Studie zum mittleren Fehler des arithmetischen Mittels

Wilhelm Tischendorf [1]

[1] *o. Assistent an der Hochschule für Bodenkultur in Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **25** (3), S. 41–47

1927

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.
Redaktion:
Hofrat Prof. Dr. Ing., Dr. techn. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. K. Lego.

Nr. 3. Baden bei Wien, im Juni 1927. XXV. Jahrg.

Studie zum mittleren Fehler des arithmetischen Mittels.

Von Dr. Wilhelm Tischendorf,
o. Assistent an der Hochschule für Bodenkultur in Wien.

Die strenge Form des mittleren Fehlers von Gauß setzt die Verwendung einer sehr großen Zahl von wahren Beobachtungsfehlern voraus. Werden an Stelle der wahren Beobachtungsfehler ε die scheinbaren Fehler v gesetzt, dann ist für $\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}$ der Ausdruck $\frac{[vv]}{n-1}$ zu nehmen, was wieder nur strenge gilt, wenn n eine „größere Zahl" ist.

In dem Maße als n von seinem theoretischen Werte abweicht, wird der mittlere Fehler unsicher, er wird selbst mit einem wachsenden mittleren Fehler behaftet sein.

Hiefür berechnet z. B. Prof. Jordan unter der Annahme eines „größeren Wertes" für n den mittleren Fehler des mittleren Fehlers:

$$m\,(m) = \pm\, m\sqrt{\frac{1}{2\,n}}$$

daher der mittlere Fehler einer Einzelbeobachtung:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}\left(1 \pm \frac{0{\cdot}7071\,..}{\sqrt{n}}\right)$$

oder unter Verwendung der scheinbaren Fehler:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)}}\left(1 \pm \frac{0{\cdot}7071\,..}{\sqrt{n-1}}\right)$$

Allgemein, wenn mehrere Unbekannte u vorliegen:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{(n-u)}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,(n-u)}}\right)$$

Alle diese Angaben setzen voraus, daß n „eine größere Zahl" ist. Wo diese Zahl beginnt, läßt sich allgemein nicht bestimmen, sie muß aber so groß sein, daß der wahre Wert des mittleren Fehlers durch das aus n Fehlern berechnete m ersetzt gedacht werden kann.

Das ist offenbar von jener Grenze an, wo die Gesetzmäßigkeit der unvermeidlichen Beobachtungsfehler merkbar wird; dann aber können auch die scheinbaren Fehler verwendet werden.

In der Praxis, wo immer eine endliche Zahl von Beobachtungen vorliegt, wird daher der mittlere Fehler aus einer Anzahl von Beobachtungen bestimmt, die unter dieser Grenze liegen, gewöhnlich nur aus wenigen, oft nur aus zwei oder drei Beobachtungen gewonnen.

Für so kleine Beobachtungszahlen gelten die Fehlergesetze nicht und geben die berechneten mittleren Fehler nicht nur unverläßliche, sondern falsche Werte, was sich innerhalb jeder größeren Beobachtungsreihe leicht zeigen läßt.

Daher sind bei so kleinen Beobachtungsreihen auch die ausgeglichenen Werte selbst unsicher, die Ausgleichung kann keinen Anspruch auf sicheres Näherkommen der Wahrheit erheben, sondern sie erfüllt in allererster Linie den Zweck, die Widersprüche wegzuschaffen.

Es erscheint widersprechend, aus kleinen Beobachtungsreihen oder gar nur aus zwei oder drei Beobachtungen mittlere Fehler zu berechnen, beziehungsweise für solche mittlere Fehler, deren mittlere Fehler bestimmen zu wollen.

Es soll daher die Unsicherheit mittlerer Fehler aus kleinen Beobachtungsreihen charakterisiert und damit auch jene Grenze, bei der der mittlere Fehler verläßlicher wird, in Verbindung gebracht werden.

Die folgenden Erörterungen beziehen sich auf direkte Beobachtungen, wobei um allgemein zu bleiben, verschiedene Gewichte angenommen werden.

