

Paper-ID: VGI_192204



Rückwärtseinschneiden im Raum bei Aufnahmen aus Luftfahrzeugen

Paul Werkmeister ¹

¹ *Professor in Eßlingen-Württemberg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **20** (1–2, 3), S. 16–18, 35–40

1922

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Werkmeister_VGI_192204,  
Title = {R{\u}ckw{\a}rtseinschneiden im Raum bei Aufnahmen aus  
Luftfahrzeugen},  
Author = {Werkmeister, Paul},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {16--18, 35--40},  
Number = {1--2, 3},  
Year = {1922},  
Volume = {20}  
}
```



**Geodäsie.
Theodolitvermessung.**

Sunk, im Jänner 1918.

Ausgeführt: Dr. Franz Aubell.

Winkelwiederholung

Instrument: Rost, Grubenrep.-Theod.

a) des einfachen Winkels, [b) des Satzes].

Angabe: 30".

| Standpunkt | Winkel 2) | 2) Kreislage Wiederholungs- zahl | Einstellung auf | A b l e s u n g [Satz K. I.] | | | | | | [Satz K. r.] | | | | | | Satzmittel der zweifachen Richtung | | | Auf die erste bezogene | | | | | | Anmerkung und Lagenskizze |
|------------|--------------|---|-----------------|---------------------------------|---|----|--------|----|------|----------------------|---|----|--------|----|------|--|----|------|------------------------|----|------|-----|----|------|---------------------------------|
| | | | | 1 und 2 | | | Mittel | | | einzeln [1 und 2] | | | Mittel | | | zweifache | | | einfache | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | Richtungen | | | 1) | | | | | | |
| | | | | 0 | i | '' | 0 | i | '' | 0 | i | '' | 0 | i | '' | 0 | i | '' | 0 | i | '' | 0 | i | '' | |
| A | | 0 | Q | — | — | — | 0 | 0 | 0 | | | | 359 | 59 | 22 | 0 | 0 | — 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | 2 | γ | Y | — | — | 5 | 59 | 45 | | | | 5 | 58 | 45 | 5 | 59 | 15 | 5 | 59 | 34 | 2 | 59 | 47 | |
| | | 2 | α | — | — | — | 21 | 34 | 35 | | | | 21 | 34 | 10 | 21 | 34 | 22.5 | 21 | 34 | 41.5 | 10 | 47 | 20.7 | |
| | | 2 | p | — | — | — | 62 | 19 | 22.5 | | | | 62 | 17 | 57.5 | 62 | 18 | 40 | 62 | 18 | 59 | 31 | 9 | 29.5 | |
| | | 2 | III | — | — | — | 136 | 13 | 45 | | | | 136 | 13 | 25 | 136 | 13 | 35 | 136 | 13 | 54 | 68 | 6 | 57 | |
| | | 2 | C | — | — | — | 172 | 10 | 35 | A | | | 172 | 10 | 15 | 172 | 10 | 25 | 172 | 10 | 44 | 86 | 5 | 22 | |
| | | 2 | B | — | — | — | 222 | 15 | 45 | I | | | 222 | 15 | 45 | 222 | 15 | 45 | 222 | 16 | 04 | 111 | 8 | 02 | |

1) Entfällt bei a) 2) Entfällt bei b)

**Rückwärtseinschneiden im Raum bei Aufnahmen
aus Luftfahrzeugen.**

Von Dr. P. Werkmeister, Professor in Eßlingen-Württemberg.

Besteht die Aufgabe photogrammetrischer Aufnahmen aus einem Luftfahrzeug in der Festlegung von Neupunkten in einem Netz von einzelnen Festpunkten, so werden die Neupunkte durch Vorwärtseinschneiden von den Punkten aus bestimmt, in denen die Aufnahmen gemacht wurden; man muß daher zunächst für jede einzelne Aufnahme ihren Ort im Raum ermitteln. Diese Punktbestimmungen erfordern die Ausführung von Messungen auf Grund der aufgenommenen Bilder.

