

Paper-ID: VGI_192613



Zur Theorie der Papierdeformation

Viktor Theimer ¹

¹ o. Assistent an der Montanistischen Hochschule in Leoben

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **24, 25** (5, 1), S. 69–74, 8–19

1926, 1927

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Theimer_VGI_192613,  
Title = {Zur Theorie der Papierdeformation},  
Author = {Theimer, Viktor},  
Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {69--74, 8--19},  
Number = {5, 1},  
Year = {1926, 1927},  
Volume = {24, 25}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion:

Hofrat Prof. Dr. Ing., Dr. techn. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. K. Lego.

Nr. 5.

Wien, im Oktober 1926.

XXIV. Jahrgang.

Zur Theorie der Papierdeformation.

Von Viktor Theimer, o. Assistent an der Montanistischen Hochschule in Leoben.

A. Die Koordinatenverzerrung.

Die Grundlage für die Herstellung eines Planes bildet ein genau entworfenes Hektarnetz, dem ein gewisser Verjüngungsmaßstab v (etwa $1/2500$) zugrundegelegt wird. (Figur 1).

Die Felder des Netzes sind Quadrate, von je 100 m Natur-Seitenlänge. Infolge der Temperatur- und Feuchtigkeitsänderungen der Luft treten besonders nach dem Abschneiden des Planes vom Zeichenbrette (bei Meßtischaufnahmen) ziemlich bedeutende Papierdeformationen ein, welche eine Verzerrung aller aufgetragenen Koordinaten und sonstigen Linien bewirken.

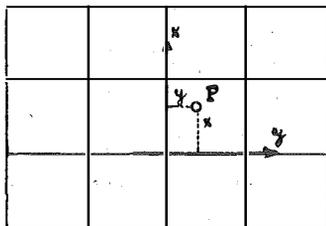


Fig. 1.

Mithin bilden auch die Netzlinien nach der Deformation keine Quadrate mehr mit vorgeschriebenen Seitenlängen, sondern schwachgekrümmte Kurven, welche im allgemeinen unregelmäßige Vierecke bestimmen, die näherungsweise als geradlinig begrenzt angenommen werden können. (Figur 2).

Unter Benützung dieser Annahme, ergeben sich zwischen den ursprünglichen richtigen Koordinaten (x, y) eines Punktes P und den infolge Papierdeformation verzerrten Koordinaten (ξ, η) desselben Punktes nachstehende mathematische Beziehungen:

Angenommen das ursprüngliche Hektarquadrat mit den Seitenlängen L sei in ein Parallelogramm mit den Seitenlängen l_ξ und l_η übergegangen, dann wird die spezifische Längenverzerrung, d. i. die

Längenverzerrung pro Längeneinheit

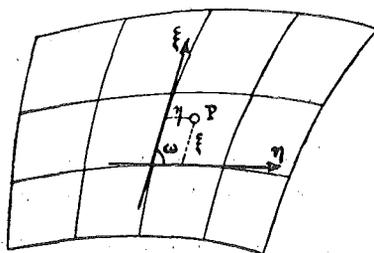


Fig. 2.

in der Richtung der ξ -Achse gleich ... $E_\xi = \frac{1}{L} \cdot (l_\xi - L)$ 1)
 „ „ „ „ η -Achse „ . . . $E_\eta = \frac{1}{L} \cdot (l_\eta - L)$

Vergleiche die Figuren 3 und 4.

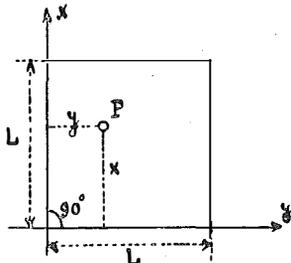


Fig. 3.

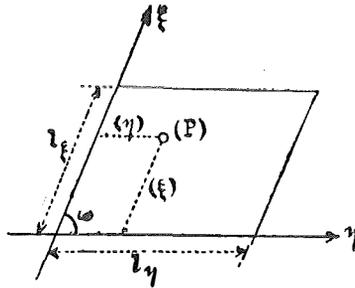


Fig. 4.

Hatte also der ursprüngliche Punkt P die Koordinaten x, y , dann hat der verschobene Punkt (P) die Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} (\xi) &= x + x \cdot E_\xi = x \cdot (1 + E_\xi) \\ (\eta) &= y + y \cdot E_\eta = y \cdot (1 + E_\eta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

Diese Parallelogramm-Deformation des Papiers ist auch der weitaus häufigste Fall der Planverzerrung. —

Hat sich dagegen das ursprüngliche Hektarquadrat nicht in ein Parallelogramm, sondern in ein allgemeines Viereck umgewandelt, dann erhält man nach Figur 5 folgende Beziehungen:

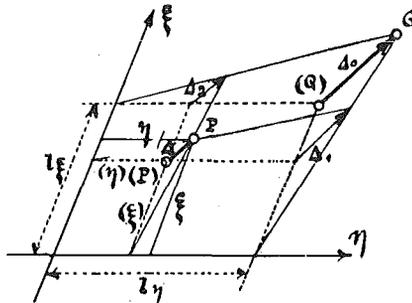


Fig. 5.

Zunächst einmal kann man sich die Deformation des Hektarquadrates in das oben besprochene, in Figur 5 strichliert eingezeichnete Parallelogramm vollzogen denken, wodurch der ursprüngliche Punkt $P \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ in die Position $(P) \begin{Bmatrix} (\xi) \\ (\eta) \end{Bmatrix}$ übergeht, deren Koordinaten durch 2) bestimmt sind, d. h. es wird

$$\left. \begin{aligned} (\xi) &= x (1 + E_\xi); \\ (\eta) &= y (1 + E_\eta); \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 3)$$

Für die Annahme muß der rechtsseitige obere Eckpunkt des Hektar-
quadrates beziehungsweise Parallelogrammes in (Q) liegen. —

Tatsächlich aber ist dieser Eckpunkt gar nicht in (Q) geblieben, sondern
nach Q gewandert und dementsprechend haben auch alle anderen Punkte
des Feldes eine Verschiebung in den Pfeilrichtungen erfahren.

So ist schließlich auch der Punkt (P) $\left\{ \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\}$ nach $P \left\{ \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\}$ gerückt und seine
Verschiebungsstrecke Δ , kann wie folgt bestimmt werden:

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_2} = \frac{l_\eta}{(\eta)}; \dots \Delta_2 = \Delta_0 \cdot \frac{(\eta)}{l_\eta}; \dots \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{l_\xi}{(\xi)}; \dots \Delta = \Delta_2 \cdot \frac{(\xi)}{l_\xi} = \frac{\Delta_0}{l_\xi l_\eta} \cdot (\xi) \cdot (\eta)$$

Analog ist aber auch

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1} = \frac{l_\xi}{(\xi)}; \dots \Delta_1 = \Delta_0 \cdot \frac{(\xi)}{l_\xi}; \dots \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{l_\eta}{(\eta)}; \dots \Delta = \Delta_1 \cdot \frac{(\eta)}{l_\eta} = \frac{\Delta_0}{l_\xi l_\eta} \cdot (\xi) \cdot (\eta)$$

Man findet also für die Punktverschiebung Δ denselben Wert, gleichgültig
ob man über Δ_1 oder über Δ_2 rechnet, d. h. es ist eindeutig

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{l_\xi \cdot l_\eta} \cdot (\xi) \cdot (\eta); \dots \dots \dots 4)$$

Bezeichnet man die Projektionen der Punktverschiebung Δ auf die
Koordinatenachsen ξ und η mit v_ξ und v_η , dann findet man aus Figur 6:

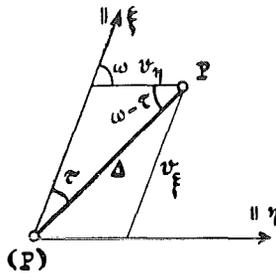


Fig. 6.