Ausgangspunkt bildet der mittlere Fehler der Gewichtseinheit. Bekanntlich ist bei allen gebräuchlichen Ableitungen dieses Fehlers immer Voraussetzung, daß eine entsprechend große Zahl von Beobachtungen verwendet wird, dann, daß die scheinbaren Fehler ähnliche Gesetze befolgen wie die wahren, und schließlich wird an Stelle der wahren bzw. scheinbaren Beobachtungsfehler als Durchschnittswert der mittlere Fehler gesetzt, alles Annahmen, die nur bei einer sehr großen Beobachtungszahl zutreffen.

Das ist aber bei zwei oder drei Beobachtungen (überhaupt bei Beobachtungen unter etwa 20) nicht der Fall; so z. B. muß die Summe der vv schon bei zwei Beobachtungen Null sein im Gegensatz zu $[\varepsilon\varepsilon]$.

Die scheinbaren Fehler sind nicht untrüglich, denn ihnen haftet der mittlere Fehler des Mittels an.

Zwischen den wahren bzw. scheinbaren Fehlern und dem mittleren Fehler des arithmetischen Mittels besteht folgende Beziehung:

$$\varepsilon = v + M$$

In Ermanglung der wahren Fehler werden die mittleren Fehler gesetzt, daher gilt nur angenähert:

$$m_1 \doteq v_1 + M$$
$$m_2 \doteq v_2 + M$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder jede dieser angenäherten Gleichungen quadriert:

$$m_1^2 = v_1^2 + 2 v_1 M + M^2$$
$$m_2^2 = v_2^2 + 2 v_2 M + M^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

schließlich mit den zukommenden Gewichten multipliziert:

$$p_1 m_1^2 = p_1 v_1^2 + 2 p_1 v_1 M + p_1 M^2$$
$$p_2 m_2^2 = p_2 v_2^2 + 2 p_2 v_2 M + p_2 M^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und die Summe aller dieser Gleichungen:

$$[p\,mm] = [p\,vv] + M^2 [p]$$

Diese angenäherte Gleichung stellt streng genommen eine Ungleichung vor und, um diese Ungleichheit zu beheben, soll $[p\,vv]$ mit einem Koeffizienten q multipliziert werden:

$$[p\,vv] = q\,[p\,vv] + M^2 [p];$$

wird für $[p\,mm] = n\,m_0^2$ gesetzt, wobei m_0 den Gewichtseinheitsfehler bedeutet, dann ist, da auch $M^2 [p] = m_0^2$ ist:

$$n\,m_0^2 - m_0^2 = q\,[p\,vv]$$

und

$$m_0 = q \sqrt{\frac{[p\,vv]}{(n-1)}}$$

da aber

$$m_0 = \sqrt{\frac{[p\,mm]}{n}}$$

so ist

$$q^2 = \frac{(n-1)\,[p\,mm]}{n\,[p\,vv]};$$

q ist somit jener Faktor, der die Beziehung zwischen den mittleren und scheinbaren Fehlern herstellt.

Bei einer kleinen Beobachtungsanzahl, wo einerseits bei den mittleren Fehlern und andererseits bei den scheinbaren Fehlern noch keine Gesetzmäßigkeit bemerkbar sein wird und wo auch die mittleren Fehler noch nicht als Durchschnittswerte aufgefaßt werden können, muß dies durch den Faktor q zum Ausdruck kommen.

Werden aus größeren Beobachtungsreihen der Reihe nach für 2, 3 usw., aber nur für wenige Beobachtungen die einzelnen q berechnet, so sieht man, wie diese Werte herumspringen, also vom Zufall abhängen, wenn auch gewisse Grenzen nicht überschritten werden; von einer gewissen Anzahl von Beobachtungen an angefangen wird q kontinuierlich, was dem beginnenden Einfluß der Gesetze der unvermeidlichen Beobachtungsfehler zuzuschreiben ist, um sich allmählich der Einheit zu nähern, auf welchem Werte q dann mit geringen Abweichungen stehen bleibt. Das ist der Fall, wenn

$$\frac{[p\,mm]}{n} = \frac{[p\,vv]}{(n-1)}$$

also dort, wo infolge der entsprechenden Beobachtungszahl die scheinbaren Fehler gleichen oder ähnlichen Gesetzen der unvermeidlichen folgen.