Nachdem der im Grundgedanken von C. Koppe angegebene Bildmeßtheodolit auch für die Verhältnisse der Luftbildmessung ausgebildet worden ist,¹ wird man in Zukunft die Ausmessung der Bilder möglichst mit Benützung des Bildmeßtheodolits vornehmen; da dieser die Messung von Horizontal-, Vertikal- und Positionswinkeln auf Grund der aufgenommenen Bilder gestattet, so wird man für die Festlegung der Neupunkte Horizontal- und Vertikalwinkel messen. Die Messung von solchen Winkeln auf Grund eines Bildes erfordert aber, daß das Bild in einer seiner Aufnahme entsprechenden Lage im Bildmeßtheodolit betrachtet werden kann; man muß zu diesem Zwecke das Bild mit der Neigung und der Kantung im Theodolit einstellen können, die die Kammerachse und die

¹ Vgl. R. Hegershoff und H. Cranz. Grundlagen der Photogrammetrie aus Luftfahrzeugen. Stuttgart 1919 und C. Pulfrich. Ueber Photogrammetrie aus Luftfahrzeugen und die ihr dienenden Instrumente. Jena 1919.

Bildachsen im Augenblick der Aufnahme hatten. Es ist dies auch erforderlich für den Fall, daß die Neupunktbestimmung stereophotogrammetrisch erfolgt. Man hat also für jedes Bild außer dem Aufnahmeort auch noch diejenigen Größen zu ermitteln, die für die Einstellung des Bildes im Bildmeßtheodolit erforderlich sind; wie weiter unten gezeigt wird, braucht man hierzu insbesondere den Neigungswinkel der Kammerachse.

Die grundlegende, für jedes aufgenommene Bild zu lösende Aufgabe des Rückwärtseinschneidens im Raum lautet für den Fall der einfachen Bestimmung in der für die Praxis in Frage kommenden Form so:

Auf einem aus einem Luftfahrzeug aufgenommenen Bilde mit bekannter innerer Orientierung erscheinen drei Festpunkte P_1 , P_2 und P_3 mit den gegebenen Koordinaten (x_1, y_1, H_1) , (x_2, y_2, H_2) und (x_3, y_3, H_3) ; es sollen die äußere Orientierung des Bildes — die Koordinaten (x, y, H) des Kammerobjektivs und der Neigungswinkel ν der Kammerachse — für den Augenblick der Aufnahme bestimmt werden.

Nachdem für diese Aufgabe eine Reihe von mittelbaren oder unmittelbaren Lösungen angegeben worden sind, handelt es sich bei dem heutigen Stand der Luftbildmessung um eine Sichtung der vorhandenen oder möglichen Lösungen vom Standpunkte der Praxis. Von einer für den praktischen Gebrauch bestimmten Lösung muß man zunächst verlangen, daß sie die zu bestimmenden Größen mit der erforderlichen Genauigkeit liefert; außerdem sollte sie anschaulich und an jeder Stelle leicht übersehbar sein, so daß sie sich in übersichtlicher Weise — also «einfach» oder «bequem» — durchführen läßt.

Wenn es auch nicht möglich ist, eine bestimmte Lösung als die einwandfrei beste zu bezeichnen — bis zu einem gewissen Grad ist ja die Wahl der Lösung Geschmacksache —, so kann man doch sagen, daß bei der vorliegenden Aufgabe nur wenige der bis jetzt mitgeteilten Lösungen für die praktische Anwendung in Frage kommen. Im folgenden sollen drei von den angegebenen Lösungen besprochen werden; die eine wurde von R. Hugershoff² ausgearbeitet, die zweite Lösung stammt von T. Fischer,³ die dritte wurde vom Verfasser⁴ angegeben. Die beiden ersten Lösungen sind rechnerische, die dritte ist eine zeichnerisch-rechnerische; bei allen drei Lösungen werden die zu bestimmenden Größen durch allmähliche Annäherung ermittelt, und zwar je mit beliebiger Genauigkeit.⁵ Die von Hugershoff angegebene Lösung und die erwähnte zeichnerisch-rechnerische Lösung sind — wenn auch mit gewissen rechnerischen

² Vgl. R. Hugershoff und H. Cranz a. a. O. Seite 56 und folgende.

³ T. Fischer, Ueber die Berechnung des räumlichen Rückwärtseinschnitts bei Aufnahmen aus Luftfahrzeugen. Jena 1921.

⁴ P. Werkmeister, Einfaches Rückwärtseinschneiden im Raum mit Hilfe von Positionswinkeln, Archiv für Photogrammetrie, 5. Band, Seite 46.

