Paper-ID: VGI_192202

Beitrag über die Krümmung des Geoids in Europa

Richard Schumann

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **20** (1–2), S. 4–7

1922

BibTeX:


```
@ARTICLE{Schumann_VGI_192202,
Title = {Beitrag {\"u}ber die Kr{\"u}mmung des Geoids in Europa},
Author = {Schumann, Richard},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {4--7},
Number = {1--2},
Year = {1922},
Volume = {20}
}
```

Beitrag über die Krümmung des Geoids in Europa.

Von **R. Schumann** in Wien.

In seiner Abhandlung[1]: «Die Größe der Erde» hat Helmert eine Uebersicht und Kritik gegeben über Verbesserungen da der Erd-Halbachse a, wie sie aus den größeren Europäischen Gradmessungen folgen. Diese verlangen im allgemeinen, so wie auch andere Gradmessungen, eine Verlängerung der Besselschen Halbachse; aber auch eine Verkleinerung tritt auf. Dabei kam es Helmert darauf an, allgemein über die Länge der Erdachse Aufschluß zu bekommen.

Es scheint indessen nötig zu werden, auch auf die Verteilung der einzelnen da zu achten. Bereits 1914 habe ich versucht[2], dabei systematisches Verhalten aufzudecken; Anordnung der da nach der mittleren Polhöhe des Gradmessungsbogens ließ eine Abnahme mit der Breite selbst erkennen und im Folgenden soll diese Zusammenstellung durch einige neuere Werte von da ergänzt werden.

1. Im Abschnitt X einer demnächst erscheinenden Veröffentlichung[3]: «Der Meridianbogen Großenhain—Kremsmünster—Pola» werden u. a. die Polhöhen und Azimute auf 33 Stationen des nahe 7^0 langen Bogens benützt, um sowohl Lotabweichungen ξ_0 und η_0 für den Bezugspunkt Jauerling, als Erdelement-Verbesserungen da und $d\alpha$ in bekannter Weise abzuleiten mit der üblichen Forderung: $\Sigma(\xi_i^2 + \eta_i^2) =$ Minimum; dabei ist α die Abplattung, $\eta_i = \lambda_i \cdot \cos\varphi_i$, λ_i die Lotabweichung in Länge. Der wesentliche Zweck dieses Ausgleiches war, in den dabei erlangten Normalgleichungen jenen Beitrag zur Hand zu haben, den dieser einzelne Bogen zur Summe der Normalgleichungen aller jener Gradmessungsbögen liefert, deren Bearbeitung das Oesterreichische Gradmessungs-Bureau unternommen hatte; siehe Sitzungsbericht der Kommission vom 26. März 1907.

Die Auflösung der Normalgleichungen allein ergab da und $d\alpha$ zunächst als recht unsicher; der rechnerische Grund dafür liegt darin, daß diese beiden Unbekannten schon in den Fehlergleichungen jenes kurzen Bogens mit einander verbunden auftreten. Es ist leicht zu erkennen und hat sich mehrfach bestätigt, daß die Abplattung aus kleinen Bögen nicht sicher bestimmt werden kann; numerisch liegt der Grund in der Kleinheit ihrer Koeffizienten. Mit größerer Sicherheit läßt sich dagegen eine Verbesserung der Halbachse berechnen, wobei klar ist, daß ein derartiges da nur für das Meßgebiet Bedeutung hat. In den Formeln für die Krümmungs-Radien ϱ_M im Meridian und ϱ_N im Ersten Vertikal:

$$\varrho_M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}^{\,3}}, \qquad \varrho_N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

bedeutet e^2 das Quadrat der numerischen Exzentrizität der Erdellipse, φ die mittlere Breite des Bogens. Es ist e^2 nahe gleich $2\,\alpha$ oder rund $1:150$, mithin

[1] Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, XXVIII, 1906. S. 525—537.

[2] Veröffentlichung der k. k. Oesterreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung: Ueber die Lotabweichung am Laaerberg bei Wien (als Manuskript gedruckt); S. 21.

[3] Begonnen im Oesterreichischen Gradmessungs-Bureau, beendet im Bundes-Vermessungsamt in Wien; 1922.

eine kleine Größe; aus den beiden Formeln folgt, daß da sowohl nahe gleich $d\varrho_M$ als $d\varrho_N$ ist, welche beiden Größen für das Meßgebiet unmittelbar Geltung haben. Fällt da nach den astronomischen Messungen in diesem Gebiete $\frac{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ aus, so spricht dies zugleich für $\frac{\text{geringere}}{\text{größere}}$ Krümmung daselbst. Als Ersatz für da nimmt man besser einen Wert aus einer anderweiten gesicherten Bestimmung an, etwa aus Schweremessungen, und rechnet seinen Einfluß weg, wenn man es nicht vorzieht, da als Unbestimmte mit den absoluten Gliedern zu verbinden zur bequemen Schätzung seines Einflusses auf die weiteren Ergebnisse.