Wird q gleich der Einheit, dann wird auch der mittlere Fehler der Gewichtseinheit gleichbleibend; mit ihm ergeben sich auch konstante Werte für die mittleren Fehler der Einzelbeobachtung.

Erst von dieser Grenze an werden die mittleren Fehler verläßlich sein und entspricht derselben jene Beobachtungszahl, die früher mit n gleich einer größeren Zahl angenommen wurde.

q läßt sich nur dann bestimmen, wenn eine größere Beobachtungsreihe vorliegt oder wenn verläßliche mittlere Fehler der Beobachtungen zur Verfügung stehen.

Es genügt natürlich, wenn nur von einer Beobachtung der verläßliche mittlere Fehler vorliegt, aber für sämtliche übrigen Beobachtungen einwandfreie Gewichte gegeben sind.

Kann q nicht bestimmt werden, dann ist es auch unmöglich, die mittleren Fehler ihrer absoluten Größe nach zu berechnen; sämtliche mittleren Fehler, und zwar der der Gewichtseinheit oder der der Einzelbeobachtung oder der des ausgeglichenen Wertes sind dann nur innerhalb der betreffenden Beobachtungsreihe untereinander beziehende Werte, die zu mittleren Fehlern anderer Beobachtungsreihen nicht verwendet werden dürfen. Das kommt durch das unbestimmte q zum Ausdruck.

Was von dem mittleren Fehler gilt, betrifft auch die ausgeglichenen Werte selbst.

Wie mittlere Fehler aus wenigen oder gar nur zwei oder drei Beobachtungen unverläßlich sind und zu Unstimmigkeiten führen, so sind auch die ausgeglichenen Werte selbst unsicher.

Sind bei direkten Beobachtungen mit ungleicher Genauigkeit die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen gegeben, dann kann bei Berechnung des Gewichtseinheitsfehlers bzw. des mittleren Fehlers des Mittels von der Bildung der $[vv]$ abgesehen werden:

$$m_0^2 = \frac{[p\,mm]}{n} \qquad\qquad M^2 = \frac{m_0^2}{[p]}$$

wobei, da die $p_1\,m_1^2 = p_2\,m_2^2 = \ldots\ldots$, gleich sind, die Berechnung rasch durchgeführt ist.

Um für die Güte der mittleren Fehler einen Maßstab zu haben, kann q bestimmt werden, wozu die $[vv]$ oder $[l\,l.1] = [l\,l] - nx^2$ berechnet werden muß:

$$q = \frac{(n-1)\,[p\,mm]}{n\,[p\,vv]}$$

und zur Kontrolle:

$$m_0 = q\sqrt{\frac{[p\,vv]}{(n-1)}} \qquad M = q\sqrt{\frac{[p\,vv]}{[p].(n-1)}} \qquad m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{p_1}}$$

Ohne Berücksichtigung von q ergeben sich Widersprüche; das ist namentlich der Fall, wenn bei direkten Beobachtungen von keiner derselben der mittlere Fehler gegeben ist, sondern die ungleiche Genauigkeit durch Gewichte charakterisiert wird.

Die ohne die Kenntnis der mittleren Fehler der Einzelbeobachtungen berechneten mittleren Fehler der Gewichtseinheit usw. haben höchstens Anspruch auf Wahrscheinlichkeit, auf Relativwerte und können mit mittleren Fehlern anderer Beobachtungsreihen nicht verglichen werden; das ist nur bei größerer Beobachtungsreihen zulässig, dann aber erreichen diese Relativwerte die Eigenschaft von absoluten Größen.