$$\left. \begin{aligned} v_\xi &= \Delta \cdot \frac{\sin(\omega - \tau)}{\sin \omega} = \frac{\Delta_0}{l_\xi l_\eta} \cdot (\xi) \cdot (\eta) \cdot \frac{\sin(\omega - \tau)}{\sin \omega} = e_\xi \cdot (\xi) \cdot (\eta); \dots \\ \text{wobei } \dots e_\xi &= \frac{\Delta_0}{l_\xi l_\eta} \cdot \frac{\sin(\omega - \tau)}{\sin \omega}; \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots 5)$$

$$\left. \begin{aligned} v_\eta &= \Delta \cdot \frac{\sin \tau}{\sin \omega} = \frac{\Delta_0}{l_\xi l_\eta} \cdot (\xi) \cdot (\eta) \cdot \frac{\sin \tau}{\sin \omega} = e_\eta \cdot (\xi) \cdot (\eta); \dots \\ \text{wobei } \dots e_\eta &= \frac{\Delta_0}{l_\xi \cdot l_\eta} \cdot \frac{\sin \tau}{\sin \omega}; \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 6)$$

Damit erhält man aber für die Koordinaten des Punktes P die Aus-
drücke:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (\xi) + v_\xi \cdot \frac{3)}{5} x(1 + E_\xi) + e_\xi \cdot (\xi) \cdot (\eta) \cdot \frac{3)}{5} x(1 + E_\xi) + e_\xi(1 + E_\xi)(1 + E_\eta) \cdot x \cdot y \\ \eta &= (\eta) + v_\eta = y(1 + E_\eta) + e_\eta \cdot (\xi) \cdot (\eta) = y(1 + E_\eta) + e_\eta(1 + E_\xi)(1 + E_\eta) \cdot x \cdot y \end{aligned} \right\} 7)$$

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} 1 + E_{\xi} &= A_1; \dots e_{\xi} \cdot (1 + E_{\xi}) (1 + E_{\eta}) = B_1 \dots \\ 1 + E_{\eta} &= A_2; \dots e_{\eta} (1 + E_{\xi}) (1 + E_{\eta}) = B_2 \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 8)$$

Dann wird nach 7):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A_1 x + B_1 x y = x (A_1 + B_1 y) \dots \dots \dots \\ \eta &= A_2 y + B_2 x y = y (A_2 + B_2 x) \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 9)$$

Umgekehrt kann man aus diesen Gleichungen x und y als Funktionen von ξ und η darstellen. Die exakte Auflösung wäre aber für praktische Zwecke nicht gut brauchbar, weshalb hier lieber ein Näherungsverfahren angewendet werden soll, welches x und y bis einschließlich der Glieder zweiter Kleinheitsordnung liefert.

Setzt man nämlich

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi + \alpha \dots \dots \\ y &= \eta + \beta \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 10)$$

dann sind α und β im allgemeinen kleine Größen erster Ordnung.

Beobachtet man ferner, daß A_1 und A_2 nur wenig von Eins verschieden sein können, so erkennt man, daß auch die Zahlen $(1 - A_1)$ und $(1 - A_2)$ kleine Größen erster Ordnung sind, wie auch die Größen e_{ξ} und e_{η} nach 5) und 6) und dementsprechend auch die Größen B_1 und B_2 als kleine Größen von mindestens erster Ordnung erkannt werden.

Nach diesen Klarstellungen erhält man aus 9) und 10):

$$\xi = A_1 (\xi + \alpha) + B_1 (\xi + \alpha) (\eta + \beta) = A_1 \xi + B_1 \xi \eta + A_1 \alpha + B_1 \alpha \eta + B_1 \beta \xi + \underline{B_1 \alpha \beta}$$

klein v. III. Ordnung.

$$\eta = A_2 (\eta + \beta) + B_2 (\xi + \alpha) (\eta + \beta) = A_2 \eta + B_2 \xi \eta + A_2 \beta + B_2 \alpha \eta + B_2 \beta \xi + \underline{B_2 \alpha \beta}$$

Oder $\xi \doteq (A_1 \xi + B_1 \xi \eta) + \alpha (A_1 + B_1 \eta) + \beta \cdot (B_1 \xi)$

Oder $\eta \doteq (A_2 \eta + B_2 \xi \eta) + \beta (A_2 + B_2 \xi) + \alpha \cdot (B_2 \eta)$

$$\left. \begin{aligned} \alpha \cdot (A_1 + B_1 \eta) + \beta \cdot (B_1 \xi) &= \xi (1 - A_1 - B_1 \eta) \\ \alpha \cdot (B_2 \eta) + \beta \cdot (A_2 + B_2 \xi) &= \eta (1 - A_2 - B_2 \xi) \end{aligned} \right\} \dots \dots 11)$$

Das sind zwei lineare Gleichungen mit den Unbekannten α und β .

Die Determinante dieses Systems ist:

$$D = \begin{vmatrix} (A_1 + B_1 \eta), & (B_1 \xi) \\ (B_2 \eta), & (A_2 + B_2 \xi) \end{vmatrix} = (A_1 + B_1 \eta) (A_2 + B_2 \xi) - (B_1 \xi) \cdot (B_2 \eta) =$$

$$= A_1 A_2 + B_1 A_2 \eta + B_2 A_1 \xi + B_1 B_2 \xi \eta - B_1 B_2 \xi \eta.$$

$$D = A_1 A_2 + B_1 A_2 \eta + A_1 B_2 \xi; \dots \dots \dots 12)$$

Die Zählerdeterminante von α lautet:

$$D_{\alpha} = \begin{vmatrix} \xi \cdot (1 - A_1 - B_1 \eta), & (B_1 \xi) \\ \eta \cdot (1 - A_2 - B_2 \xi), & (A_2 + B_2 \xi) \end{vmatrix} = \xi \cdot \{ (1 - A_1 - B_1 \eta) \cdot (A_2 + B_2 \xi) - B_1 \eta (1 - A_2 - B_2 \xi) \} =$$

$$= \xi \{ (1 - A_1) A_2 - A_2 B_1 \eta + (1 - A_1) B_2 \xi - B_1 B_2 \xi \eta - B_1 \eta + A_2 B_1 \eta + B_1 B_2 \xi \eta \};$$

$$D_{\alpha} = \xi \cdot \{ (1 - A_1) A_2 + (1 - A_1) B_2 \cdot \xi - B_1 \eta \} \dots \dots \dots 13)$$

Analog findet man für die Zählerdeterminante von β den Ausdruck:

$$D_{\beta} = \begin{vmatrix} (A_1 + B_1 \eta), & \xi \cdot (1 - A_1 - B_1 \eta) \\ (B_2 \eta), & \eta \cdot (1 - A_2 - B_2 \xi) \end{vmatrix} = \eta \cdot \{ (1 - A_2) A_1 + (1 - A_2) B_1 \eta - B_2 \xi \}; 14)$$

Damit findet man bei Unterdrückung der Glieder von dritter Kleinheitsordnung:

$$\alpha = \frac{D_{\alpha 12}}{D^{12}} \frac{\xi \cdot \{(1 - A_1) A_2 + (1 - A_1) B_2 \xi - B_1 \eta\}}{A_1 A_2 \cdot \left\{1 + \frac{B_1}{A_1} \cdot \eta + \frac{B_2}{A_2} \cdot \xi\right\}} =$$

$$\doteq \frac{\xi}{A_1 A_2} \left\{ (1 - A_1) A_2 + (1 - A_1) B_2 \xi - B_1 \eta \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{B_1}{A_1} \eta - \frac{B_2}{A_2} \xi \right\};$$

$$\alpha = \frac{\xi}{A_1 A_2} \cdot \left[\begin{array}{l} (1 - A_1) A_2 + (1 - A_1) B_2 \xi - B_1 \eta \\ \quad \quad \quad - (1 - A_1) \frac{B_1}{A_1} \cdot A_2 \eta + \frac{B_1^2}{A_1} \cdot \eta^2 \\ \quad \quad \quad - (1 - A_1) \cdot B_2 \cdot \xi \quad \quad \quad + \frac{B_1 B_2}{A_2} \cdot \xi \eta \end{array} \right];$$

$$\alpha = \frac{\xi}{A_1 A_2} \cdot \left\{ (1 - A_1) A_2 - B_1 \eta \cdot \left(1 + \frac{1 - A_1}{A_1} \cdot A_2 \right) + \frac{B_1^2}{A_1} \cdot \eta^2 + \frac{B_1 B_2}{A_2} \cdot \xi \eta \right\} =$$