⁵ Die Bemerkung bei R. Hugershoff und H. Cranz (a. a. O. Seite 51), wonach die Ergebnisse der zeichnerisch-rechnerischen Lösung für eine unmittelbare Verwendung zu ungenau sind, ist unrichtig; auch bei der zeichnerisch-rechnerischen Lösung können die gesuchten Größen ebenso wie bei der rechnerischen Lösung mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden.

oder geometrischen Näherungen arbeitend — strenge Lösungen; die Fischer'sche Lösung ist keine streng durchgeführte Lösung.⁶

Die beiden rechnerischen Lösungen von Hugershoff und Fischer unterscheiden sich zunächst in der Ausmessung der Bilder mit Hilfe des Bildmeßtheodolits; Hugershoff mißt neben Horizontal- und Vertikalwinkeln insbesondere für die eigentliche Rechnung Positionswinkel, bei Fischer werden nur Horizontal- und Vertikalwinkel gemessen. Ein anderer Unterschied zwischen den beiden Lösungen besteht darin, daß Fischer die Aufnahmeortskordinaten (x, y, H) zusammen mit der Neigung ν und der in diesem Fall erforderlichen Kantung χ bestimmt, während Hugershoff zuerst die Koordinaten (x, y, H) berechnet und dann mit ihrer Hilfe die Neigung ν ermittelt.

(Schluß folgt.)

Die geodätische Frage bei den Agrarischen Operationen.

Von Agrarobergeometer **Josef Degn** (Wien).

Nachstehende Zeilen, über Einladung der Schriftleitung dieser Blätter geschrieben, sollen den Interessen keiner Gruppe, keiner Partei dienen. Sie entspringen lediglich persönlicher Ueberzeugung und Erfahrung sowie dem Wunsche, aus Liebe zur guten Sache ein bescheiden Teil beizutragen zur Bereinigung eines ungeklärten Zustandes bei den Agrarischen Operationen. Da sich in den Kreisen außenstehender fachverwandter Kreise vielfach Mißverständnisse und schiefe Auffassungen über dieses Problem eingenistet haben, so ist gerade diese Zeitschrift der rechte Ort, hierüber einige aufklärende Worte zu sprechen.

Um was es bei uns geht, läßt sich etwa in folgenden Satz zusammenfassen:

Sollen die agrarischen Operationen geodätisch orientiert bleiben oder nicht?

Der Zweck der Agrarischen Operationen darf bei den Lesern dieser Zeitschrift als bekannt vorausgesetzt werden. Wer sich hierüber kurz orientieren will, sei auf den betreffenden Aufsatz in Nr. 1/1920 dieser Zeitschrift verwiesen.

Im Rahmen der Agrarischen Operationen kommen forsttechnische, kulturtechnische, landwirtschaftliche und geodätische Aufgaben zur Lösung. Daraus folgt, daß in diesem Berufe Techniker der genannten vier Richtungen ihre Tätigkeit entfalten und bei den ihrem Spezialfache nächstliegenden Operationsgattungen Verwendung finden bzw. finden sollen.

Die meisten agrarischen Operationen bringen eine Neugruppierung, Neuverteilung von Grundbesitz nach Gesichtspunkten produktionsfördernder Zweckmäßigkeit mit sich. Daraus ergibt sich, daß die Geodäsie die ständige Begleiterin des Agrartechnikers bei allen seinen Arbeiten ist. Hierbei sei ohneweiters zugegeben, daß die Geodäsie nur Mittel zum Zwecke der Lösung agrartechnischer Probleme ist. Nur tritt insbesondere bei großzügigen Zusammenlegungen dieser Nebenzweck derart vorherrschend in Erscheinung, ja wird in verschiedenen Stadien dieser

⁶ Vgl. O. Eggert. Rückwärtseinschneiden im Raum. Zeitschrift für Vermessungswesen 1920. Seite 276.

Wenn $\varphi_1, \varphi_0, \varphi_2$ sowie $\gamma_1, \gamma_0, \gamma_2$ die geographischen Breiten und die Meridiankonvergenzen der drei Punkte A, E, B des Kronlandrechteckes sind, wenn N den Querkrümmungshalbmesser und $\frac{\rho''}{N}$ den Querkrümmungskoeffizienten

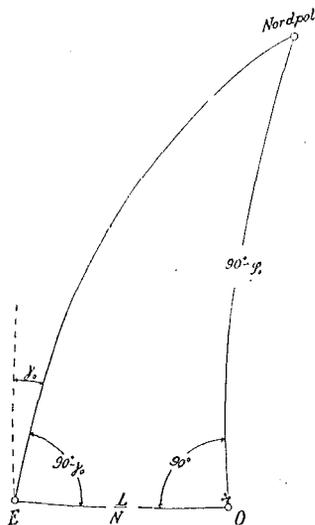


Fig. 2.

