Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier sich kreuzender Geraden. Markscheideraufgabe

Franz Aubell [1]

[1] *o. ö. Professor der Mont. Hochschule in Leoben*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **19** (5–6), S. 70–74

1921

in der Lage der abgesteckten Schichtlinienpunkte für den Maßstab 1 : 10000 als verschwindend klein angesehen werden dürfen. Trägt man die einzelnen Punkte auf Grund ihrer Koordinaten in die aus der photogrammetrischen Aufnahme entstandene Karte ein, und bestimmt man dann für jeden Punkt durch Interpolation die Höhe zwischen den beiden nächstgelegenen Schichtlinien, so erhält man die folgenden als wahre Fehler der stereophotogrammetrisch bestimmten Punkthöhen anzusprechenden Fehler ε

-4	± 0	± 0	$+7$	-4	-5	-4	-6	-14	-4 *dm*
$+5$	$+14$	$+16$	$+9$	$+10$	$+4$	$+9$	$+14$	$+14$	$+17$ *dm*

Bei diesen Fehlern überwiegen — besonders hinsichtlich der Summe ihrer absoluten Werte — die positiven Fehler; trotzdem kann man die Fehler als zufällige betrachten[8]. Berechnet man einen mittleren Höhenfehler μ in der üblichen Weise, so erhält man

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{1806}{20}} = \pm 9{,}5 \; dm.$$

Das untersuchte Höhenschichtlinienstück verläuft in einem Gelände, bei dem im Mittel $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}10$ ist.

Bei den oben erwähnten badischen Blättern beträgt der mittlere Höhenfehler in dem entsprechenden Gelände $\pm$ 10,5 *dm*; als größter Fehler wurde bei diesen Blättern $\pm$ 39 *dm* bestimmt.

Wenn auch die im vorstehenden mitgeteilte Untersuchung einer stereophotogrammetrisch durchgeführten Geländeaufnahme sich auf ein verhältnismäßig nur kleines Gebiet einer solchen erstreckt, so gestattet sie doch — besonders mit Rücksicht auf die beliebige Wahl der beiden Vertikalschnitte und des Schichtlinienstückes — ein Urteil über die Genauigkeit, mit der man solche Aufnahmen durchführen kann. Auf jeden Fall zeigt die Untersuchung, daß bei einem für die photogrammetrische Aufnahme geeigneten Gelände die Darstellung des Geländes in Höhenschichtlinien stereophotogrammetrisch mit Benützung des Stereoautographen unter Umständen mindestens ebenso genau durchgeführt werden kann als nach dem Verfahren der Theodolittachymetrie.

Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier sich kreuzender Geraden.

Markscheideraufgabe.

Von **Prof. Dr. F. Aubell**, o. ö. Professor der Mont. Hochschule in Leoben.

In Nr. 4 des Jahrganges 1920 der «Oesterr. Zeitschrift für Vermessungswesen» erscheint von Prof. A. Klingatsch-Graz auf raumanalytischem Wege die Lösung der Aufgabe durchgeführt, die Länge und Lage der kürzesten Verbindungsstrecke zwischen zwei sich im Raume kreuzenden Geraden anzugeben.

---

[8] Zur Zeit der photogrammetrischen Aufnahme trug das in Frage stehende Geländestück kurzen Graswuchs, so daß nicht mit einer Verschiebung der Schichtlinie infolge verschieden hoher Bodenbedeckung zu rechnen ist.

Die Lösung dieser Aufgabe kann für den Bergbau von Wichtigkeit sein, wenn es sich darum handelt, aus Gründen der Bewetterung oder Sicherung gegen Brandgefahr oder um rasch an eine Unglücksstelle zu kommen, auf dem kürzesten Wege zwischen zwei sich kreuzenden Bremsbergen oder Steilschächten eine Verbindung herzustellen. Sich kreuzende söhlige Strecken und Strecken mit gleichem Streichen kommen hiebei nicht in Betracht, weil bei ersteren die kürzeste Verbindungsstrecke saiger, bei letzteren söhlig ist und sich deren Lage und Abmessung unmittelbar aus dem Grund- und Aufrisse ergeben.