$$\xi \cdot \left\{ \frac{1 - A_1}{A_1} - \frac{B_1}{A_1} \cdot \left(\frac{1}{A_2} + \frac{1 - A_1}{A_1} \right) \cdot \eta + \frac{B_1^2}{A_1^2 A_2} \cdot \eta^2 + \frac{B_1 B_2}{A_1 A_2^2} \cdot \xi \eta \right\};$$

$$\beta = \frac{D_{\beta}}{D} = \frac{\eta \cdot \{(1 - A_2) A_1 + (1 - A_2) B_1 \eta - B_2 \xi\}}{A_1 A_2 \cdot \left\{1 + \frac{B_1}{A_1} \cdot \eta + \frac{B_2}{A_2} \cdot \xi\right\}} =$$

$$\doteq \frac{\eta}{A_1 A_2} \cdot \{(1 - A_2) A_1 + (1 - A_2) B_1 \eta - B_2 \xi\} \cdot \left\{ 1 - \frac{B_1}{A_1} \cdot \eta - \frac{B_2}{A_2} \cdot \xi \right\};$$

$$\beta = \frac{\eta}{A_1 A_2} \cdot \left[\begin{array}{l} (1 - A_2) \cdot A_1 + (1 - A_2) B_1 \cdot \eta - B_2 \cdot \xi \\ \quad \quad \quad - (1 - A_2) \cdot B_1 \cdot \eta \quad \quad + \frac{B_1 B_2}{A_1} \cdot \xi \eta \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - (1 - A_2) \cdot \frac{B_2}{A_2} \cdot A_1 \xi \quad \quad + \frac{B_2^2}{A_2} \cdot \xi^2 \end{array} \right];$$

$$\beta = \frac{\eta}{A_1 A_2} \cdot \left\{ (1 - A_2) A_1 - B_2 \xi \cdot \left(1 + \frac{1 - A_2}{A_2} \cdot A_1 \right) + \frac{B_2^2}{A_2} \cdot \xi^2 + \frac{B_1 B_2}{A_1} \cdot \xi \eta \right\} =$$

$$\doteq \eta \cdot \left\{ \frac{1 - A_2}{A_2} - \frac{B_2}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1 - A_2}{A_2} \right) \cdot \xi + \frac{B_2^2}{A_1 A_2^2} \cdot \xi^2 + \frac{B_1 B_2}{A_1^2 A_2} \cdot \xi \eta \right\};$$

Setzt man die eben gefundenen Werte von α und β in die Gleichungen 10) ein, dann kommt:

$$x = \xi + \alpha = \xi \left\{ \frac{1}{A_1} - \frac{B_1}{A_1} \cdot \left(\frac{1}{A_2} + \frac{1 - A_1}{A_1} \right) \eta + \frac{B_1^2}{A_1^2 A_2} \cdot \eta^2 + \frac{B_1 B_2}{A_1 A_2^2} \cdot \xi \eta \right\} \dots \dots \dots 15)$$

$$y = \eta + \beta = \eta \cdot \left\{ \frac{1}{A_2} - \frac{B_2}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1 - A_2}{A_2} \right) \cdot \xi + \frac{B_2^2}{A_1 A_2^2} \cdot \xi^2 + \frac{B_1 B_2}{A_1^2 A_2} \cdot \xi \eta \right\} \dots \dots \dots 16)$$

Setzt man jetzt

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = \frac{1}{A_1}; \dots K_2 = -\frac{B_1}{A_1} \cdot \left(\frac{1}{A_2} + \frac{1 - A_1}{A_1} \right); \dots K_3 = \frac{B_1^2}{A_1^2 A_2}; \dots K_4 = \frac{B_1 B_2}{A_1 A_2^2}; \\ C_1 = \frac{1}{A_2}; \dots C_2 = -\frac{B_2}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1 - A_2}{A_2} \right); \dots C_3 = \frac{B_2^2}{A_1 A_2^2}; \dots C_4 = \frac{B_1 B_2}{A_1^2 A_2}; \end{array} \right\} 17)$$

dann erhält man endgültig:

Zur Theorie der Papierdeformation.

Von Viktor Theimer, o. Assistent an der Montanistischen Hochschule in Leobert.

(Schluß.)

B. Seitenverzerrung.

Nun seien zwei Punkte $P_1 \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{Bmatrix}$ und $P_2 \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{Bmatrix}$ vorgelegt. Ihre fehlerfreie Entfernung sei s , ihre Entfernung im Plan dagegen S . Dann wird

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2;$$

$$\begin{aligned} S^2 &= (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + 2 (\xi_2 - \xi_1) (\eta_2 - \eta_1) \cos \omega \stackrel{9)}{=} \\ &= \{A_1 (x_2 - x_1) + B_1 (x_2 y_2 - x_1 y_1)\}^2 + \{A_2 (y_2 - y_1) + B_2 (x_2 y_2 - x_1 y_1)\}^2 + \\ &\quad + 2 \{A_1 (x_2 - x_1) + B_1 (x_2 y_2 - x_1 y_1)\} \cdot \{A_2 (y_2 - y_1) + B_2 (x_2 y_2 - x_1 y_1)\} \cdot \cos \omega; \\ S^2 &= A_1^2 \cdot (x_2 - x_1)^2 + 2 A_1 B_1 (x_2 - x_1) (x_2 y_2 - x_1 y_1) + B_1^2 \cdot (x_2 y_2 - x_1 y_1)^2 + \\ &\quad + A_2^2 (y_2 - y_1)^2 + 2 A_2 B_2 (y_2 - y_1) (x_2 y_2 - x_1 y_1) + B_2^2 \cdot (x_2 y_2 - x_1 y_1)^2 + \\ &\quad + 2 \cdot \cos \omega \{A_1 A_2 (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) + A_1 B_2 \cdot (x_2 - x_1) (x_2 y_2 - x_1 y_1) + \\ &\quad + A_2 B_1 (y_2 - y_1) (x_2 y_2 - x_1 y_1) + B_1 B_2 (x_2 y_2 - x_1 y_1)\} \end{aligned}$$

Beachtet man, daß

$x_2 y_2 - x_1 y_1 = x_2 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_1 - x_1 y_1 = x_2 (y_2 - y_1) + y_1 (x_2 - x_1)$,
und daß außerdem

$$\text{also} \quad \left. \begin{aligned} x_2 - x_1 &= s \cos \rho; \dots y_2 - y_1 = s \sin \rho, \\ x_2 y_2 - x_1 y_1 &= s [x_2 \sin \rho + y_1 \cdot \cos \rho], \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 24)$$

so erkennt man, daß obiger Ausdruck für S^2 auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{s^2} &= A_1^2 \cos^2 \rho + 2 A_1 B_1 x_2 \cdot \sin \rho \cos \rho + 2 A_1 B_1 y_1 \cdot \cos^2 \rho + B_1^2 x_2^2 \sin^2 \rho + \\ &\quad + 2 B_1^2 x_2 y_1 \sin \rho \cos \rho + B_1^2 y_1^2 \cos^2 \rho + \\ &\quad + A_2^2 \sin^2 \rho + 2 A_2 B_2 x_2 \cdot \sin^2 \rho + 2 A_2 B_2 y_1 \sin \rho \cos \rho + B_2^2 x_2^2 \sin^2 \rho + \\ &\quad + 2 B_2^2 x_2 y_1 \sin \rho \cos \rho + B_2^2 y_1^2 \cos^2 \rho + \\ &\quad + 2 \cos \omega \cdot \{A_1 A_2 \sin \rho \cos \rho + A_1 B_2 x_2 \sin \rho \cos \rho + A_1 B_2 y_1 \cos^2 \rho + \\ &\quad + A_2 B_1 x_2 \sin^2 \rho + A_2 B_1 y_1 \sin \rho \cos \rho + \\ &\quad + B_1 B_2 x_2^2 \sin^2 \rho + 2 B_1 B_2 x_2 y_1 \sin \rho \cos \rho + B_1 B_2 y_1^2 \cos^2 \rho\}; \end{aligned}$$

oder bei Anordnung nach den auftretenden Winkelfunktionen

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{s^2} &= \cos^2 \rho \cdot \{(A_1 + B_1 y_1)^2 + B_2^2 y_1^2 + 2 B_2 y_1 \cos \omega \cdot (A_1 + B_1 y_1)\} + \\ &\quad + \sin^2 \rho \cdot \{(A_2 + B_2 x_2)^2 + B_1^2 x_2^2 + 2 B_1 x_2 \cos \omega (A_2 + B_2 x_2)\} + \\ &\quad + 2 \sin \rho \cos \rho \cdot \{B_1 x_2 (A_1 + B_1 y_1) + B_2 y_1 \cdot (A_2 + B_2 x_2) + \\ &\quad + \cos \omega [A_1 \cdot (A_2 + B_2 x_2) + B_1 y_1 (A_2 + B_2 x_2) + B_1 B_2 x_2 y_1]\}; \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann aber auch so geschrieben werden:..