im Ursprung O bedeuten, so läßt sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke E —Nordpol— O nach der Napierschen Regel die Formel anschreiben:

$$\cos\left(90^\circ - \frac{L}{N}\right) = \cotg(90^\circ - \gamma_0) \cotg(90^\circ - \varphi_0)$$

oder
$$\sin \frac{L}{N} = \text{tang } \gamma_0 \cotg \varphi_0,$$

woraus folgt:

$$\text{tang } \gamma_0 = \sin \frac{L}{N} \text{ tang } \varphi_0 \quad \dots \dots \dots 2)$$

(Fortsetzung folgt.)

Rückwärtseinschneiden im Raum bei Aufnahmen aus Luftfahrzeugen.

Von Dr. P. Werkmeister, Professor in Eßlingen-Württemberg.

(Schluß.)

Das von Fischer als «räumlicher Rückwärtseinschnitt durch Zerlegen in Grundriß und Aufriß» bezeichnete Verfahren besteht darin, daß man unter Zugrundelegung der von der Aufnahme her genähert bekannten Werte der Neigung und der Kantung die Bildplatte im Bildmeßtheodolit einspannt und für diese Bildstellung die Horizontal- und die Vertikalwinkel nach den Festpunkten P_1, P_2 und P_3 mißt. Mit Hilfe dieser Winkel lassen sich Verbesserungen bestimmen,

die man an den angenommenen Näherungswerten für die Neigung und die Kantung anbringen muß. Nachdem die Einstellung des Bildes den verbesserten Werten der Neigung und Kantung entsprechend verändert worden ist, werden die Horizontal- und Vertikalwinkel erneut gemessen; mit den dabei sich ergebenden Werten wird das Verfahren wiederholt. Solche Wiederholungen des Verfahrens werden so lange vorgenommen, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Das Verfahren liefert — insbesondere bei seiner von O. Eggert angegebenen strengen Durchführung — die endgültigen Werte um so rascher, je genauer die zuerst eingeführten Näherungswerte der Neigung und der Kantung sind.

Bei dem «Pyramidenverfahren» von Hugershoff werden zuerst mit Benützung des Bildmeßtheodolits die drei Positionswinkel zwischen den drei Festpunkten gemessen; mit Hilfe dieser Winkel können nach Einführung von Näherungswerten unter Verwendung des Taylor'schen Satzes die Koordinaten des Aufnahmeorts bestimmt werden.⁷ Das Verfahren führt im allgemeinen mit Rücksicht auf die durch den Taylor'schen Satz bedingte Näherung nicht sofort zum Ziel und muß deshalb wiederholt werden; auch hier erhält man die endgültigen Werte der Koordinaten (x, y, H) um so rascher je genauer die ursprünglich eingeführten Näherungswerte sind. Ob man bei dieser Art der Bestimmung von (x, y, H) diese Größen unmittelbar oder zuerst die Kantenlängen der Festpunktpyramide bestimmt, ist bis zu einem gewissen Grad Geschmacksache; im ersten Fall geht die Rechnung von Näherungswerten für die Koordinaten aus, im zweiten Fall von Näherungswerten für die Seitenkanten der Festpunktpyramide. Um Näherungswerte für die Koordinaten bestimmen zu können, mißt man mit dem Bildmeßtheodolit auf Grund des genähert eingestellten Bildes die beiden Horizontalwinkel und einen Höhenwinkel nach den Festpunkten; Näherungswerte für die Pyramidenkanten erhält man in einfacher Weise mit Hilfe eines maßstäblichen, aus kräftigem Papier hergestellten Modells der Festpunktpyramide.