Auf das einfache arithmetische Mittel übertragen:

Hier werden $p_1 = p_2 = \ldots\ldots = 1$; $m_1 = m_2 = \ldots\ldots = m$, daher:

$$q^2 = \frac{(n-1)\,m^2}{[vv]}$$

und der mittlere Fehler der Einzelbeobachtung:

$$m = q\sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)}}$$

d. h. der mittlere Fehler m und damit auch M lassen sich nur aus einer entsprechend großen Beobachtungsreihe verläßlich bestimmen. Nur in diesem Falle wird q bekannt sein, d. h.: es kann mit Eins angenommen werden; sonst aber muß vor jedem mittleren Fehler ein unbestimmt gelassener Faktor gesetzt werden, auf dessen Größe nur annähernd aus der Beobachtungszahl geschlossen werden kann.

Je größer diese ist, desto mehr nähert sich q der Einheit. Daher müßte jeder mittlere Fehler entweder als Absolutwert angegeben sein oder zumindestens die Beobachtungszahl, aus der er gewonnen wurde.

Allein als solcher besagt er zu wenig und ist er unverläßlich, was jede Beobachtungsreihe zeigen kann; z. B.:

Zu den zwei Beobachtungen $l_1 = 40^0\,20'\,38''$ und $l_2 = 40^0\,20'\,34''$ gehörten die mittleren Fehler $m_1 = \pm\,6''$ und $m_2 = \pm\,2''$.

	l	m	p	v	pv	vv	pvv
1	38″	6″	1	− 3·6	− 3·6	12·96	12·96
2	34″	2″	9	+ 0·4	+ 3·6	0·16	1·44

Ohne Berücksichtigung des Faktors q:

$$m_0' = \sqrt{\frac{[p\,vv]}{(n-1)}} = \pm\,3{\cdot}80''$$

$$M' = \frac{3{\cdot}80''}{\sqrt{10}} = \pm\,1{\cdot}20''$$

M' ist offenbar viel zu klein, denn wenn beide Beobachtungen einen mittleren Fehler von $\pm\,2''$ haben würden, dann ergibt sich für

$$M'' = \frac{2''}{\sqrt{2}} = \pm\ 1{\cdot}41''$$

also ein Widerspruch, der durch die Berücksichtigung von q beseitigt wird:

$$q = \sqrt{\frac{[p\,mm]}{2\,[p\,vv)}} = \pm\ 1{\cdot}58$$

$$m_0 = m'\,q = 1{\cdot}58\,.\,3{\cdot}80'' = \pm\ 6{\cdot}00''$$

$$m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{p_1}} = \pm\ 6{\cdot}00'' \quad M = \pm\ 1{\cdot}90''$$

oder einfacher:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[p\,mm]}{n}} = \sqrt{\frac{72}{2}} = \pm\ 6{\cdot}00''$$

Wären nur die Gewichte gegeben, also $p = 1$, $p = 9$, so erhält man ohne Berücksichtigung von q, das hier unbestimmt bleibt, so wie früher:

$$m'_0 = \pm\ 3{\cdot}80'' \qquad M' = \pm\ 1{\cdot}20''$$

das können nur Größen sein, die nur im Verhältnis zueinander richtig sein werden, denn die Gewichtszahlen entsprechen beliebigen mittleren Fehlern, wenn nur zwischen denselben das Verhältnis besteht:

$$m_1^2 : m_2^2 = p_2 : p_1$$

Als Beispiel für Beobachtungen mit gleicher Genauigkeit seien die 18 Winkelbeobachtungen aus Jordan, I., Seite 22, gewählt. Es entstammt der „Gradmessung in Ostpreußen" (S. 78), in der Bessel für den Winkel Medniken-Fuchsberg auf der Station Trenk 18 unabhängige Messungen gibt.

Beobachtung Nr. 1 beträgt: 83° 30′ 36·25″, wovon wie für die folgenden Beobachtungen nur die Sekundenzahl über 30 angeführt ist.

