8 \text{ cm}$$

$$M_5 = 35'7 \text{ cm}, \quad \mathfrak{M}_5 = 158'3 \text{ cm}$$

$$M_6 = 29'6 \text{ cm}, \quad \mathfrak{M}_6 = 197'9 \text{ cm}$$

$$M_{\mathfrak{C}} = 0 \text{ cm}, \quad \mathfrak{M}_{\mathfrak{C}} = 244'0 \text{ cm}$$

$$M_{\mathfrak{D}} = 0 \text{ cm}, \quad \mathfrak{M}_{\mathfrak{D}} = 290'9 \text{ cm}.$$

## Der Auftragsapparat System Szováty.

Von STEFAN TRÁJBER, Adjunkt für Geodäsie an der Techn. Hochschule in Budapest.

1. Die Tachymetrie als eine Detailaufnahme-Methode bestimmt die Detailpunkte mittels Polarkoordinaten, d. h. durch Messen eines Horizontalwinkels und einer horizontalen Entfernung. Die horizontale Entfernung wird nicht unmittelbar mit Längenmeßgeräten, sondern mittels eines Tachymeters optisch gemessen. Die Tachymetrie ist daher ein äußerst zweckmäßiges und wirtschaftliches Verfahren, besonders im Hügellande und im Gebirge, wo das Gelände zu unmittelbaren Längenmessungen nicht gut geeignet ist. Von bedeutendem Vorteil ist bei der Tachymetrie auch der Umstand, daß mit geringer Mehrarbeit auch die Höhe der Punkte bestimmt werden kann.

Der horizontale Winkel als einer der Polarkoordinaten kann leicht mit der Aufnahme entsprechenden beliebigen Genauigkeit gemessen werden. Doch ist die entsprechend genaue Bestimmung der horizontalen Entfernung mit Schwierigkeiten verbunden. Der Fortschritt aber, den man in den letzten Jahrzehnten auf diesem Gebiete wahrnehmen kann, ermöglicht es, daß heute diese Methode schon auch für Grundstücksaufnahmen, für Kataster- und Grundbuchmessungen im weiten Kreise Verwendung findet.

Beim Auftragen der Meßergebnisse steht die Sache umgekehrt. Das Auftragen der Entfernungen kann auch mit einfachen Geräten entsprechend genau erfolgen, demgegenüber ist das genaue Auftragen der Winkel überaus keine leichte Aufgabe. Deshalb ergab sich auch die Notwendigkeit zur Erzeugung solcher Apparate, mit denen die Winkel mit dem Fortschreiten der Genauigkeit des Messens schritt haltend entsprechend genau aufgetragen werden können