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{s^2} &= \frac{(A_1 + B_1 y_1) \cdot \cos^2 \rho \cdot \{(A_1 + B_1 y_1) + \frac{B_2^2 y_1^2}{A_1 + B_1 y_1} + 2 B_2 y_1 \cdot \cos \omega\} +}{+ (A_2 + B_2 x_2) \sin^2 \rho \cdot \{(A_2 + B_2 x_2) + \frac{B_1^2 x_2^2}{A_2 + B_2 x_2} + 2 B_1 x_2 \cos \omega\} +} \\ &\quad + \frac{2 \sin \rho \cos \rho \cdot \{B_1 x_2 (A_1 + B_1 y_1) + B_2 y_1 (A_2 + B_2 x_2) + B_1 B_2 x_2 y_1 \cos \omega +}{+ (A_1 + B_1 y_1) (A_2 + B_2 x_2) \cos \omega\}}; \dots \dots \dots 25) \end{aligned}$$

Oder mit Rücksicht auf die Gleichungen 9) auch so:

$$\frac{S^2}{s^2} = \frac{\xi_1}{x_1} \cdot \cos^2 \rho \cdot \left\{ \frac{\xi_1}{x_1} + B_2^2 y_1^2 \cdot \frac{x_1}{\xi_1} + 2 B_2 y_1 \cos \omega \right\} + \frac{\eta_2}{y_2} \sin^2 \rho \cdot \left\{ \frac{\eta_2}{y_2} + B_1^2 x_2^2 \cdot \frac{y_2}{\eta_2} + 2 B_1 x_2 \cos \omega \right\} + 2 \sin \rho \cos \rho \cdot \left\{ B_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \xi_1 + B_2 \cdot \frac{y_1}{y_2} \cdot \eta_2 + B_1 B_2 \cdot x_2 y_1 \cos \omega + \frac{\xi_1}{x_1} \cdot \frac{\eta_2}{y_2} \cdot \cos \omega \right\}; \dots \dots \dots 26)$$

Aus den Gleichungen 25) oder 26) kann man den Zahlenwert Φ des Verhältnisses $\frac{S^2}{s^2}$ berechnen und findet dann aus diesem Zahlenwerte

$$\frac{S}{s} = \sqrt{\Phi}; \dots S = s \cdot \sqrt{\Phi}; \dots s = \frac{S}{\sqrt{\Phi}}; \dots \dots \dots 27)$$

Die strengen Formeln 25) oder 26) sind aber etwas unbequem; und es wird im allgemeinen genügen, sich mit einer Näherungsformel zu begnügen, in welcher alle Größen zweiter Kleinheitsordnung vernachlässigt werden. —

Um eine solche Formel zu gewinnen, hat man zu beachten, daß $\omega \doteq 90^\circ$ ist, daß also $\cos \omega$ eine Größe erster Kleinheitsordnung vorstellt. Damit findet man aus 26):

$$\frac{S^2}{s^2} \doteq \left(\frac{\xi_1}{x_1} \right)^2 \cos^2 \rho + \left(\frac{\eta_2}{y_2} \right)^2 \sin^2 \rho + \sin (2\rho) \cdot \left\{ B_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \xi_1 + B_2 \cdot \frac{y_1}{y_2} \cdot \eta_2 + \frac{\xi_1 \eta_2}{x_1 y_2} \cos \omega \right\}; 28)$$

Diese Formel ist aber relativ einfach. —

Die Bestimmung des in dieser Formel auftretenden Winkels ω erledigt man am einfachsten durch direkte Abmessungen der verzerrten Hektarnetzseiten l_ξ und l_η und der von links oben nach rechts unten führenden Hektardagonale d , unter Benützung der Formel:

$$\cos \omega = \frac{l_\xi^2 + l_\eta^2 - d^2}{2 l_\xi l_\eta}; \dots \dots \dots 29)$$

C. Richtungsverzerrung infolge Papierdeformation.

Ist ρ der fehlerfreie Richtwinkel einer Strecke $\overrightarrow{P_1 P_2} = s$ in der Natur beziehungsweise im nichtverzerrten Plane und σ der Richtwinkel der Bildstrecke im verzerrten Plan, dann definieren wir als Richtungsverzerrung jenen kleinen Winkel $d\rho$, für welchen

$$\sigma = \rho + d\rho; \dots \dots \dots 30)$$

Aus Figur 7 lassen sich zur Bestimmung des Winkels σ nachstehende Beziehungen finden:

$$\frac{\xi_2 - \xi_1}{\eta_2 - \eta_1} = \frac{\sin(\omega - \sigma)}{\sin \sigma} = \sin \omega \cotg \sigma - \cos \omega$$

$$\sin \omega \cotg \sigma = \frac{(\xi_2 - \xi_1) + (\eta_2 - \eta_1) \cdot \cos \omega}{\eta_2 - \eta_1};$$

$$\tg \sigma = \frac{(\eta_2 - \eta_1) \sin \omega}{(\xi_2 - \xi_1) + (\eta_2 - \eta_1) \cos \omega}; \dots \dots \dots 31)$$

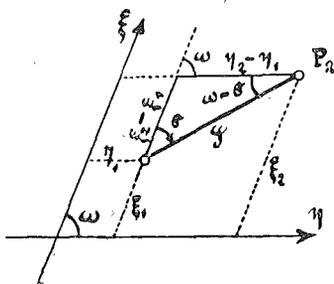


Fig. 7.

Nun ist nach 9)

$$\xi_2 = A_1 x_2 + B_1 x_2 y_2$$

$$\xi_1 = A_1 x_1 + B_1 x_1 y_1$$

$$\xi_2 - \xi_1 = A_1 (x_2 - x_1) + B_1 (x_2 y_2 - x_1 y_1) \stackrel{24)}{=} s \cdot \{A_1 \cos \rho + B_1 x_2 \sin \rho + B_1 y_1 \cos \rho\}$$

oder $\xi_2 - \xi_1 = s \{(A_1 + B_1 y_1) \cos \rho + B_1 x_2 \sin \rho\}$
 analog $\eta_2 - \eta_1 = s \{(A_2 + B_2 x_2) \sin \rho + B_2 y_1 \cos \rho\}$ 32)

32) in 31) eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sigma &= \frac{\{(A_2 + B_2 x_2) \sin \rho + B_2 y_1 \cos \rho\} \cdot \sin \omega}{(A_1 + B_1 y_1) \cos \rho + B_1 x_2 \sin \rho + \{(A_2 + B_2 x_2) \sin \rho + B_2 y_1 \cos \rho\} \cdot \cos \omega} = \\ &= \frac{\{(A_2 + B_2 x_2) \operatorname{tg} \rho + B_2 y_1\} \sin \omega}{(A_1 + B_1 y_1) + B_1 x_2 \cdot \operatorname{tg} \rho + \{(A_2 + B_2 x_2) \operatorname{tg} \rho + B_2 y_1\} \cdot \cos \omega} \stackrel{30)}{=} \\ &= \operatorname{tg} (\rho + d\rho) = \operatorname{tag} \rho + \frac{d\rho}{\cos^2 \rho} \end{aligned}$$