	l	ll	$[ll]$	x	nx^2	$[vv]$	q
1	6·25	39·06					
2	7·50	56·25	95·31	6·875	94·53	0·78	1·882
3	6·00	36·00	131·31	6·583	130·01	1·29	1·980
4	4·77	22·75	154·06	6·130	150·32	3·74	1·487
5	3·75	14·06	168·12	5·654	159·85	8·37	1·156
6	0·25	0·06	168·18	4·753	135·54	32·64	0·651
7	3·70	13·69	181·87	4·603	148·33	33·54	0·703
8	6·14	37·70	219·57	4·795	183·92	35·65	0·736
9	4·04	16·32	235·89	4·711	199·71	36·17	0·782
10	6·96	48·44	284·33	4·936	243·60	40·73	0·781
11	3·16	9·99	294·33	4·775	251·35	42·97	0·802
12	4·57	20·88	315·20	4·758	271·68	43·52	0·836
13	4·75	22·56	337·76	4·757	294·19	43·57	0·872
14	6·50	42·25	380·01	4·882	333·62	46·39	0·880
15	5·00	25·00	405·01	4·889	359·50	46·51	0·911
16	4·75	22·56	427·57	4·880	381·12	46·45	0·944
17	4·25	18·06	445·63	4·843	398·65	46·98	0·970
18	5·25	27·56	473·19	4·886	436·20	46·99	1·000

Es werden der Reihe 2, 3 usw. bis einschließlich alle 18 Beobachtungen zusammengezogen, die einfachen Mittel und die zugehörigen $[vv]$ gebildet, die hier aus Bequemlichkeitsgründen aus $[ll] - n\,x^2$ ermittelt wurden.

Ab 14 Beobachtungen ändert sich das Mittel nur mehr wenig und würden auch Beobachtungen über 18, sofern sie mit der gleichen Genauigkeit erfolgten, eine Änderung des Mittels nicht mehr erzielen. Damit erreicht der mittlere Fehler einer Einzelbeobachtung ab dieser Grenze eine gewisse Beständigkeit und kann daher m aus 18 Beobachtungen eine gewisse Verläßlichkeit nicht abgesprochen werden; oder m wird der Absolutgröße gleichgesetzt werden können.

Unter Zugrundelegung dieses Wertes für $m = 1{\cdot}66''$ wurden für sämtliche wie früher erwähnten Beobachtungsreihen die Korrektionszahlen q berechnet. Innerhalb der ersten 5 Beobachtungsreihen ergeben sich große Unterschiede, die resultierenden Fehler sind völlig unverläßlich und würden eine falsche Vorstellung geben.

So z. B. erhält man bei Zusammenziehung der 3 ersten Beobachtungen für $m = \pm\, 0{\cdot}80''$ und für $M = \pm\, 0{\cdot}46''$,[1] also den mittleren Fehler der Einzelbeobachtung viel zu klein und die Genauigkeit des ausgeglichenen Wertes fast ebenso groß als für das Mittel aus allen 18 Beobachtungen, das sich mit $\pm\, 0{\cdot}39''$ ergibt, was also heißen würde, daß 3 Beobachtungen ein fast ebenso gutes Resultat liefern als alle 18.

Ebenso erhält man aus den ersten 5 Beobachtungen, bei denen sich q zufällig der Einheit nähert, einen mittleren Fehler der Einzelbeobachtung, der zum Unterschied zu den Nachbarresultaten ebenso gut ist wie der aus allen Beobachtungen gewonnene. Für 6 Beobachtungen ergibt sich der mittlere Fehler plötzlich größer, um von da an ziemlich regelmäßig abzunehmen und sich dem der Einheit zu nähern.

Man sieht ganz deutlich, wie sich allmählich der Einfluß der Gesetze der unvermeildichen Beobachtungsfehler geltend macht.

Es wäre nicht uninteressant, größere Beobachtungsreihen in diesem Sinne zu überprüfen.

Diese Betrachtungen lassen sich auch auf die vermittelnden und bedingten Beobachtungen anwenden.

Graphische Fehlerrechnung mit Anwendung von Williot-Plänen.

Von Ing. Dr. techn. Franz Faltus.

(Fortsetzung.)

3. Williot-Pläne.

Williot löst folgende zwei Grundaufgaben:

a) (Fig. 7*a*, *b*.) An zwei feste Punkte A, B ist durch zwei Stäbe ein dritter Punkt C angeschlossen (einfachster Aufbau eines Fachwerkes). Gegeben sind die Verschiebungsvektoren der Punkte A und B ... A_1, B_1 sowie die Längen-