Strenge Ausgleichung eines Polygonzuges

Leo Candido

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **23** (6), S. 97–105

1925


```
@ARTICLE{Candido_VGI_192514,
Title = {Strenge Ausgleichung eines Polygonzuges},
Author = {Candido, Leo},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {97--105},
Number = {6},
Year = {1925},
Volume = {23}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion:
Hofrat Prof. Dr. Ing., Dr. techn. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. K. Lego.

Nr. 6. Wien, im Dezember 1925. XXIII. Jahrgang.

Strenge Ausgleichung eines Polygonzuges.

Von Ing. Leo Candido.

Im Verlaufe geodätischer Arbeiten sind Polygonzüge häufig. Sind sie zwischen trigonometrischen Punkten eingeschaltet oder in sich geschlossen, so wird in allen Fällen, wo es sich um halbwegs genaue Arbeiten handelt, eine Ausgleichung empfehlenswert, wenn nicht notwendig sein.

Zweck dieser Ausgleichung ist die Wegschaffung der aufgetretenen Widersprüche f_w in der Abschlußrichtung, f_x und f_y in den Koordinaten des Abschlußpunktes. Sie hat, dem Grundsatze der Ausgleichungsrechnung gemäß, derart zu erfolgen, daß die Summe der Quadrate der Änderungen der gemessenen Größen zu einem Kleinstwerte wird. Gemessen sind im vorliegenden Falle der Anschlußwinkel α_A, die Brechungswinkel β_1, $\beta_2 \ldots \beta_{n-1}$ und der Abschlußwinkel α_E sowie die Seiten s_1, $s_2 \ldots s_n$.

Die Ausgleichung führt zur Aufstellung und Auswertung von drei Bedingungsgleichungen, entsprechend den drei Widersprüchen f_w, f_x und f_y.

Diese scharfe Rechnung scheint langwierig und umfangreich. Es haben sich daher Näherungsverfahren eingebürgert, die durch Übernahme in die Vermessungsvorschriften vieler Länder sogar eine gewisse Anerkennung gefunden haben. So z. B. die Art, die Koordinatenwidersprüche proportional den Seitenlängen auf die einzelnen Koordinatenunterschiede zu verteilen. Ein anderes Verfahren teilt die Widersprüche proportional den Abszissen bzw. Ordinatenunterschieden auf diese auf.

Beide Näherungen gelten streng nur bei gestreckten Zügen. In der Praxis kommen jedoch sehr häufig Züge vor, die von der gestreckten Form stark abweichen, mitunter in sich geschlossen sind. Werden auf solche Züge die Näherungen angewendet, so können die Ergebnisse unter Umständen geradezu unbrauchbar werden.

Es werden durch diese Näherungen zwar die Widersprüche durch einfache Rechnung glatt und anscheinend recht zweckmäßig beseitigt. Doch geschieht dies vielfach durch Schaffung anderer, unter Umständen viel größerer Widersprüche an anderen Stellen. Diese, durch die Ausgleichung selbst entstandenen

Widersprüche erscheinen sofort, wenn man einen, nach vorerwähnten Näherungsverfahren ausgeglichenen Polygonzug hinsichtlich seiner neuen Seitenlängen und Brechungswinkel durchrechnet. Man wird da besonders hinsichtlich der letzteren Änderungen gegenüber der Messung finden, die sich mit der Genauigkeit der Beobachtungen nicht mehr in Einklang bringen lassen.

Die folgenden Ausführungen sollen zeigen, daß die scharfe, für jeden Fall gültige Ausgleichung mit verhältnismäßig geringem Arbeitsaufwande durchgeführt werden kann. Die ganze Ausgleichung kann durchaus mit dem Rechenschieber erfolgen.

Es soll an Hand eines durchgerechneten, wahllos herausgegriffenen Beispieles die Anwendung des scharfen Verfahrens gezeigt werden, aber auch durch Ausgleichung desselben Beispieles nach den erwähnten Näherungsverfahren ein Vergleich der Ergebnisse ermöglicht werden.