Die von C. Pulfrich⁸ gemachte Bemerkung von dem «umständlichen Pyramidenverfahren» kann sich nicht auf den ersten Teil dieses Verfahrens — Bestimmung der Koordinaten (x, y, H) des Aufnahmeortes — beziehen;⁹ sie ist aber berechtigt, für die beiden von Hugershoff angegebenen Verfahren zur Ermittlung der Neigung ν und der Kantung χ . Das erste Verfahren besteht in der «Berechnung der Kantung und Neigung aus den Bildern zweier gegebenen Punkte»;¹⁰ es ist derartig unübersichtlich, daß es für den praktischen Gebrauch

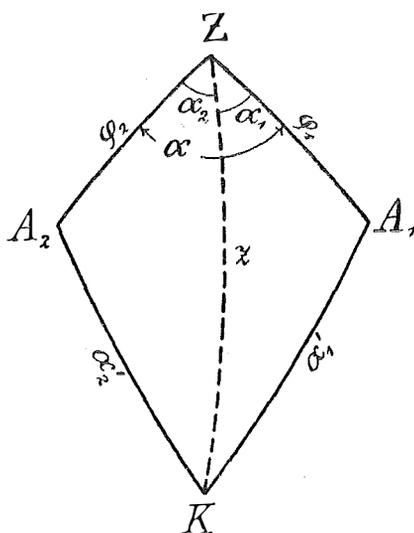
⁷ Der Einfluß der Refraktion auf die Aufnahmeortskordinaten ist — vgl. R. Huguershoff und H. Cranz a. a. O., Seite 68, und K. Hesse, Einfluß der Refraktion auf die Standortskordinaten des räumlichen Rückwärtseinschneidens, Zeitschr. f. Vermessungswesen 1920, Seite 601 — so gering, daß man ihn vernachlässigen kann; über den Einfluß der Erdkrümmung siehe Huguershoff und Cranz a. a. O., Seite 70.

⁸ Vgl. a. a. O., Seite IV.

⁹ T. Fischer macht a. a. O., Seite 4, die Bemerkung, daß das Pyramidenverfahren deshalb sehr viel Zeit erfordere, weil bei ihm die Berechnung der Positionswinkel, Kantenwinkel, Festpunkt-dreiecke und Kantenlängen notwendig sei; hierzu ist zu bemerken, daß eine Berechnung von Winkeln nicht erforderlich ist, die allein notwendigen Positionswinkel werden mit dem Theodolit unmittelbar gemessen; die „Berechnung des Festpunkt-dreiecks“ ist denkbar einfach.

¹⁰ Vgl. Huguershoff und Cranz a. a. O., Seite 63.

nicht in Frage kommt. Das andere Verfahren besteht darin, daß man aus den vorher bestimmten Aufnahmeortskordinaten (x, y, H) und den gegebenen Festpunktskordinaten die horizontalen Richtungswinkel und die vertikalen Tiefenwinkel vom Aufnahmeort nach den Festpunkten rechnet; die Bildplatte wird dann in den Bildmeßtheodolit gebracht, und «der Plattenträger so lange geneigt und die Platte verkantet, bis die drei Festpunktbilder unter den vorgeschriebenen Tiefenwinkeln erscheinen». Die gesuchten Werte der Neigung ν und der Verkantung χ können nach endgültiger Einstellung der Platte am Bildmeßtheodolit abgelesen werden. Wenn man auch bei einem solchen Einstellen des Bildes im Bildmeßtheodolit durch Versuche von den von der Aufnahme her bekannten Näherungswerten für die Neigung und die Kantung ausgehen wird, so ist doch nicht ersichtlich, wie das Verfahren in befriedigender Weise zum Ziel führen soll.



Im folgenden soll ein Verfahren zur Bestimmung der Neigung ν und der Kantung χ aus den zuvor ermittelten Aufnahmeortskordinaten (x, y, H) angegeben werden, das mit Rücksicht auf seine Anschaulichkeit im Aufbau und seine Uebersichtlichkeit in der Durchführung vom praktischen Standpunkt aus nichts zu wünschen übrig läßt. Das Verfahren setzt voraus, daß ein Bildmeßtheodolit zur Verfügung steht, mit dessen Hilfe man die Positionswinkel zwischen der Kammerachse und den Festpunkten — bei der Bildpyramide sind dies die Winkel in der Pyramidenspitze zwischen der Höhe der Pyramide und deren Seitenkanten — messen kann, wie dies beim Zeiß'schen Bildmeßtheodolit in einfacher Weise möglich ist.¹¹

Der Grundgedanke des Verfahrens besteht darin, daß man die Neigung ν und gleichzeitig die Aufnahme-richtung auf Grund der Koordinaten (x, y, H) berechnet, mit ihrer Hilfe und mit Benützung der horizontalen Richtung und des

¹¹ Vgl. C. Pulfrich a. a. O., Seite 10.