Daraus wird $\frac{d\rho}{\cos^2 \rho} =$

$$\frac{\{(A_2 + B_2 x_2) \operatorname{tg} \rho + B_2 y_1\} \sin \omega - (A_1 + B_1 y_1) \operatorname{tg} \rho - B_1 x_2 \operatorname{tg}^2 \rho - \{(A_2 + B_2 x_2) \operatorname{tg}^2 \rho + B_2 y_1 \operatorname{tg} \rho\} \cos \omega}{(A_1 + B_1 y_1) + B_1 x_2 \operatorname{tg} \rho + \{(A_2 + B_2 x_2) \operatorname{tg} \rho + B_2 y_1\} \cos \omega};$$

$$d\rho = \cos^2 \rho \cdot \frac{B_2 y_1 \sin \omega + \{(A_2 + B_2 x_2) \sin \omega - (A_1 + B_1 y_1) - B_2 y_1 \cos \omega\} \operatorname{tg} \rho - \{B_1 x_2 + (A_2 + B_2 x_2) \cos \omega\} \operatorname{tg}^2 \rho}{(A_1 + B_1 y_1) + B_2 y_1 \cos \omega + \{B_1 x_2 + (A_2 + B_2 x_2) \cos \omega\} \operatorname{tg} \rho} \dots 33)$$

Auch dieser Ausdruck kann mit Hilfe der Gleichungen 9) wie folgt umgeformt werden:

$$d\rho = \cos^2 \rho \cdot \frac{B_2 y_1 \sin \omega + \left\{ \frac{\eta_2^2}{y_2^2} \sin \omega - \frac{\xi_1}{x_1} - B_2 y_1 \cos \omega \right\} \operatorname{tg} \rho - \left\{ B_1 x_2 + \frac{\eta_2}{y_2} \cos \omega \right\} \operatorname{tg}^2 \rho}{\frac{\xi_1}{x_1} + B_2 y_1 \cos \omega + \left\{ B_1 x_2 + \frac{\eta_2}{y_2} \cos \omega \right\} \operatorname{tg} \rho}; \quad 34)$$

Die Gleichungen 33) und 34) sind wieder etwas umständlich für die ziffernmäßige Auswertung. Unterdrückt man aber die Glieder zweiter Kleinheitsordnung auf der rechten Seite von 34) und setzt man im Zähler $\sin \omega \doteq 1$, dann erhält man:

$$\begin{aligned}
 d\rho &\doteq \cos^2 \rho \cdot \frac{B_2 y_1 + \left\{ \frac{\eta_2}{y_2} - \frac{\xi_1}{x_1} \right\} \operatorname{tg} \rho - \left\{ B_1 x_2 + \frac{\eta_2}{y_2} \cdot \cos \omega \right\} \cdot \operatorname{tg}^2 \rho}{\frac{\xi_1}{x_1} \cdot \left\{ 1 + \left(B_1 x_2 \frac{x_1}{\xi_1} + \frac{\eta_2}{y_2} \cdot \frac{x_1}{\xi_1} \cos \omega \right) \operatorname{tg} \rho \right\}} = \\
 &\doteq \frac{x_1}{\xi_1} \cdot \cos^2 \rho \cdot \left\{ B_2 y_1 + \left(\frac{\eta_2}{y_2} - \frac{\xi_1}{x_1} \right) \operatorname{tg} \rho - \right. \\
 &\quad \left. - \left(B_1 x_2 + \frac{\eta_2}{y_2} \cdot \cos \omega \right) \operatorname{tg}^2 \rho \right\} \cdot \left\{ 1 - \left(B_1 x_2 \frac{x_1}{\xi_1} + \frac{\eta_2}{y_2} \frac{x_1}{\xi_1} \cos \omega \right) \operatorname{tg} \rho \right\} = \\
 &\doteq \frac{x_1}{\xi_1} \cdot \cos^2 \rho \cdot \left\{ B_2 y_1 + \left(\frac{\eta_2}{y_2} - \frac{\xi_1}{x_1} \right) \operatorname{tg} \rho - \right. \\
 &\quad \left. - \left(B_1 x_2 + \frac{\eta_2}{y_2} \cdot \cos \omega \right) \operatorname{tg}^2 \rho - \left(\frac{\eta_2}{y_2} - \frac{\xi_1}{x_1} \right) \left(B_1 x_2 \cdot \frac{x_1}{\xi_1} + \frac{\eta_2}{y_2} \frac{x_1}{\xi_1} \cos \omega \right) \operatorname{tg}^2 \rho \right\} \\
 &= \frac{x_1}{\xi_1} \cdot \cos^2 \rho \cdot \left\{ B_2 y_1 + \left(\frac{\eta_2}{y_2} - \frac{\xi_1}{x_1} \right) \operatorname{tg} \rho - \right. \\
 &\quad \left. - \left(B_1 x_2 + \frac{\eta_2}{y_2} \cdot \cos \omega + B_1 x_2 \frac{\eta_2}{y_2} \frac{x_1}{\xi_1} - B_1 x_2 + \frac{\eta_2^2}{y_2^2} \frac{x_1}{\xi_1} \cos \omega - \frac{\eta_2}{y_2} \cos \omega \right) \operatorname{tg}^2 \rho \right\} \\
 d\rho &\doteq \cos^2 \rho \cdot \left\{ B_2 y_1 \cdot \frac{x_1}{\xi_1} + \left(\frac{x_1}{\xi_1} \cdot \frac{\eta_2}{y_2} - 1 \right) \operatorname{tg} \rho - \left(B_1 x_2 \cdot \frac{x_1^2}{\xi_1^2} \cdot \frac{\eta_2}{y_2} + \frac{x_1^2}{\xi_1^2} \cdot \frac{\eta_2^2}{y_2^2} \cos \omega \right) \operatorname{tg}^2 \rho \right\} \quad 35)
 \end{aligned}$$

Diese Formel liefert zunächst einmal die Richtungsverzerrung $d\rho$ im Bogenmaße; will man sie im Winkelmaße (Sekunden) ausdrücken, dann muß man den erhaltenen Zahlenwert mit 206.265'' multiplizieren. —

Spezialisierung für die Parallelogrammdeformation.

In dem besonderen, aber sehr häufig zutreffenden Falle einer Parallelogrammdeformation wird in Figur 5) ... $\Delta_0 = 0$, also nach 5) und 6), ...

$$e_\xi = e_\eta = 0$$

und nach 8) ...

$$B_1 = B_2 = 0$$

Mithin erhält man aus 9)

$$\left. \begin{aligned}
 \xi &= A_1 \cdot x \frac{s}{\xi} (1 + E_\xi) \cdot x \\
 \eta &= A_2 \cdot y \frac{s}{\eta} (1 + E_\eta) \cdot y
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 36)$$

da ferner wegen 17) ... $K_2 = K_3 = K_4 = 0$... und ... $C_2 = C_3 = C_4 = 0$, wird, so folgt aus 18)

$$\left. \begin{aligned}
 x &= K_1 \cdot \xi \frac{17)}{A_1} \cdot \xi = \frac{1}{1 + E_\xi} \cdot \xi \doteq (1 - E_\xi) \cdot \xi \\
 y &= C_1 \eta = \frac{1}{A_2} \cdot \eta = \frac{1}{1 + E_\eta} \cdot \eta \doteq (1 - E_\eta) \cdot \eta
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 37)$$

Die Gleichung 26) liefert in diesem Falle für das Quadrat des Längenverhältnisses

$$\left(\frac{S}{s} \right)^2 = \left(\frac{\xi_1}{x_1} \right)^2 \cdot \cos^2 \rho + \left(\frac{\eta_2}{y_2} \right)^2 \sin^2 \rho + \frac{\xi_1}{x_1} \cdot \frac{\eta_2}{y_2} \cos \omega \cdot 2 \sin \rho \cos \rho ;$$

Nun ist aber wegen 36)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi_1}{x_1} &= 1 + E_{\xi} = (\text{Konstante}) = A_1 \\ \frac{\eta_2}{y_2} &= 1 + E_{\eta} = (\text{Konstante}) = A_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 38)$$

also
$$\left(\frac{S}{s} \right)^2 = A_1^2 \cos^2 \rho + 2 \sin \rho \cos \rho \cdot \cos \omega \cdot A_1 A_2 + A_2^2 \sin^2 \rho \dots 39)$$

Dieser Ausdruck ist aber nicht mehr eine Funktion des Ortes wie der entsprechende Ausdruck 26) bzw. der Näherungsausdruck 28) des allgemeinen Falles, sondern er ist lediglich eine Funktion des Richtwinkels ρ . —