Die Einführung eines gut bestimmten, allgemein gültigen Wertes von a kann umso eher geschehen, als es sich für die Lotabweichungen in erster Linie darum handelt, bestmögliche Annäherungen an «absolute» oder «normale» Werte zu finden.

Demgemäß ist in jenen, unter der Leitung von Fr. Hopfner berechneten Lotabweichungs-Gleichungen $da = 0$ gesetzt, d. h. die Besselsche Abplattung beibehalten worden. Damit ergeben sich folgende Normalgleichungen nebst Lösungen,

$$
\begin{array}{rrrrl}
+\,33{\cdot}180\,\xi_0 & -\,0{\cdot}301\,\eta_0 & +\,3{\cdot}973\,u & +\,83{\cdot}133 & = 0, \\
-\,0{\cdot}301 & +\,32{\cdot}785 & -\,7{\cdot}242 & -\,74{\cdot}743 & = 0, \\
+\,3{\cdot}973 & -\,7{\cdot}242 & +\,16{\cdot}6828 & +\,61{\cdot}167 & = 0; \\
 & & & [nn] & = 1200{\cdot}80,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\xi_0 = -\,2''{\cdot}20 \pm 0''{\cdot}61, & \text{Gewicht } 32{\cdot}17, & [nn\cdot 3] = 741{\cdot}99, \\
\eta_0 = +\,1''{\cdot}73 \pm 0''{\cdot}64, & \text{»} \quad 29{\cdot}58, & [nn\cdot 3] = 741{\cdot}99, \\
u = -\,2{\cdot}39 \pm 0{\cdot}90, & \text{»} \quad 14{\cdot}62, & [vv] = 742{\cdot}07,
\end{array}
$$

$$
\text{mittlere Lotabweichung: } \sqrt{\frac{742{,}07}{66-4}} = \pm\,3''{\cdot}46;
$$

der zweite Wert für $[nn\cdot 3]$ folgt aus der Auflösung in umgekehrter Reihenfolge. Zur rechnerischen Bequemlichkeit war eingeführt worden $u = 10\,000\,\frac{da}{a}$, woraus folgt

$$
da = -\,1524{\cdot}2\,m \pm 576{\cdot}95\,m.
$$

2. Eine Verminderung des Krümmungs-Radius, zugleich eine stärkere Krümmung für das Meßgebiet, ergibt sich auch aus einer Ausgleichung des Meridianbogens «Großenhain (Sachsen)—Termoli (Italien)», 9·3° umfassend, mit 8 Polhöhen, 8 Azimuten und 7 Längen; sie ist auf Seite 12 unter Nr. 2 der schon erwähnten Veröffentlichung über die Lotabweichung am Laaerberg angegeben, nämlich

aus Breiten und Längen	aus Breiten und Azimuten
$-\,1483\,m \pm 1259\,m$,	$-\,1516\,m \pm 1171\,m$,

somit im Mittel nach Gewicht: $-\,1501\,m \pm 857\,m$.

Den beiden Beobachtungsreihen zu 1) und 2) sind gemeinsam die Polhöhen und Azimute in Großenhain, Dablitz und Pola, die übrigen Stationen sind verschieden, für 1) wurden keine Längen benützt. Somit darf man wohl von einer Bestätigung des Endwertes in 1) sprechen.

3. Aus dem 27⁰ langen «Neuen Westeuropäischen Meridianbogen» zwischen den Shetlands-Inseln und Algier läßt sich ein Teilbogen herausheben, der von der Mitte des Kontinents bis zur Südküste Spaniens reicht; er umfaßt 19 Lotabweichungs-Gleichungen zwischen Rosendaël-lès-Dunkerque (Belgien) und Conjuros (Spanien), sie sind auf Seite 257 der «Verhandlungen» des Jahres 1906[1] angegeben. Die dortigen Ziffern wurden um eine Dezimale gekürzt, es folgen die Normalgleichungen und Lösungen:

$$+ 19{\cdot}038\,\xi_p - 3{\cdot}934\,n + 37{\cdot}99 = 0,$$
$$- 3{\cdot}934 \quad + 1{\cdot}2930 \quad - 6{\cdot}113 = 0;$$
$$[nn] = 364{\cdot}889,$$
$$\xi_p = -2''{\cdot}74 \pm 1''{\cdot}53, \quad \text{Gewicht } 7{\cdot}069, \quad [nn\cdot 2] = 282{\cdot}794,$$
$$[nn\cdot 2] = 282{\cdot}798,$$
$$n = -3{\cdot}62 \pm 5{\cdot}89, \quad » \quad 0{\cdot}4801, \quad [vv] = 282{\cdot}83,$$
$$\text{mittleres } \xi = \sqrt{\frac{282{\cdot}83}{19-2}} = \pm 4''{\cdot}1;$$

damit wird hier $da = \frac{n \cdot a}{100000} = -230{\cdot}76\,m \pm 375{\cdot}43\,m$. Für die damaligen Untersuchungen war es als genügend erachtet worden, nur die Parallelen-Abstände zum Ausgleich zu benützen; ein η_p entfällt daher, ξ_p ist die Lotabweichung im Triangulationspunkte Pantheon.