Tiefenwinkels nach einem Festpunkt die Bildplatte im Bildmeßtheodolit einstellt und die Kantung χ am Theodolit abliest.

Die Berechnung der Neigung ν erfordert die Verwendung von zwei der drei Festpunkte, z. B. von P_1 und P_2 . Denkt man sich um den Aufnahmeort O eine Kugel mit beliebigem Halbmesser beschrieben, so ist auf dieser durch die Vertikale in O , die Kammerachse und die Geraden OP_1 und OP_2 ein sphärisches Viereck ZA_1KA_2 (vgl. die Figur) bestimmt; in diesem Viereck ist $A_1ZA_2 = \alpha$ der Horizontalwinkel zwischen P_1 und P_2 im Aufnahmeort, $ZA_1 = \varphi_1$ die Zenitdistanz des Punktes P_1 , $ZA_2 = \varphi_2$ die Zenitdistanz von P_2 und $ZK = z = 90^\circ + \nu$ die Zenitdistanz der Kammerachse; $A_1ZK = \alpha_1$ und $A_2ZK = \alpha_2$ sind die Horizontalwinkel zwischen der Kammerachse einerseits und den Zielungen nach P_1 und P_2 andererseits, $A_1K = \alpha_1'$ und $A_2K = \alpha_2'$ sind endlich die Positionswinkel zwischen der Kammerachse und den Geraden OP_1 und OP_2 . Von diesen Stücken des Viereckes kann man den Horizontalwinkel α und die Zenitdistanzen φ_1 und φ_2 aus den Koordinaten des Aufnahmeortes und denen der Festpunkte berechnen; mißt man die beiden Positionswinkel α_1' und α_2' mit dem Bildmeßtheodolit, so ist das Viereck bestimmt und man kann die Diagonale z und die Winkel α_1 und α_2 in Z berechnen. Da man von der Aufnahme her den Neigungswinkel der Kammerachse, also auch deren Zenitdistanz genähert kennt, so kann man z und damit auch α_1 und α_2 durch das folgende Annäherungsverfahren berechnen, das im Grundgedanken mit der Regula falsi zum Auflösen von Gleichungen übereinstimmt.¹²

Das Verfahren besteht darin, daß man mit den gegebenen Werten für φ_1 , φ_2 , α_1' und α_2' unter Zugrundelegung des bekannten Näherungswertes z_0 für z die Werte für die Winkel α_1 und α_2 in den beiden sphärischen Dreiecken A_1KZ und A_2KZ berechnet. Je nachdem die Summe der für α_1 und α_2 berechneten Werte $\left\{ \begin{array}{l} \text{größer} \\ \text{kleiner} \end{array} \right\}$ als der gegebene Wert von α ist, ist dann der Näherungswert z_0 zu $\left\{ \begin{array}{l} \text{groß} \\ \text{klein} \end{array} \right\}$; dementsprechend nimmt man für z einen anderen Näherungswert z_0' an, für den man wieder die Summe der den Winkeln α_1 und α_2 entsprechenden Werte ermittelt. Die Abweichung $\Delta\alpha'$ dieser Summe von dem gegebenen Winkel α zeigt, ob der zweite Näherungswert von z zu groß oder zu klein ist; zugleich gibt ihr absoluter Wert einen Anhalt für die voraussichtliche Abweichung des zweiten Näherungswertes z_0' von dem endgültigen Wert für z , so daß man einen dritten, dem genauen Wert möglichst nahe liegenden Näherungswert z_0'' wählen kann. Rechnet man auch für diesen dritten Näherungswert die ihm entsprechenden Werte der Winkel α_1 und α_2 , und die Abweichung $\Delta\alpha''$ ihrer Summe von α , so kann man auf Grund der den Näherungswerten z_0' und z_0'' entsprechenden Winkelabweichungen $\Delta\alpha'$ und $\Delta\alpha''$ den endgültigen Wert von z durch lineare Interpolation bestimmen.

¹² Auf die Verwendung der Regula falsi zur Lösung von Aufgaben der trigonometrischen Punktbestimmung in der Ebene hat schon E. Hammer hingewiesen; vgl. Zeitschrift für Vermessungswesen 1895, Seite 601.