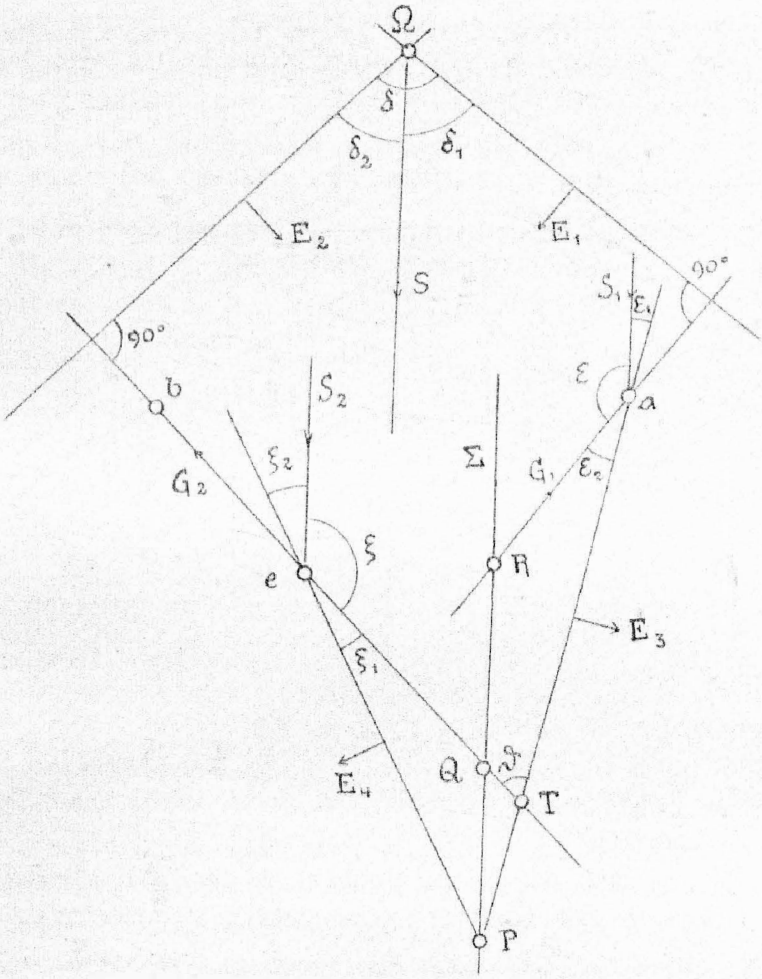

Fig. 1.

Soll die Verbindungsstrecke nur Fahrungszwecken dienen, so ist deren Tonnlage gleichgültig, für Zwecke der Förderung hingegen ist ein Höchstwert der Neigung einzuhalten, der nicht überschritten werden darf, so daß das Problem ein anderes werden kann, wenn sich die Neigung der kürzesten Verbindungslinie als stärker herausstellt als deren noch zugelassener Höchstwert. Außerdem ist praktisch die Frage der kürzesten Verbindungsstrecke meist nur dann von Bedeutung, wenn sich letztere im selben Mittel wie die zu verbindenden Grubenteile (z. B. in Kohle) bewegt, da ein Eindringen in die umlagernde Schicht zu vermeiden sein wird.

Da die erwähnte Aufgabe in das Gebiet des Markscheiders fällt, welchem in den Gruben die Durchführung solcher Probleme obliegt, und sie daher für diesen von Bedeutung ist, so sei im Folgenden noch eine andere Art der Lösung unter Zuhilfenahme der ebenen und sphärischen Trigonometrie gegeben.

Da die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen zwei sich kreuzenden Geraden auf beiden senkrecht steht und der geometrische Ort aller zu einer Geraden in einem Punkte Senkrechten eine zur Geraden senkrechte Ebene ist, so erhält man das Streichen und den Tonnlagswinkel der Verbindungsgeraden, indem man die Scharungslinie zweier Ebenen bestimmt, deren Streichen das Kreuzstreichen zu jenem der Geraden vorstellt und deren Verflächen sich mit dem Tonnlagswinkel der Geraden zu 90^0 ergänzt. Von beiden Geraden (Fig. 1) G_1 und G_2 muß ein Punkt im Raume (*a* bezw. *b*), das Streichen (der Richtungswinkel) ϱ_1, ϱ_2 und der Tonnlagswinkel φ_1, φ_2 bekannt sein. Von den zwei Ebenen, deren Scharungslinie zu bestimmen ist, erscheint somit gegeben: deren

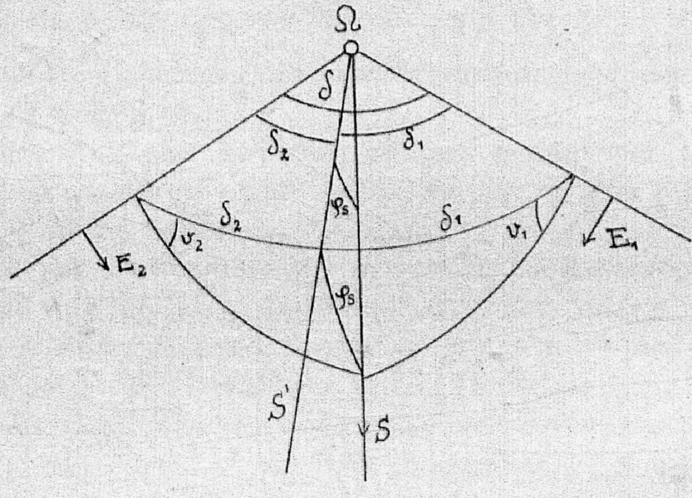

Fig. 2.

Streichen $\varrho_{E1} = \varrho_1 \pm 90^0$, $\varrho_{E2} = \varrho_2 \pm 90^0$ und deren Verflächen $v_1 = 90 - \varphi_1$, $v_2 = 90 - \varphi_2$.

