Verfahren zur raschen Berechnung der Koordinaten von Punkten, die nach der Schnittmethode von zwei Polygonpunkten aus eingemessen wurden

Friedrich Goethe [1]

[1] *Obergeometer i. P.*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **23** (3), S. 50–53

1925

Verfahren zur raschen Berechnung der Koordinaten von Punkten, die nach der Schnittmethode von zwei Polygonpunkten aus eingemessen wurden.

Von Ing. Friedrich Goethe, Obergeometer i. P.

I. Bitangens $(a, b) = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}$.

(Berechnung der Koordinaten auf die Polygonseite als Abszissenachse.)

Bewegen sich auf einer Linie mn zwei rechtwinkelige Dreiecke I und II gegeneinander, so schneiden sich die beiden Hypothenusen in einem Punkte S (Schnittpunkt), dessen Lage von den Winkeln a, b und den Ordinaten y, y' abhängig ist. Hiebei ist der Winkel a, b stets für alle d gleich, während die Größen x, x' und y, y' von d (der Länge der Polygonseite) abhängig sind.

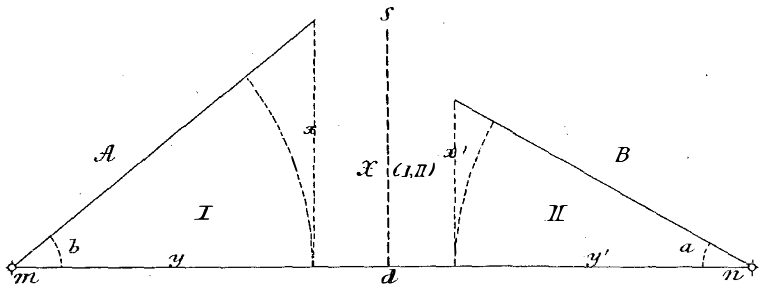

Fig. 1.

Nun ist

$$x = y \operatorname{tg} b$$
$$x' = y' \operatorname{tg} a$$

und da beim Zusammentreffen der beiden Dreiecke I und II . . . . $x = x'$ sein muß, ist im Schnittpunkte S . . . $y \operatorname{tg} b = y' \operatorname{tg} a$.

Daraus folgt $\quad y : y' = \operatorname{tg} a : \operatorname{tg} b$

oder $$\frac{y}{y + y'} = \frac{y}{d} = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}$$

als Grund- und Rechnungsformel für eine neue logarithmisch-trigonometrische Doppelfunktion, die mit Bitangens (a, b) bezeichnet wurde.

Nun ist bitg (a, b) = das Verhältnis von $y : d$, daher

$$y = d \,.\, \operatorname{bitg}(a, b) \quad \ldots\ldots \quad \text{I)}$$

und

$$x = y \,.\, \operatorname{tg} b \quad \ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Nachstehend ein Beispiel:

$$\operatorname{bitg}(53^0, 25^0) = \frac{\operatorname{tg} 53^0}{\operatorname{tg} 53^0 + \operatorname{tg} 25^0}$$

lg tg 53^0 =	0·122 89	. . . .	N = 1·327 04
lg tg 25^0 =	. . . . 9·668 67	. . . . .	N = 0·466 31
— lg (tg 53^0 + tg 25^0) =	0·253 67	lg	1·793 35
lg bitg (53^0, 25^0) =	9·869 22 = in der Tabelle enthalten.		

$d = 140\ m.$

Bisherige Rechnungsmethode:	Mit Benützung der Tabellen:
$\lg A = \lg 140 = 2{\cdot}146\ 13$	$\lg 140 = 2{\cdot}146\ 13$
$+ \lg \sin 53^0 = 9{\cdot}902\ 35$	$+ \lg \mathrm{bitg}\,(53^0, 25^0) = 9{\cdot}869\ 22$
$2{\cdot}048\ 48$	$2{\cdot}015\ 35 = \lg y$ (bei $\sphericalangle b$)
$- \lg \sin 102^0 = 9{\cdot}990\ 40 \quad 9{\cdot}625\ 95 = \lg \sin 25^0$	$+ \lg \mathrm{tg}\, 25^0 = 9{\cdot}668\ 67$
$2{\cdot}058\ 08 = \lg A$	$1{\cdot}684\ 02 = \lg x$
$9{\cdot}957\ 28 = \lg \cos 25^0$	
$\lg x = 1{\cdot}684\ 03;\quad \lg y = 2{\cdot}015\ 35$	
5 Logarithmen aufschlagen	3 Logarithmen aufschlagen
Komplementwinkel $180 - (a + b)$ ermitteln	
3 Additionen	2 Additionen
1 Subtraktion	
9 Ansätze	5 Ansätze
54 Ziffern	30 Ziffern

also mindestens 50% Zeitersparnis.