Die rechnerische Durchführung des Verfahrens ist aus drei Gründen ganz einfach; erstens braucht man zur Berechnung der den Näherungswerten von z entsprechenden Werte von α_1 und α_2 nur den bekannten Cosinussatz im sphärischen Dreieck, zweitens kann man die Rechnung dadurch bequem gestalten, daß man für die Näherungswerte von z runde Werte wählt, und drittens sind bei den Wiederholungen verschiedene Zahlen immer dieselben. Liegt der erste, von der Aufnahme her bekannte Näherungswert für z genügend nahe an dessen endgültigem Wert, so kommt man mit zwei Näherungswerten aus. Der Gang des Verfahrens möge an einem Zahlenbeispiel gezeigt werden; es ist dies dasselbe, das O. Eggert a. a. O. benützt hat.¹³

Für eine bestimmte Aufnahme ergaben sich auf Grund der Koordinaten der Festpunkte und des Aufnahmeortes die Werte

$$\varphi_1 = 126^\circ 33' 14'' \quad \varphi_2 = 122^\circ 58' 13'' \quad \alpha = 44^\circ 50' 42''$$

Durch Messung mit dem Bildmeßtheodolit¹⁴ erhält man

$$\alpha_1' = 20^\circ 55' 50'' \quad \text{und} \quad \alpha_2' = 18^\circ 58' 01''$$

Die Neigung der Kammer betrug näherungsweise 30° , so daß also $z_0 = 120^\circ$ ist.

Mit $z_0 = 120^\circ$ erhält man auf Grund der aus dem Cosinussatz sich unmittelbar ergebenden Gleichungen

$$\cos \alpha_1 = \frac{\cos \alpha_1' - \cos z_0 \cos \varphi_1'}{\sin z_0 \sin \varphi_1'} \quad \text{und} \quad \cos \alpha_2 = \frac{\cos \alpha_2' - \cos z_0 \cos \varphi_2'}{\sin z_0 \sin \varphi_2'}$$

für α_1 und α_2 die Werte $23^\circ 51' 36''$ bzw. $22^\circ 00' 30''$ und für deren Summe $45^\circ 52' 06''$. Da diese Summe größer als der gegebene Wert von α ist, so ist $z_0 = 120^\circ$ zu groß; nimmt man deshalb $z_0' = 119^\circ$ an, so findet man für die beiden Winkel α_1 und α_2 die Werte $23^\circ 18' 00''$ bzw. $21^\circ 40' 36''$ und für deren Summe $44^\circ 58' 36''$. Ein Vergleich dieser Zahl mit dem gegebenen Wert von α zeigt, daß $z_0' = 119^\circ$ noch zu groß ist; da $\triangle \alpha'$ nur noch $7' 54''$ im Gegensatz zu $\triangle \alpha = 1^\circ 01' 24''$ entsprechend $z_0 = 120^\circ$ ist, so setzt man z. B. $z_0'' = 118^\circ 30'$, womit man für den Winkel α den Wert $44^\circ 29' 34''$ — also einen kleineren Wert als den gegebenen — und $\triangle \alpha'' = 21' 08''$ erhält. Bestimmt man nun rechnerisch oder zeichnerisch den Schnitt der Geraden durch die Punkte ($119^\circ, + 7' 54''$) und ($118^\circ 30', - 21' 08''$), so findet man $z = 118^\circ 51' 50''$. Berechnet man mit diesem Wert zur Untersuchung seiner Genauigkeit, zur Probe die Winkel α_1 und α_2 , so findet man $\alpha_1 = 23^\circ 13' 20''$, $\alpha_2 = 21^\circ 37' 36''$, und damit $\alpha = 44^\circ 50' 56''$; da dieser Wert nur noch um $14''$ von dem gegebenen abweicht, so können die gefundenen Werte für z bzw. ν , α_1 und α_2 die endgültigen angesehen werden.¹⁵

Hat man nach dem im Vorstehenden angegebenen Verfahren die Größen ν , α_1 und α_2 ermittelt, so kann man mit ihrer Hilfe im Bildmeßtheodolit das Bild dem Augenblick der Aufnahme entsprechend einstellen und damit die Verkantung γ am Bildmeßtheodolit ablesen. Zu diesem Zwecke stellt man zunächst

¹³ Das Beispiel findet sich zuerst bei R. Hegershoff und H. Cranz a. a. O.