Das Problem, strenge Ausgleichung eines Polygonzuges nach bedingten Beobachtungen, behandelt Dr. Doležal in seinem Werke „Niedere Geodäsie" (I. Band, 2. Hälfte) eingehend. Mit Hinweis auf die dortigen Ausführungen können die folgenden mathematischen Ableitungen kurz gefaßt bleiben wie folgt:

Mit den Streckenlängen $s_1, s_2 \ldots s_n$ und den auf Grund der gemessenen Winkel errechneten Richtungswinkeln $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ dieser Seiten sei der Polygonzug durchgerechnet. Wir setzen voraus, daß vorher der allenfalls bestimmte Winkelwiderspruch f_w auf alle gemessenen Polygonwinkel ($n-1$ Brechungs-, 1 Anschluß- und 1 Abschlußwinkel) verteilt wurde und damit die ausgeglichenen Richtungswinkel erhalten wurden, mit denen sodann die Berechnung der Koordinatenunterschiede erfolgte.

Daß diese, in eine Winkel- und eine Seitenausgleichung getrennte Ausgleichung vollständig berechtigt ist, ist in dem genannten Werke an Hand eines zahlenmäßig durchgeführten Beispieles klar dargelegt. Sie ist auch durch folgende Überlegung als richtig zu erkennen: Die Winkelmessung ist von der Seitenmessung vollständig unabhängig, ein Fehler in der einen beeinflußt die Messung der anderen gar nicht. Es wird der Abschlußfehler in den Winkeln von den Messungsfehlern in den Seiten unabhängig sein und umgekehrt, es können daher beide für sich ausgeglichen werden.

Die Koordinatenunterschiede zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten sind:

$$\begin{array}{ll}
\triangle x_1 = s_1 \cos \sigma_1 & \triangle y_1 = s_1 \sin \sigma_1 \\
\triangle x_2 = s_2 \cos \sigma_2 & \triangle y_2 = s_2 \sin \sigma_2 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\triangle x_n = s_n \cos \sigma_n & \triangle y_n = s_n \sin \sigma_n .
\end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots \; 1)$$

Die Widersprüche beim Abschluß des Polygonzuges seien f_x und f_y. Sie sind durch Ausgleichung zu beseitigen. Die bereits ausgeglichenen Richtungswinkel dürfen durch diese Ausgleichung nicht mehr geändert werden. Es werden daher lediglich die Polygonseiten verändert werden. Für diese Änderungen (Verbesserungen) der Seiten hat der Grundsatz der ganzen Ausgleichungsrechnung Geltung:

Die Summe der Quadrate der Änderungen der gemessenen Größen soll ein Kleinstwert sein.

Bezeichnen wir diese Seitenänderungen mit

$$ds_1,\ ds_2 \ldots ds_n$$

und die dadurch hervorgerufenen Änderungen der Koordinatenunterschiede mit

$$d\triangle x_1,\ d\triangle x_2, \ldots d\triangle x_n, \text{ bzw. } d\triangle y_1,\ d\triangle y_2 \ldots d\triangle y_n,$$

so gelten die Beziehungen:

$$\begin{array}{ll} d\triangle x_1 = ds_1 \cos\sigma_1 & d\triangle y_1 = ds_1 \sin\sigma_1 \\ d\triangle x_2 = ds_2 \cos\sigma_2 & d\triangle y_2 = ds_2 \sin\sigma_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ d\triangle x_n = ds_n \cos\sigma_n & d\triangle y_n = ds_n \sin\sigma_n. \end{array} \quad \ldots\ldots 2)$$

Es gelten nun die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} [d\triangle x] = f_x \\ [d\triangle y] = f_y \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3)$$

f_x und f_y ergeben sich dabei aus der Beziehung:

$$f = \text{Sollbetrag}-\text{Istbetrag}.$$

In aufgelöster Form:

$$\left.\begin{array}{l} ds_1 \cos\sigma_1 + ds_2 \cos\sigma_2 + \ldots\ldots + ds_n \cos\sigma_n = f_x \\ ds_1 \sin\sigma_1 + ds_2 \sin\sigma_2 + \ldots\ldots + ds_n \sin\sigma_n = f_y \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots 3')$$

Setzen wir der Übersicht halber die bekannten Koeffizienten

$$\cos\sigma = a, \qquad \sin\sigma = b$$

so erhalten wir die beiden Bedingungsgleichungen in der Form:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\, ds_1 + a_2\, ds_2 + \ldots\ldots + a_n\, ds_n = f_x \\ b_1\, ds_1 + b_2\, ds_2 + \ldots\ldots + b_n\, ds_n = f_y \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 4)$$