Die Logarithmen der Bitangenten können gerade so wie die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen zusammengestellt und benützt werden, wie dies aus nachfolgend dargestellten Tabellenteilen zu ersehen und zu überprüfen ist. Hiebei kann der log von d als bei einer Polygonseite ständig vorkommender Faktor separat geschrieben und über den lg bitg $(a\,b)$ gehalten werden, wodurch zwei weitere Ansätze erspart werden können. Die Reihung ermöglicht die Ablesung der Bitangenten von 1 zu 1 Minute und wird für eine Kartierung als genügend erachtet.

Der Gebrauch dieser Bitangententafeln ist sehr einfach, erleichtert wesentlich die Kartierung einer Aufnahme und genügt es für von einer Polygonseite geschnittene Seitenpunkte vollständig, wenn man den mit diesen Tabellen errechneten Schnittpunkt durch eine dritte Winkelablesung vom nächsten Polygonpunkte aus mit dem Transporteur kontrolliert.

Wenn auch immerhin die Anwendung von Bitangenten eine zirka 50%ige Zeitersparnis herbeiführt, so könnte vielleicht durch maschinelle Auswertung des Bitangentensatzes ein noch größerer Erfolg herbeigeführt werden, besonders da nur eine Rechenoperation zu bewältigen ist.

II. Bisinus $(b, e) = \dfrac{\sin (90 - b)}{\sin (b + e)}$

(Berechnung der Koordinaten im Hauptachsensystem. Transformation der auf die Polygonseiten bezogenen Ordinaten auf das Hauptachsensystem.)

Da die Verwendung der Bitangententafeln ohne rasche Ermöglichung der Transformierung der mit Hilfe derselben gefundenen Ordinaten x und y teilweise nur problematisch wäre, wurde das Verhältnis y (die mit der Bitangententafel zuerst gefundene Größe) zu X durch den Ansatz

$$\frac{y}{X} = \frac{\sin(90 - b)}{\sin(b + e)} = \frac{\cos b}{\sin(b + e)}$$

dargestellt, mit bisinus (b, e) bezeichnet und sind in diesem Ansatze alle Faktoren enthalten, die bei gefundenem y nötig sind, um die Transformation vornehmen zu können.

$$X = \frac{y}{\operatorname{bisin}(b, e)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III)}$$

$$Y = X \operatorname{cotg}(b + e) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

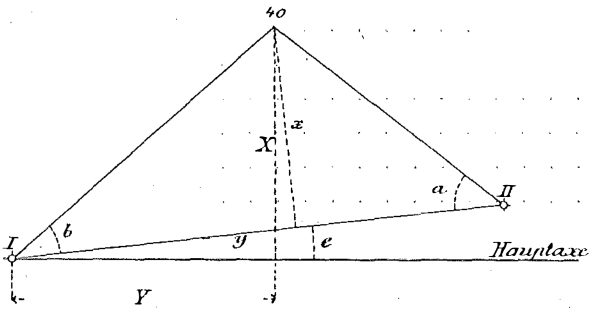

Fig. 2.

I und II Polygonpunkte.
40 der von I und II geschnittene Punkt.
x, y Ordinaten des Punktes 40, bezogen auf die Polygonseite.
X, Y Ordinaten des Punktes 40, bezogen auf die Hauptachse.
e Neigungswinkel der Polygonseite zur Hauptachse.

Bringt man nun den Logarithmus bisin (b, e) gerade so wie den bitang (b, a) in ein logarithmisches System, setzt b, da für beide in erster Linie maßgebend, als Kopfaufschrift und reiht bitang und bisin nebeneinander (wie nachfolgender Tabellenauszug zeigt), so ergibt sich eine sehr einfache Rechnungsoperation, um die Ordinaten von aus Polygonpunkten geschnittenen Seitenpunkten auf das Hauptachsensystem zu transformieren.