Um seine Extremwerte zu finden, differenzieren wir ihn nach ρ und erhalten:

$$\frac{d\left(\frac{S}{s}\right)^2}{d\rho} = -2 A_1^2 \cos \rho \sin \rho + 2 A_1 A_2 (\cos^2 \rho - \sin^2 \rho) \cos \omega + 2 A_2^2 \cdot \sin \rho \cos \rho$$

$$= (-A_1^2 + A_2^2) \sin (2\rho) + 2 A_1 A_2 \cos (2\rho) \cdot \cos \omega;$$

$$\frac{d\left(\frac{S}{s}\right)^2}{d\rho} = 0, \dots \text{für} \dots (-A_1^2 + A_2^2) \sin (2\rho) + 2 A_1 A_2 \cos (2\rho) \cdot \cos \omega = 0$$

oder
$$\underline{\underline{\text{tg} (2\rho) = 2 \cdot \frac{A_1 A_2}{A_1^2 - A_2^2} \cdot \cos \omega; \dots \dots \dots 40)}$$

Daraus findet man zwei Werte

$$2\rho = 2\rho_1 \text{ und } 2\rho = 2\rho_1 + 180^\circ;$$

also
$$\underline{\underline{\rho = \rho_1 \quad \rho = \rho_2 = \rho_1 + 90^\circ; \dots \dots \dots 41)}$$

Diese beiden Richtungen stehen aber aufeinander normal. Dies liefert den Satz:

Bei Parallelogrammdeformation des Papierses treten die Extremwerte des Verhältnisses $\left(\frac{S}{s}\right)$ in zwei zueinander senkrechten Richtungen auf, in denen natürlich auch die Maximal- bzw. Minimalverzerrung des Papierses eingetreten ist. —

Speziell für Rechteckdeformation ist $\omega = 90^\circ$, $\cos \omega = 0$, also nach 40) $\text{tg} (2\rho) = 0$;

$$\underline{\underline{\rho_1 = 0; \quad \rho_2 = 90^\circ; \dots \dots \dots 42)}$$

d. h.: *Bei Rechteckdeformation, fallen die Extremwerte des Verhältnisses $\left(\frac{S}{s}\right)$ in die Richtungen der Koordinatenachsen. —*

Will man die Gleichung der Bildkurve für eine gegebene Naturkurve $F(x, y) = 0 \dots 43)$ ermitteln, dann setze man einfach in die Kurvengleichung 43) die Werte für x und y ein. Speziell für Parallelogrammdeformation des Papierses ist nach 37)

$$x = \frac{\xi}{A_1}; \dots y = \frac{\eta}{A_2};$$

und das in 43) eingesetzt gibt:

$$\underline{\underline{F\left(\frac{\xi}{A_1}, \frac{\eta}{A_2}\right) = 0; \dots \dots \dots 44)}$$

Dies ist aber eine Kurve vom gleichen Grade, wie die ursprüngliche. Daher der Satz:

Bei Parallelogrammdeformation des Planes ist Originalkurve und verzerrte Bildkurve vom gleichen Grade. —

So wird zum Beispiel der Kreis

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \dots \dots \dots 45)$$

abgebildet in der Kurve

$$\left(\frac{\xi}{A_1} - x_0\right)^2 + \left(\frac{\eta}{A_2} - y_0\right)^2 = R^2 \dots \dots \dots 46)$$

Schreibt man diese letzte Gleichung so,

$$\left(\frac{\xi - A_1 x_0}{A_1 R}\right)^2 + \left(\frac{\eta - A_2 y_0}{A_2 R}\right)^2 = 1 \dots \dots \dots 47)$$

und nimmt man jetzt eine Parallelkoordinatentransformation der schiefwinkligen Koordinatenachsen ξ, η nach dem Punkte $\xi_0 = A_1 x_0; \dots \eta_0 = A_2 y_0$ vor, das heißt, setzt man der Figur 8) entsprechend

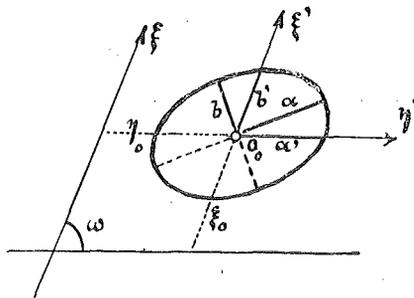


Fig. 8.

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \xi - \xi_0 = \xi - A_1 x_0 \\ \eta' &= \eta - \eta_0 = \eta - A_2 y_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 48)$$

dann nimmt die Kurvengleichung 47) die Form

$$\frac{\xi'^2}{(A_1 R)^2} + \frac{\eta'^2}{(A_2 R)^2} = 1 \dots \dots \dots 49)$$

an. Das ist aber die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf ein konjugiertes Durchmesserpaar als Koordinatenachsen. —

Die halben Durchmesserlängen sind: $a' = A_1 R; \dots b' = A_2 R; \dots$ 50)

Beachtenswert ist noch der Umstand, daß die Koordinaten des ursprünglichen Kreismittelpunktes (x_0, y_0) übergehen in die verzerrten Koordinaten

$$\xi_0 = A_1 \cdot x_0, \dots \eta_0 = A_2 \cdot y_0; \dots \dots \dots 51)$$

durch welche der Ursprung o_0 des Parallelkoordinatensystems ξ', η' bestimmt wurde, der wegen 49) mit dem Mittelpunkt der Bildellipse identisch ist. —

Daher erhält man den Satz:

Ein Kreis der Natur bildet sich bei Parallelogrammdeformation des Planes in einer Ellipse ab und das verzerrte Bild des Kreismittelpunktes fällt mit dem Ellipsenmittelpunkte zusammen. —

Die Richtwinkel, die den Hauptachsen der Bildellipse zugeordnet sind, werden aus Gleichung 40) gewonnen und sind mit den in 41) angegebenen Werten ρ_1 und ρ_2 identisch. —

Mit diesen Richtwinkeln findet man die Längen der Hauptachsen a und b der Bildellipse aus Formel 39), wenn man in derselben $s = R$ und S einmal gleich a bzw. einmal gleich b setzt. — Man erhält so:

$$a^2 = (A_1^2 \cos^2 \rho_1 + 2 A_1 A_2 \sin \rho_1 \cos \rho_1 + A_2^2 \sin^2 \rho_1) \cdot R^2 \quad \dots 52)$$

$$b^2 = (A_1^2 \sin^2 \rho_1 - 2 A_1 A_2 \sin \rho_1 \cos \rho_1 + A_2^2 \cos^2 \rho_1) \cdot R^2 \dots \text{weil } \rho_2 = \rho_1 + 90^\circ;$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, dann erhält man:

$$a^2 + b^2 = (A_1^2 + A_2^2) R^2; \quad \dots \dots \dots 53)$$

Wählt man zwei beliebige, zueinander normale Kreisdurchmesser mit den Richtung ρ_1 und $\rho_{II} = \rho_1 + 90^\circ$ und sind S_I und S_{II} die zugeordneten Bildlängen dieser Kreisdurchmesser, dann wird nach 39) analog wie oben

$$\left. \begin{aligned} S_I^2 &= (A_1^2 \cos^2 \rho_1 + 2 A_1 A_2 \sin \rho_1 \cos \rho_1 + A_2^2 \cdot \sin^2 \rho_1) R^2 \\ S_{II}^2 &= (A_1^2 \sin^2 \rho_1 - 2 A_1 A_2 \sin \rho_1 \cos \rho_1 + A_2^2 \cdot \cos^2 \rho_1) R^2 \end{aligned} \right\} \dots 54)$$

$$S_I^2 + S_{II}^2 = (A_1^2 + A_2^2) R^2 = a^2 + b^2;$$

d. h.: Die Summe der Quadrate der Bildstrecken zweier zueinander normaler Kreishalbmesser ist konstant und gleich der Summe der Quadrate der Halbachsen der Bildellipse. —

Da dies aber eine charakteristische Eigenschaft konjugierter Ellipsenhalbmesser ist, so bekommt man den bemerkenswerten Satz:

Bei Parallelogrammdeformation eines Planes werden je zwei zueinander senkrechte Kreishalbmesser als konjugierte Halbmesser der Bildellipse abgebildet. —