Die beiden Korrelaten ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\, K_1 + [ab]\, K_2 - f_x = 0 \\ [ab]\, K_1 + [bb]\, K_2 - f_y = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 5)$$

Die Änderungen der Seiten sind dann:

$$\left.\begin{array}{l} ds_1 = a_1 K_1 + b_1 K_2 \\ ds_2 = a_2 K_1 + b_2 K_2 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ ds_n = a_n K_1 + b_n K_2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6)$$

Da wir nicht die Kenntnis der Seitenänderungen, sondern die der Koordinatenunterschiede anstreben, so berechnen wir diese. Sie ergeben sich aus den Gleichungen 2 und 6:

$$\left.\begin{array}{ll} d\triangle x_1 = a_1\, ds_1 = a_1^2 K_1 + a_1 b_1 K_2 & d\triangle y_1 = b_1\, ds_1 = a_1 b_1 K_1 + b_1^2 K_2 \\ d\triangle x_2 = a_2\, ds_2 = a_2^2 K_1 + a_2 b_2 K_2 & d\triangle y_2 = b_2\, ds_2 = a_2 b_2 K_1 + b_2^2 K_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ d\triangle x_n = a_n\, ds_n = a_n^2 K_1 + a_n b_n K_2 & d\triangle y_n = b_n\, ds_n = a_n b_n K_1 + b_n^2 K_2 \end{array}\right\} \quad 7)$$

Die Gleichungen 7 geben die Werte der Änderungen (Verbesserungen) der Koordinatenunterschiede und damit auch gleich die verbesserten Koordinaten der Polygonpunkte.

Numerische Berechnung.

Diese erfordert die Aufstellung und Ausrechnung der Gleichungen 5 und 7. Es sind in beiden nur die quadratischen Koeffizienten notwendig, nämlich a^2, ab, b^2. Die Kenntnis der Werte a und b ist nicht erforderlich, ebenso auch nicht die der Seitenverbesserungen ds.

In Hinblick darauf, daß die Koordinatenverbesserungen $d\triangle y$ und $d\triangle x$ kleine Werte sein werden, erübrigt sich eine scharfe Bestimmung der erwähnten Koeffizienten. Es wird genügen, eine Tabelle anzulegen, die diese Koeffizienten für die von Grad zu Grad fortschreitenden Argumente angibt. Ängstlichen Gemütern bleibt es dabei frei, durch Interpolation eine schärfere Bestimmung vorzunehmen.

Mit Benützung dieser Koeffiziententafel gestaltet sich die ganze Ausgleichung einfach und rasch durchführbar, wie das folgende Beispiel zeigen soll.

Es ist entnommen dem bekannten Werke von Dr. Doležal „Niedere Geodäsie", 1. Band, S. 878 ff.

Beispiel.

Die Berechnung des Polygonzuges habe folgende Daten ergeben:

Nr.	Seite	verb. Azimut	Koordinatenunterschiede $\triangle x$	Koordinatenunterschiede $\triangle y$	Koordinaten x	Koordinaten y	Punkt
					+ 879.340	+1199.120	A
1	108.81	328 09 57	+ 92.443	− 57.394			
					971.783	1141.726	I
2	131.98	329 12 04	+ 113.367	− 67.577			
					1085.150	1074.149	II
3	122.38	328 43 42	+ 104.600	− 63.527			
					1189.750	1010.622	III
4	219.54	68 51 50	+ 79.163	+ 204.771			
					1268.913	1215.393	IV
5	120.60	69 07 06	+ 42.987	+ 112.679			
					1311.900	1328.072	V
6	211.71	56 19 12	+ 117.404	+ 176.174			
					1429.304	1504.246	VI
7	102.80	46 37 37	+ 70.597	+ 74.725			
					1499.901	1578.971	VII
8	120.49	139 24 33	− 91.497	+ 78.397			
					1408.404	1657.368	E
	1138.31		+ 529.064	+ 458.248			

Gegebene Punkte:	A:	$x_a = +\ 879.340$;		$y_a = +\ 1199.120$
	E:	$x_e = +\ 1409.470$;		$y_e = +\ 1657.440$
Soll:		$x_e - x_a = +\ 530.130$;		$y_e - y_a = +\ 458.320$
Ist:		$= +\ 529.064$;		$= +\ 458.248$
Soll—Ist:		$f_x = +\ 1.066$;		$f_y = +\ 0.072$

Ausgleichung:

Mit dem Argument 328°, 329°, 329° . . . . . . 47°, 139° gehen wir in die Tabelle der Koeffizienten und entnehmen ihr sogleich die in einer Horizontalreihe stehenden Koeffizienten a^2, ab, b^2, die wir wie folgt tabellarisch zusammenstellen: (Kolonne 1, 2 und 3)

	1	2		3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nr.	a^2	ab +	ab −	b^2	$a^2 K_1$	$ab\,K_2$	$d\triangle x$ einzeln	$d\triangle x$ zus.	$ab\,K_1$	$b^2 K_2$	$d\triangle y$ einzeln	$d\triangle y$ zus.