(Muster der Tabelle ist angeschlossen).

Beispiel: $b = 61^0$; $a = 75^0$; $d = 177\ m$; $e = 9^0$.

Nach Bitangententafel:

$$\begin{array}{rl} \log 177 = & 2{\cdot}247\,97 \\ + \lg \operatorname{bitg}(61^0, 75^0) = & \underline{9{\cdot}828\,74} \\ & 2{\cdot}076\,71 = \log y \end{array}$$

Nach Bisinustabelle:

$$\begin{array}{rl} \log y = & 2{\cdot}076\,71 \\ - \log \operatorname{bisin}(61^0, 9^0) = & \underline{9{\cdot}712\,59} \\ & 2{\cdot}364\,12 = \log X \\ + \log \operatorname{cotg}(61^0 + 9^0) = & \underline{9{\cdot}561\,07} \\ & 1{\cdot}925\,19 = \log Y \end{array}$$

Da nun der log 177 für alle von zwei Polygonpunkten einer Polygonseite geschnittenen Seitenpunkte in Verwendung tritt, kann man den log 177 auf einen Zettel e i n m a l separat schreiben, ihn über den entsprechenden log bitang (b, a) halten und den log y durch Addition der beiden ersteren Logarithmen direkt erhalten, also

	nach der bisherigen Methode:
$\lg y = 2{\cdot}076\ 71$	$\lg 177 = 2{\cdot}247\ 97$
$-$ bisin $(61^0, 9^0) = 9{\cdot}712\ 59$	$+ \sin 75^0 = 9{\cdot}984\ 94$
$2{\cdot}364\ 12 = \log X$	$= 2{\cdot}232\ 91$
$+$ cotg $(70^0) = 9{\cdot}561\ 07$	$- \sin 44^0 = 9{\cdot}841\ 77 \quad 9{\cdot}972\ 99$
$1{\cdot}925\ 19 = \log Y$	$2{\cdot}391\ 14$
	$9{\cdot}534\ 05$
	$\lg X = 2{\cdot}364\ 13 \quad \log Y = 1{\cdot}925\ 19$
3 Logarithmen aufschlagen	5 Logarithmen aufschlagen
	1 Komplementwinkel bilden
2 Additionen	3 Additionen
1 Subtraktion	1 Subtraktion
5 Ansätze	9 Ansätze
30 Ziffern	54 Ziffern

Beträgt $\sphericalangle\, b + \sphericalangle\, e$ mehr als 90^0, so ist selbstverständlich das Y mit Bezug auf den Punkt I nach links gerichtet, was sich aus der Betrachtung der Figur leicht ergibt.

Die in dieser Abhandlung ersichtliche Anordnung der logarithmischen Tabellen von bitangens und bisinus hat die Vorteile, daß man nach Ermittlung des log d sowohl die Logarithmen der Bitangenten wie des Bisinus knapp beisammen hat.

Die in beiden Abhandlungen zur Veröffentlichung gelangten Daten über rasche Ordinatenermittlung und die sich hiedurch ergebende Zusammenstellung der Bitg- und Bisin-Tabellen halte ich trotz der noch anders versuchten und möglichen Lösungen für die praktische Anwendbarkeit am besten, da sich die zu suchenden Größen x, y, X, Y sehr leicht ermitteln lassen, ein Fehler (z. B. beim Ablesen sin statt cos $[90 \pm \alpha]$) beinahe ausgeschlossen ist, die Ermittlung von Komplementwinkeln entfällt, das Rechnen der Dreiecksseite A unnötig wird und bei einiger Übung, Verwendung entsprechender Drucksorten und richtiger Arbeitseinteilung wohl mindestens 50% an Zeitersparnis gegenüber den bisherigen Rechnungsmethoden herbeigeführt wird.

Berichtigung zu dem Aufsatz „Durchschlagsgenauigkeit“ in der „Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen“ 1925, Heft 1.

Von Prof. Dr. P. Wilski in Aachen.

In dem in der Überschrift genannten Aufsatz sind mir bei Berechnung der Größe a_2 in § 2 zwei Versehen untergelaufen, deren fehlerhafte Einwirkungen auf die Schlußformel des § 3 einander aufheben, sodaß diese Schlußformel unverändert bleibt.