¹⁴ Im vorliegenden Fall mußten die Winkel α_1' und α_2' aus den übrigen Größen berechnet werden.

¹⁵ O. Eggert findet a. a. O. $\nu = 28^\circ 52' 01''$; bei R. Hegershoff und H. Cranz a. a. O., Seite 66, wird $\nu = 28^\circ 50,1'$ angegeben.

die Neigung ν ein und bringt dann die Ziellinie des Fernrohrs zum Zusammenfallen mit der der Kammerachse entsprechenden Geraden; dreht man nun das Fernrohr um den Horizontalwinkel α_1 und stellt noch die Zenitdistanz φ_1 ein, so hat man die Platte noch so lange zu kanten, bis der den Winkeln α_1 und φ_1 entsprechende Punkt P_1 angezielt ist.

Eine durchgreifende Probe für die am Bild ausgeführten Messungen, die gesamte Rechnung und die Einstellung der Platte im Bildmeßtheodolit erhält man dadurch, daß man zuletzt noch den Horizontalwinkel α_2 und die Zenitdistanz φ_2 am Bildmeßtheodolit einstellt, und nachsieht, ob der Punkt P_2 angezielt ist; zum Ueberfluß kann man sich auch noch die horizontale Richtung und die Zenitdistanz für den Punkt P_3 mit Hilfe der Koordinaten des Aufnahmeortes und der Festpunkte berechnen, und nachsehen, ob die dadurch bestimmte Einstellung des Fernrohrs auf den Punkt P_3 weist.

Wenn man auch in Praxis einen Aufnahmeort im allgemeinen nur durch einfaches Rückwärtseinschneiden im Raum bestimmen wird, so soll doch mit Rücksicht auf die beiden oben besprochenen Lösungen von Hegershoff und von Fischer noch eine kurze Bemerkung über das mehrfache Rückwärtseinschneiden im Raum beigefügt werden.

Bei Verwendung des Pyramidenverfahrens kann man die bei mehrfachem Einschneiden sich ergebende Ausgleichungsaufgabe mit Hilfe der mehr als drei Positionswinkel in einfacher Weise streng durchführen;¹⁶ bei dem Grund- und Aufrißverfahren, wo am Bildmeßtheodolit zwei Arten von Winkeln — Horizontal- und Vertikalwinkel — gemessen werden, ist eine strenge Ausgleichung nicht einfach möglich.¹⁷ Die aus der Lösung für das einfache Einschneiden ohne weiteres sich ergebende strenge Lösung für das mehrfache Einschneiden darf als Vorteil des Pyramidenverfahrens bezeichnet werden.

Zum Schluß noch ein Wort zur zeichnerisch-rechnerischen Lösung der vorliegenden Aufgabe. Eine solche Lösung hat ganz allgemein nur dann eine Berechtigung, wenn ihr Gang vollständig übersehbar ist, wenn also die Lösung unmittelbar aus einer geometrischen Lösung hervorgeht oder auf einer solchen beruht. Eine derartige Lösung ist die oben schon erwähnte, vom Verfasser angegebene Lösung;¹⁸ keine Lösung dieser Art ist die von A. Klingatsch mitgeteilte Lösung,¹⁹ bei der sich zwei für die Zeichnung und Rechnung in Frage kommenden Kegelschnitte nicht unmittelbar aus einer geometrischen Lösung, sondern erst aus einer analytischen Umformung ergeben.

Die Anwendung einer zeichnerisch-rechnerischen Lösung ist Geschmacksache; es gibt aber sicher Leute, die einer solchen Lösung mit Rücksicht auf ihre Uebersichtlichkeit und die Einfachheit der erforderlichen Formeln bei dem rechnerischen Teil gelegentlich den Vorzug geben.

¹⁶ Vgl. R. Hegershoff und H. Cranz a. a. O., Seite 84.

¹⁷ Die von T. Fischer a. a. O., Seite 20, angegebene Ausgleichung ist keine strenge Ausgleichung.

¹⁸ Daß man die a. a. O. mitgeteilte Lösung auch für nicht in einer Ebene liegende Punkte und auch zur Ermittlung der Aufnahmeortskordinaten verwenden kann, ist ohne weiteres klar.

¹⁹ Archiv für Photogrammetrie, V. Band, Seite 105.