1	0.7192		0.4494	0.2808	+0.203	−0.013	+0.190	+0.190	−0.127	+0.008	−0.119	−0.119
2	0.7347		0.4415	0.2653	+0.208	−0.013	+0.195	+0.385	−0.125	+0.008	−0.117	−0.236
3	0.7347		0.4415	0.2653	+0.208	−0.013	+0.195	+0.580	−0.125	+0.008	−0.117	−0.353
4	0.1284	0.3346		0.8716	+0.036	+0.011	+0.047	+0.627	+0.095	+0.026	+0.121	−0.232
5	0.1284	0.3346		0.8716	+0.036	+0.011	+0.047	+0.674	+0.095	+0.026	+0.121	−0.111
6	0.3127	0.4636		0.6873	+0.089	+0.014	+0.103	+0.777	+0.131	+0.021	+0.152	+0.041
7	0.4651	0.4988		0.5349	+0.131	+0.015	+0.147	+0.924	+0.141	+0.016	+0.157	+0.198
8	0.5696		0.4951	0.4304	+0.161	−0.015	+0.146	+1.070	−0.140	+0.013	−0.127	+0.071
		1.6316	1.8275									
	3.7928		0.1959	4.2072			+1.070				+0.071	

Der Gebrauch der Tabelle ist der gleiche wie der bei Logarithmentafeln trigonometrischer Funktionen.

Von 90°—180° bzw. von 270°—360° liest man von unten nach oben, wobei der mittlere Koeffizient ab negativ wird.

Indem wir die Kolonnen 1, 2 und 3 addieren, erhalten wir die Koeffizienten der Korrelatengleichungen und damit diese selbst wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} 3.7928\,K_1 - 0.1959\,K_2 - 1.066 &= 0 \\ -\,0.1959\,K_1 + 4.2072\,K_2 - 0.072 &= 0 \end{aligned}\right\} {}^{*)}$$

$$\text{Daraus: } K_1 = +\,0.282_5; \quad K_2 = +\,0.0301_4.$$

Die Berechnung der Kolonnen 4, 5, 8 und 9 gestaltet sich jetzt sehr einfach, durch Addition erfolgt dann die Berechnung der Kolonnen 6, 7 bzw. 10, 11. Damit ist die Ausgleichung fertig, denn die Kolonnen 7 und 11 geben für die Polygonpunkte die Koordinatenverbesserungen.

Ein Blick auf Kolonne 11 zeigt uns, daß die Koordinatenverbesserungen in den y bei einigen Punkten negativ sind. Eine Ausgleichung nach den früher erwähnten Näherungsverfahren hätte aber die Verbesserungen für alle Punkte mit gleichem Vorzeichen, hier mit positivem, ergeben.

Es sei noch darauf verwiesen, daß für die Durchführung der Ausgleichung nur bekannt zu sein brauchen die Werte σ, $\triangle x$ und $\triangle y$ sowie natürlich die Widersprüche f_x und f_y. Logarithmische Hilfsrechnungen sind auch dann erforderlich, wenn der Polygonzug ohne Logarithmen berechnet wurde (Gauss'sche Tafeln usw.).