Bezüglich der Richtungsverzerrung bei Parallelogrammdeformation folgt aus 35) wegen $B_1 = B_2 = 0$ der Ausdruck:

$$d\rho = \cos^2 \rho \cdot \left\{ \left(\frac{\eta_2}{y_2} \frac{x_1}{\xi_1} - 1 \right) \operatorname{tg} \rho - \left(\frac{x_1}{\xi_1} \right)^2 \left(\frac{\eta_2}{y_2} \right)^2 \cos \omega \operatorname{tg}^2 \rho \right\} = (\text{weil nach 9) } \dots \dots$$

$$\frac{x_1}{\xi_1} = \frac{1}{A_1} \dots \text{ und } \dots \frac{\eta_2}{y_2} = A_2 \dots \text{ ist)}$$

$$= \cos^2 \rho \cdot \left\{ \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right) \cdot \operatorname{tg} \rho - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \cdot \cos \omega \cdot \operatorname{tg}^2 \rho \right\} = \frac{A_2 - A_1}{A_1} \sin \rho \cos \rho -$$

$$- \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \cos \omega \sin^2 \rho$$

oder
$$d\rho = \sin \rho \cdot \left\{ \frac{A_2 - A_1}{A_1} \cos \rho - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \cos \omega \cdot \sin \rho \right\} = f(\rho) \quad \dots \dots 55)$$

Mithin wird die Richtungsverzerrung $d\rho = 0$, ... einerseits für ... $\sin \rho = 0$; ... also ... $\rho_1 = 0$; ... bzw. ... $\rho_2 = 180^\circ$; ... 56)

andererseits für ... $\frac{A_2 - A_1}{A_1} \cdot \cos \rho - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \cos \omega \cdot \sin \rho = 0$

also ...
$$\operatorname{tg} \rho = \frac{A_1 A_2 - A_1^2}{A_2^2} \cdot \frac{1}{\cos \omega}; \dots \dots \dots 57)$$

daraus
$$\rho = \rho_3; \dots \rho = \rho_4 = \rho_3 + 180^\circ.$$

Will man nun auch noch die Extremwerte der Richtungsverzerrung ermitteln, dann hat man die Funktion $d\rho = f(\rho)$ nach ρ zu differenzieren und die Ableitung gleich Null zu setzen.

Man erhält aus 55):

$$\begin{aligned} \frac{df(\rho)}{d\rho} &= \frac{A_2 - A_1}{A_1} \cdot (\cos^2 \rho - \sin^2 \rho) - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \cos \omega \cdot 2 \sin \rho \cos \rho = \\ &= \frac{A_2 - A_1}{A_1} \cos (2\rho) - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \cos \omega \sin (2\rho); \end{aligned}$$

also $\frac{df(\rho)}{d\rho} = 0, \dots$ für $\dots \frac{A_2 - A_1}{A_1} \cos (2\rho) - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \cos \omega \sin (2\rho) = 0$

oder $\underline{\underline{\text{tg} (2\rho_0) = \frac{A_1 A_2 - A_1^2}{A_2^2} \cdot \frac{1}{\cos \omega}; \dots \dots \dots 58}}$

Daraus findet man zwei Werte:

$$2\rho_0 = 2\rho_{01}; \quad \text{und} \quad 2\rho_0 = 2\rho_{02} = 2\rho_{01} + 180^\circ$$

also $\rho_0 = \rho_{01} \quad \text{und} \quad \rho_0 = \rho_{02} = \rho_{01} + 90^\circ; \dots \dots \dots 59)$

d. h.: Die Richtungen, für welche die maximale bzw. minimale Richtungsverzerrung eintritt, stehen bei Parallelogrammdeformation des Papiers zueinander normal. —

Vergleicht man noch die rechten Seiten von 58) und 57), so sieht man, daß sie denselben Ziffernwert besitzen. Daraus folgt aber, daß

$$2\rho_{01} = \rho_3 \quad \text{und} \quad 2\rho_{02} = \rho_4 \dots \dots \dots 60)$$

sein muß; und dies gibt den bemerkenswerten Satz:

Bei Parallelogrammdeformation des Papiers sind die zueinander senkrechten Richtungen, für welche die Richtungsdeformation ihre Extremwerte erreicht, identisch mit den Winkelsymmetralen jener Richtungen, für die überhaupt keine Richtungsdeformation eintritt. —

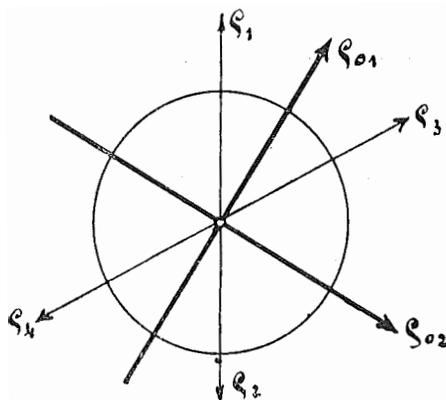


Fig. 9.

II. Teil.

In den vorstehenden Untersuchungen ist gezeigt worden, wie man mit Hilfe des Hektarliniennetzes die Koordinatentransformationsformeln 9) und 18) der Papierdeformation eines Planes ermitteln kann.

Hat man aber die Transformationsformeln gefunden, dann ist es möglich, in dem verzerrten Plane Neupunkte derart einzutragen, daß die Bildpunkte mit der bereits vorhandenen Papierdeformation behaftet sind.

Hat man nämlich die Feldkoordinaten X, Y eines Naturpunktes gegeben, dann rechne man zunächst die auf den als Ursprung gewählten Hektarnetzpunkt reduzierten Parallelkoordinaten x, y und mit diesen nach entsprechender Verjüngung die verzerrten Koordinaten ξ, η des Bildpunktes. Letztere sind dann abzutragen.

Umgekehrt kann man aus dem Plane durch direkte Abmessungen der verzerrten Koordinaten ξ, η eines vorhandenen Bildpunktes die reduzierten Koordinaten x, y des zugeordneten Naturpunktes mit Hilfe der Gleichungen 18) finden und aus diesen dann die Naturkoordinaten $X Y$ des entsprechenden Feldpunktes ableiten.

Voraussetzung für diese Arbeiten ist jedoch, daß die Hektarnetzlinien im Plane tatsächlich vorhanden sind, wie dies ja z. B. bei Grubenplänen meistens der Fall ist.

In Plänen dagegen, in welchen die Hektarnetzlinien lediglich durch Randmarken angedeutet erscheinen, können die Transformationsformeln 9) und 18) nicht unmittelbar angewendet werden, weil es unmöglich ist, die Transformationskoeffizienten A_1, A_2, B_1, B_2 , in der bisher angedeuteten Weise zu ermitteln.

Wohl aber kann man in diesem Falle folgenden Weg einschlagen:

Koeffizientenbestimmung der Papierdeformation aus Plänen ohne Hektarnetzen.

Bei Herleitung der Formel 25) zur Berechnung der Seitenverzerrung ist nachstehende Gleichung aufgetreten:

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{s}\right)^2 = & A_1^2 \cos^2 \rho + 2 A_1 B_1 x_2 \sin \rho \cos \rho + 2 A_1 B_1 y_1 \cdot \cos^2 \rho + B_1^2 x_2^2 \sin^2 \rho + \\ & + 2 B_1^2 x_2 y_1 \sin \rho \cos \rho + B_1^2 y_1^2 \cos^2 \rho + \\ & + A_2^2 \sin^2 \rho + 2 A_2 B_2 y_1 \sin \rho \cos \rho + 2 A_2 B_2 x_2 \sin^2 \rho + B_2^2 x_2^2 \sin^2 \rho + \\ & + 2 B_2^2 x_2 y_1 \sin \rho \cos \rho + B_2^2 y_1^2 \cos^2 \rho + \\ & + 2 \cos \omega \cdot \{ A_1 A_2 \sin \rho \cos \rho + A_1 B_2 x_2 \sin \rho \cos \rho + \\ & + A_1 B_2 y_1 \cdot \cos^2 \rho + A_2 B_1 x_2 \sin^2 \rho + A_2 B_1 y_1 \sin \rho \cos \rho + \\ & + B_1 B_2 (x_2^2 \sin^2 \rho + 2 x_2 y_1 \sin \rho \cos \rho + y_1^2 \cos^2 \rho) \} \end{aligned}$$