Mit diesen drei Werten für da läßt sich die eingangs erwähnte Zusammenstellung nunmehr vervollständigen.

	Mittl. Breite	Amplit. i. Bg. gr. Kr.	Anz. d. Stat.	da_{Bessel}	
Skandinavisch-Russischer Meridianbogen	58⁰	25⁰	19	+ 1058 *m*	± 127 *m*
Neuer Westeuropäischer Meridianbogen (nördlicher Teil) . . .	55	12	16	+ 788	± 400
Längen-Gradmessung Irland—Ural	52	42	28	+ 660	± 105
Meridianbogen Großenhain—Pola .	48·7	6·4	33	— 1524	± 577
Längen-Gradmessung Kischinew—Astrachan	47·5	13	6	— 47	± 650
Meridianbogen Großenhain—Termoli	46·7	9·3	8	— 1501	± 857
Neuer Westeuropäischer Meridianbogen (südlicher Teil)	42·8	14·3	19	— 231	± 375

Ueber die Sicherheit der Schlüsse aus der Reihe der da entscheiden ihre mittleren Fehler, hier zu berechnen aus den Lotabweichungen, denen gegenüber

[1] Verhandlungen der 15. Allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung, 1906, I. Teil, S. 244—261 nebst Uebersichtskarte.

die Meßungenauigkeit eine geringe Rolle spielt. In zwei Fällen sind die mittleren Fehler größer als *da* selbst, immerhin ist der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten *da*, nämlich 1289 *m*, reichlich dreimal so groß als sein mittlerer Fehler $\pm$ 396 *m*. Auch ist der Gang in den *da* zu beachten; er wird widerspruchslos für die fünf über 10° langen Bögen. Ueberhaupt wächst die Genauigkeit mit der Bogenlänge, weniger gut mit der Anzahl der Stationen; man erhält eine fallende Reihe der mittleren Fehler, wenn man sie nach den Produkten (oder auch den Summen) aus Amplitude und Stationsanzahl ordnet. Eine Abhängigkeit der *da* in Europa von der Breite scheint nach obiger Zusammenstellung zu bestehen.

Aus folgendem Täfelchen:

Teilbogen aus dem Neuen Westeuropäischen Meridianbogen von	Amplitude	Anz. d. Stat.	da_{Bessel}	
Rosendaël-lès-Dunkerque (Belgien) bis Conjuros (Spanien) . .	14°3	19	— 231 *m*	$\pm$ 375 *m*
» » Nemours (Algier)	15·9	21	+ 293	$\pm$ 383
» » Laghouat (Algier)	17·2	25	+ 146	$\pm$ 332

erkennt man, daß die Krümmung des Bogens sich nach dem Ueberschreiten des Mittelmeeres wieder der normalen nähert.

Es hat hiernach den Anschein, als ob das Geoid nach dem Mittelmeere zu abfiele oder ob dem letzteren Meere, einer der großen Bruchzonen angehörend, eine Geoidmulde entspreche. Der Unterschied der Lotabweichungen im Sinne «astronomisch minus geodätisch» zwischen der Südküste Spaniens und Algier ist etwa 20″; die nördlichen Polhöhen sind fast ebensoviel zu klein als die südlichen zu groß, wobei wohl örtliche, durch Attraktionsrechnungen zu verfolgende Verhältnisse an den beiden Küsten mitspielen. Der Abstand zwischen den entsprechenden Stationen ist etwa 270 *km*. Gibt man dem Geoid zwischen ihnen im senkrechten Schnitte die Gestalt einer flachen Parabel, so lehrt eine leichte Rechnung, daß deren Scheitel eine relative Tiefe von 3 bis 4 *m* hat. Bessere Werte für eine solche Senkung unter das Referenz-Ellipsoid würde man erhalten durch einen Gradmessungsbogen, der in isostatisch kompensiertem Gebiete, etwa in den inneren Teilen großer Kontinente, beginnt und endet. Für die Bestimmung der Erdelemente ist es schädlich, die Gradmessungsbögen in Störungsgebieten beginnen oder enden zu lassen, oder es wirkt die Kenntnis dieser Gebiete selbst günstig ein auf die Anlage der Bögen. Im Zusammenhange hiermit wäre es auch lebhaft zu begrüßen, wenn das bereits geschlossene Triangulations-Polygon um die westliche Hälfte des Mittelmeeres[5] viel dichter als bisher mit astronomischen Stationen ausgestattet würde.

---

[5] Hierüber siehe unter anderm die „Verhandlungen der XIII. Allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung“ in Paris, 1900, II. Teil, Beilage *B*, XI. S. 393—398. Bericht über die Triangulationen, erstattet von F. R. Helmert und A. Börsch; mit einer Uebersichtskarte.