---

*) Die Berechnung der Koeffizienten mittelst sechsstelliger Logarithmen ergab (siehe D o l e ž a l, 1. Band, S. 880):

$$+\,3.803\ 037\,K_1 - 0.195\ 701\,K_2 - 1.066 = 0$$
$$-\,0.195\ 701\,K_1 + 4.197\ 057\,K_2 - 0.072 = 0$$
$$K_1 = +\,0.281\ 861; \quad K_2 = +\,0.030\ 290$$

Sollte es wünschenswert sein, die Seiten mit verschiedenen Gewichten in Rechnung zu stellen, so kann dies einfach dadurch bewirkt werden, daß die Koeffizientenreihe mit dem Faktor p, dem Gewichte, multipliziert wird, bevor sie in die Kolonne 1 bis 3 eingetragen wird.

Der Vollständigkeit und des Vergleiches halber sei der vorstehend scharf ausgeglichene Polygonzug auch nach den beiden gebräuchlichen Näherungsverfahren ausgeglichen und die Ergebnisse der drei Verfahren einander gegenübergestellt.

1. Näherungsverfahren: Aufteilung der Widersprüche f_x und f_y proportional den Seitenlängen.

$$f_x = +\,1.066; \quad [s] = 1138.31\ m. \qquad f_y = +\,0.072$$

$$k_x = \frac{+\,1.066}{1138.3} = +\,0.000\,937; \qquad k_y = \frac{+\,0.072}{1138.3} = +\,0.000\,0632$$

$$d\triangle x_p = k_x \,.\, s_p \qquad d\triangle y_p = k_y \,.\, s_p.$$

Nr.	$d\triangle x$	$d\triangle y$
1	+ 0.102	+ 0.007
2	+ 0.124	+ 0.008
3	+ 0.114	+ 0.008
4	+ 0.206	+ 0.014
5	+ 0.113	+ 0.008
6	+ 0.198	+ 0.013
7	+ 0.096	+ 0.006
8	+ 0.113	+ 0.008
	+ 1.066	+ 0.072

2. Näherungsverfahren: Aufteilung des Widerspruches

f_x proportional den Abszissenunterschieden $\triangle x$,

f_y proportional den Ordinatenunterschieden $\blacktriangle y$.

$$f_x = +\,1.066; \quad [\triangle x] = +\,529.1; \qquad f_y = +\,0.072; \quad [\triangle y] = +\,458.2$$

$$K_x = \frac{+\,1.066}{+\,529.1} = +\,0.002\,02 \qquad k_y = \frac{+\,0.072}{+\,458.2} = +\,0.000\,157$$

$$d\triangle x_p = k_x \,.\, \triangle x_p. \qquad d\triangle y_p = k_y \,.\, \triangle y_p.$$

Nr.	$d\triangle x$	$d\triangle y$
1	+ 0.185	— 0.009
2	+ 0.227	— 0.011
3	+ 0.211	— 0.010
4	+ 0.159	+ 0.032
5	+ 0.086	+ 0.018
6	+ 0.236	+ 0.028
7	+ 0.141	+ 0.012
8	— 0.185	+ 0.012
	+ 1.066	+ 0.072

Die beiden Näherungsverfahren geben also mit dem genauen Verfahren wie auch untereinander verglichen, voneinander stark abweichende Ergebnisse.

Die Schwäche der Näherungsverfahren wird aber erst so recht klar, wenn wir die Änderungen der Brechungswinkel bestimmen. Bei allen drei Verfahren wurden diese für sich ausgeglichen, es waren also die Verbesserungen in allen drei Fällen dieselben.

Während nun bei der scharfen Ausgleichung die Brechungswinkel laut Voraussetzung durch Seitenverbesserungen nicht mehr in Mitleidenschaft gezogen wurden, war dies bei den beiden Näherungen der Fall. Die Änderungen der Koordinatenunterschiede bewirkten auch Änderungen der Brechungswinkel, also der ursprünglich gemessenen Größen.