Ordnet man diese Gleichung nach den Transformationskoeffizienten, so kommt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{s}\right)^2 = & A_1^2 \cdot \cos^2 \rho + \underline{2 A_1 B_1 \cdot (x_2 \sin \rho + y_1 \cos \rho) \cos \rho} + \underline{B_1^2 \cdot (x_2 \sin \rho + y_1 \cos \rho)^2} + \\ & + A_2^2 \sin^2 \rho + \underline{2 A_2 B_2 (x_2 \sin \rho + y_1 \cos \rho) \sin \rho} + \underline{B_2^2 \cdot (x_2 \sin \rho + y_1 \cos \rho)^2} + \\ & + 2 A_1 A_2 \cos \omega \cdot \sin \rho \cos \rho + \underline{2 A_1 B_2 \cos \omega \cdot (x_2 \sin \rho + y_1 \cos \rho) \cdot \cos \rho} + \\ & + \underline{2 A_2 B_1 \cos \omega (x_2 \sin \rho + y_1 \cos \rho) \sin \rho} + \\ & + \underline{2 B_1 B_2 \cos \omega \cdot (x_2 \sin \rho + y_1 \cos \rho)^2}; \end{aligned}$$

Faßt man jetzt die gleichartig unterstrichenen Glieder zusammen, dann erhält man:

$$\left(\frac{S}{s}\right)^2 = A_1^2 \cos^2 \rho + A_2^2 \sin^2 \rho + 2 A_1 A_2 \cos \omega \cdot \sin \rho \cos \rho +$$

$$+ 2 A_1 \cdot (B_1 + B_2 \cos \omega) \cdot (x_2 \sin \rho + y_1 \cos \rho) \cos \rho +$$

$$+ 2 A_2 (B_2 + B_1 \cos \omega) \cdot (x_2 \sin \rho + y_1 \cos \rho) \sin \rho +$$

$$+ (B_1^2 + 2 B_1 B_2 \cos \omega + B_2^2) \cdot (x_2 \sin \rho + y_1 \cos \rho)^2;$$

Setzt man jetzt:

$$\left. \begin{aligned} A_1^2 &= \xi_1 \dots \dots \dots \cos^2 \rho = a \\ A_1 A_2 \cos \omega &= \xi_2 \dots \dots \dots 2 \sin \rho \cos \rho = b \\ A_2^2 &= \xi_3 \dots \dots \dots \sin^2 \rho = c \\ A_1 (B_1 + B_2 \cos \omega) &= \xi_4 \dots \dots 2 (x_2 \sin \rho + y_1 \cos \rho) \cos \rho = d \\ A_2 (B_2 + B_1 \cos \omega) &= \xi_5 \dots \dots 2 (x_2 \sin \rho + y_1 \cos \rho) \sin \rho = e \\ B_1^2 + 2 B_1 B_2 \cos \omega + B_2^2 &= \xi_6 \dots \dots \dots (x_2 \sin \rho + y_1 \cos \rho)^2 = f \\ & - \left(\frac{S}{s}\right)^2 = l \end{aligned} \right\} \dots 61$$

dann erhält die letzte Gleichung die einfache Form:

$$a \xi_1 + b \xi_2 + c \xi_3 + d \xi_4 + e \xi_5 + f \xi_6 + l = 0; \dots \dots \dots 62)$$

Ehe nun weitergegangen wird, beweise man nachstehenden Satz:

Durch r -Punkte in einer Ebene sind im allgemeinen

$$n = \frac{r}{2} \cdot (r - 1)$$

geradlinige Verbindungsstrecken bestimmt.

Der Beweis kann etwa so geführt werden:

Der	r^{te}	Punkt	bestimmt	mit	den	übrigen	$(r-1)$	Punkten,	genau	$(r-1)$	Strecken
„	$(r-1)^{\text{te}}$	„	„	„	„	„	$(r-2)$	„	„	$(r-2)$	„
.....
„	2^{te}	„	„	„	„	dem	übrigen	1^{ten}	Punkte	1 Strecke

Zusammen ergibt das als Streckenzahl:

$$\dots n = 1 + 2 + 3 + \dots + (r - 1) = \frac{r}{2} \cdot (r - 1); \dots \dots \dots 63)$$

Sind also, um wieder auf das ursprüngliche Thema zurückzukommen, $r \geq 4$ Punkte im Plane vorhanden, deren Naturkoordinaten bekannt sind, dann werden durch diese Punkte ... $n = \frac{r}{2} (r - 1)$... Strecken bestimmt, deren wahre Längen s aus den Koordinaten berechnet werden können und deren verzerrte Längen S durch direkte Abmessungen aus dem Plane folgen.

Die Richtwinkel ρ dieser Strecken findet man aus den Endpunktkoordinaten nach der Formel ... $\text{tg } \rho_{iK} = \frac{y_K - y_i}{x_K - x_i}$, ... und mit diesen Richtwinkeln und den zugeordneten Endpunktkoordinaten rechnet man für jede Strecke die zugeordneten Koeffizientenwerte a, b, c, d, e, f, l , nach den Formeln 61) aus.

Damit sind die Transformationskoeffizienten für die betreffende Stelle des Blattes bestimmt. Nichtsdestoweniger können die Formeln 9) und 18) noch nicht unmittelbar angewendet werden, weil die verzerrten Hektarnetzlinien im Plane nicht vorhanden sind.

Es fragt sich nun, wie das für die Koordinatenabmessungen notwendige Achsensystem $(0; \xi, \eta)$ ermittelt werden bzw. eingezeichnet werden kann.

Zu diesem Zwecke wähle man 2 Punkte P_1 und P_2 mit bekannten Naturkoordinaten $(X_1 Y_1)$, bzw. $(X_2 Y_2)$, von denen der erste (P_1) am linken unteren und der zweite (P_2) am rechten oberen Ende des in Betracht kommenden Gebietes liegt.

Hernach reduziere man die Koordinaten beider Punkte auf ein Parallelkoordinatensystem, dessen Ursprung mit dem links unterhalb P_1 liegenden Hektarnetzpunkt zusammenfällt.

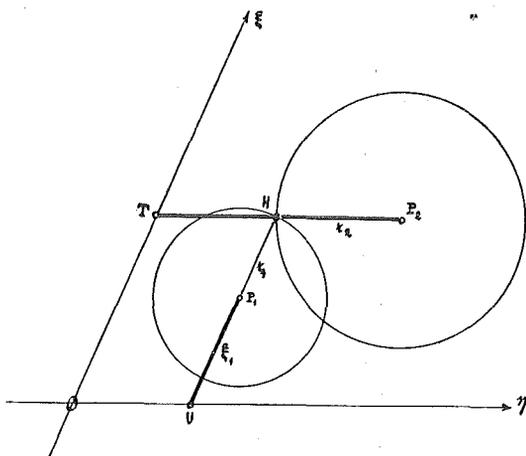


Fig. 10.

Sind $(x_1 y_1)$ bzw. $(x_2 y_2)$ die reduzierten Koordinaten von P_1 und P_2 , dann wird nach 9) $\begin{cases} \xi_1 = x_1 \cdot (A_1 + B_1 y_1) \\ \eta_1 = y_1 \cdot (A_2 + B_2 x_1) \end{cases}$.. und .. $\begin{cases} \xi_2 = x_2 \cdot (A_1 + B_1 y_2) \\ \eta_2 = y_2 \cdot (A_2 + B_2 x_2) \end{cases}$

Schlägt man nun um P_1 einen Kreis mit dem Radius ... $r_1 = \xi_2 - \xi_1$, und um P_2 einen Kreis mit dem Radius ... $r_2 = \eta_2 - \eta_1$, dann schneiden sich diese beiden Kreise in einem Hilfspunkte H , der mit P_1 bzw. P_2 verbunden, die Richtungen der Achsen ξ und ζ bestimmt.

Die Achsen selbst findet man durch Abtragung der dick eingezeichneten Strecken $P_1 U = \xi_1$ bzw. $P_2 T = \eta_2$ und Parallelverschiebung der Achsenrichtungen durch die Punkte T und U .