Wir können diese Änderungen bestimmen wie folgt:

Die Brechungswinkel hängen mit den Richtungswinkeln zusammen durch die Beziehung:

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} + \beta_n \pm 180^0$$

Daraus durch Differenzieren:

$$d\beta_n = d\sigma_n - d\sigma_{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

Für σ gilt die bekannte Beziehung:

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

differenziert:

$$\operatorname{tg}\sigma \,.\, d\blacktriangle x + \frac{\triangle x}{\cos^2\sigma} \cdot \frac{d\sigma'}{\rho'} = d\triangle y; \quad (\rho' \doteq 3440)$$

woraus sich ergibt:

$$d\sigma'' = \frac{a^2\, d\Delta y - ab\, d\Delta x}{\Delta x}\rho' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Nach Gleichung 9 lassen sich in tabellarischer Form die Werte $d\sigma'$, d. h. die Änderungen der Richtungswinkel der Seiten infolge der Koordinatenausgleichung bestimmen und daraus nach Gleichung 8 die Änderungen der Brechungswinkel, die an den bereits ausgeglichenen durch die Koordinatenausgleichung erfolgen.

Die Gleichung 9 kann als Rechenprobe im Falle der scharfen Ausgleichung dienen, denn dafür gilt:

$$d\sigma' = 0 \quad \text{für alle Seiten}$$

d. h. $$a^2\, d\Delta y - ab\, d\Delta x = 0 \quad \text{für alle Seiten.}$$

Nachstehend sind für alle drei Rechnungsarten die Gleichungen 9 zusammengestellt:

1. Strenge Ausgleichung:

Nr.	$a^2 d\Delta y$	$ab\, d\Delta x$	$a^2 d\Delta y -$ $ab\, d\Delta x$	$d\sigma'$	$d\sigma_n - d\sigma_{n-1}$
1	— 0.0855	— 0.0855	+ 0.0000	0	$0 = d\alpha_A$
2	— 0.0860	— 0.0860	0.0000	0	$0 = d\beta_1$
3	— 0.0860	— 0.0860	0.0000	0	$0 = d\beta_2$
4	+ 0.0155	+ 0.0157	— 0.0002	0	$0 = d\beta_3$
5	+ 0.0155	+ 0.0157	— 0.0002	0	$0 = d\beta_4$
6	+ 0.0475	+ 0.0477	— 0.0002	0	$0 = d\beta_5$
7	+ 0.0730	+ 0.0733	— 0.0003	0	$0 = d\beta_6$
8	— 0.0725	— 0.0722	— 0.0003	0	$0 = d\beta_7$
					$0 = d\alpha_E$

2. Näherung 1:

Nr.	$a^2 d\Delta y$	$ab\, d\Delta x$	$a^2 d\Delta y -$ $ab\, d\Delta x$	$d\sigma'$	$d\sigma_n - d\sigma_{n-1}$
1	+ 0.00503	— 0.04580	+ 0.05083	+ 1.89	$+ 1.89' = d\alpha_A$
2	+ 0.00588	— 0.05480	+ 0.06068	+ 1.84	$- 0.05 = d\beta_1$
3	+ 0.00588	— 0.05050	+ 0.05638	+ 1.85	$+ 0.01 = d\beta_2$
4	+ 0.00178	+ 0.06900	— 0.06722	— 2.92	$- 4.77 = d\beta_3$
5	+ 0.00103	+ 0.03780	— 0.03677	— 2.94	$- 0.02 = d\beta_4$
6	+ 0.00406	+ 0.09170	— 0.08764	— 2.57	$+ 0.37 = d\beta_5$
7	+ 0.00279	+ 0.04800	— 0.04521	— 2.20	$+ 0.37 = d\beta_6$
8	+ 0.00456	— 0.05590	+ 0.06046	+ 2.27	$+ 4.47 = d\beta_7$
					$- 2.27 = d\alpha_E$

3. Näherung 2:

Nr.	$a^2 d\Delta y$	$ab\, \Delta x$	$a^2 d\Delta y -$ $ab\, d\Delta x$	$d\sigma'$	$d\sigma_n - d\sigma_{n-1}$
1	— 0.00646	— 0.08300	+ 0.07654	+ 2.85	$+ 2.85 = d\alpha_A$
2	— 0.00808	— 0.10020	+ 0.09212	+ 2.80	$- 0.05 = d\beta_1$
3	— 0.00735	— 0.09310	+ 0.08575	+ 2.82	$+ 0.02 = d\beta_2$
4	+ 0.00410	+ 0.05320	— 0.04910	+ 2.13	$- 4.95 = d\beta_3$
5	+ 0.00231	+ 0.02880	— 0.02649	— 2.12	$+ 0.01 = d\beta_4$
6	+ 0.00876	+ 0.10920	— 0.10044	— 2.94	$- 0.82 = d\beta_5$
7	+ 0.00558	+ 0.07030	— 0.06472	— 3.16	$- 0.22 = d\beta_6$
8	+ 0.00683	+ 0.09160	— 0.08477	+ 3.19	$+ 6.35 = d\beta_7$
					$- 3.19 = d\alpha_E$

Wir sehen aus diesem wahllos herausgegriffenen Beispiele, welch große Winkeländerungen durch die Anwendung der Näherungsverfahren auftreten. Denn Winkeländerungen von 4 oder, wie bei Näherung 2, von über 6′ lassen sich mit den Beobachtungen nicht mehr vereinen, stellen vielmehr eine grobe Verschlechterung der Winkelmessungen vor *).

*) Die gesamte Änderung, die ein gemessener Polygonwinkel erleidet, setzt sich zusammen aus der ursprünglichen, infolge der Winkelausgleichung zustande gekommenen Verbesserung und der infolge der Koordinatenausgleichung aufgetretenen Änderung. Beide sind algebraisch zu addieren.

Will man daher die Sorgfalt und Schärfe, mit der gewöhnlich die Polygonwinkel gemessen werden, durch die nachherige Ausgleichung nicht gänzlich wieder aufs Spiel setzen, so muß man strenge ausgleichen.

Nur in solchen Fällen erscheinen die Näherungen zulässig, bei denen die Winkel nicht mit Schärfe gemessen wurden (Bussole, graphisch).

Ich glaube, hiemit gezeigt zu haben, daß die scharfe Ausgleichung empfehlenswert und durch Anwendung der Koeffiziententabelle und tabellarische Anordnung der Rechnung einfach und rasch durchführbar ist.

Ergänzungsgleichungen zu den Normalgleichungen.

Von Dr. Wilh. Tischendorf-Wien.

Bei der Auflösung von Normalgleichungen vermittelnder Beobachtungen im Wege der Gauss'schen Elimination wird gewöhnlich die Berechnung der $[vv]$ gleichzeitig durchgeführt, indem ein unabhängiges System von Koeffizienten angehängt wird.

Es ist hiebei eine gewisse Zwangsläufigkeit nicht von der Hand zu weisen, weil an die symmetrisch aufgebauten Normalgleichungen ein System von scheinbar unabhängigen Gliedern angeschlossen wird, die keine Gleichung bilden, aber doch wie eine Gleichung behandelt werden; es bereitet daher auch dem Anfänger gewisse Schwierigkeiten, diesem Wege zu folgen.

Es kann nun leicht gezeigt werden, daß diese scheinbar unabhängigen Glieder sich zu einer Gleichung verbinden lassen und daß erst durch diese Ergänzungsgleichungen der symmetrische Aufbau der Normalgleichungen abgeschlossen erscheint.

Bei der mit diesen Ergänzungsgleichungen durchgeführten Elimination der Normalgleichungen ergeben sich die sonst eigens geführten Beweise für die sog. „Restglieder" von selbst.

1. Bei den vermittelnden Beobachtungen.

Im nachstehenden sind der Einfachheit halber nur 2 Unbekannte und gleiche Gewichte angenommen.

Das vollständige System der Normalgleichungen im obigen Sinne lautet dann:

$$[aa]x + [ab]y - [al] = 0 \quad \dots\dots\dots\dots 1)$$

$$[ab]x + [bb]y - [bl] = 0 \quad \dots\dots\dots\dots 2)$$

$$-[al]x - [bl]y + [ll] = [vv] \quad \dots\dots\dots\dots 3)$$

Gleichung 3), die im harmonischen Gefüge zu den Normalgleichungen steht, wird aus den Fehlergleichungen wie folgt gewonnen:

$$v = -l + ax + by$$

quadriert:

$$v^2 = l^2 + a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy - 2alx - 2bly \quad \dots\dots 4)$$

Summe aller quadrierten Fehlergleichungen:

$$[vv] = [ll] + [aa]x^2 + [bb]y^2 + 2[ab]xy - 2[al]x - 2[bl]y \quad \dots 5)$$