Das Streichen ϱ_s und der Tonnlagswinkel φ_s der Scharungslinie S dieser Ebenen ergibt sich unter Zuhilfenahme zweier rechtwinkliger sphärischer Dreiecke (Fig. 2):

Es besteht zunächst die Beziehung

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \varrho_{E2} - \varrho_{E1} \text{ und } \operatorname{tg} \varphi_s = \operatorname{tg} v_1 \cdot \sin \delta_1 = \operatorname{tg} v_2 \cdot \sin \delta_2.$$

Setzt man daraus $\sin \delta_2 : \sin \delta_1 = \operatorname{tg} v_1 : \operatorname{tg} v_2$, so bestehen zwei Wege, um aus dem Sinusverhältnis und der gegebenen Summe der zwei Winkel δ_1 und δ_2 diese selbst abzuleiten:

$$a)\quad \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \operatorname{tg} \mu, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \cdot \operatorname{ctg}(45 + \mu),$$

$$b)\quad \frac{\sin \delta_2 - \sin \delta_1}{\sin \delta_2 + \sin \delta_1} = \frac{\operatorname{tg} v_1 - \operatorname{tg} v_2}{\operatorname{tg} v_1 + \operatorname{tg} v_2}, \text{ woraus sich ergibt:}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{\delta_2 + \delta_1}{2} \cdot \frac{\sin (v_1 - v_2)}{\sin (v_1 + v_2)}.$$

Die Richtung der Scharungslinie erhält man aus

$$\varrho_s = \varrho_{E1} + \delta_1 = \varrho_{E2} - \delta_2$$

und deren Tonnlagswinkel φ_s aus der oben angeschriebenen Gleichung für $\operatorname{tg} \varphi_s$.

Man könnte sich das Streichen und den Tonnlagswinkel der kürzesten Verbindungsgeraden auch in der Weise berechnen, daß man das Streichen und Verflächen einer Ebene bestimmt, die zu den beiden Geraden G_1 und G_2 parallel ist. Die zu suchende Gerade steht zu dieser Ebene senkrecht und hat somit eine Richtung, die jener der Ebene ins Kreuz streicht, und einen Tonnlagswinkel, der sich mit dem Verflächen dieser Ebene zu 90^0 ergänzt.

Nun kann die Gerade Σ, welche beide Gerade G_1 und G_2 rechtwinklig schneidet und deren kürzesten Abstand QR enthält, auf folgende Weise erhalten werden: Da der geometrische Ort aller Geraden von der Richtung ϱ_s und Tonnlage φ_s, welche die Geraden G_1 und G_2 schneiden, Ebenen sind: $E_3 (G_1, S_1 // S)$ und $E_4 (G_2, S_2 // S)$, so erhält man die Gerade als Scharungslinie dieser zwei Ebenen, um deren Streichen und Verflächen es sich nun handelt. Die Berechnung soll für die Ebene E_3 durchgeführt werden. (S. Fig. 3.)

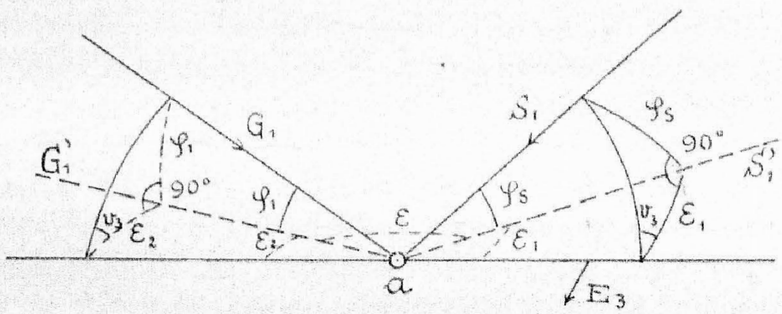

Fig. 3.

Es ist $\varepsilon = \varrho_s - \varrho_1$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 180 - \varepsilon$ und $\operatorname{tg} \vartheta_3 = \dfrac{\operatorname{tg} \varphi_s}{\sin \varepsilon_1} = \dfrac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\sin \varepsilon_2}$; wie oben führt die weitere Berechnung nach *a*) oder *b*) zu den Winkeln ε_1 und ε_2, welche das Streichen der Ebene E_3 $\varrho_3 = \varrho_s + \varepsilon_1 = \varrho_1 - \varepsilon_2$ und aus $\operatorname{tg} \vartheta_3$ deren Verflächen ergeben. Derselbe Rechenvorgang gilt auch für die Ebene E_4.

Eine Rechenprobe besteht darin, daß man als Scharungslinie der Ebenen E_3 und E_4 eine Gerade Σ vom Streichen ϱ_s und von der Tonnlage φ_s erhalten muß.

Sind auf den Geraden G_1 und G_2 a und c Punkte derselben Höhe, wobei die Koordinaten des letzteren aus jenen von b mit Hilfe der Ebeneweite $bc = h_{bc} \cdot \operatorname{ctg} \varphi_2$ abgeleitet werden können, so erhält man einen Punkt P der den kürzesten Abstand enthaltenden Geraden Σ durch Vorwärtseinschneiden aus den Punkten a und c, die Punkte Q und R ergeben sich durch Vorwärtseinschneiden aus P und c bezw. P und a. Aus den nun bekannten Horizontalabständen folgen weiters die Höhenkoten der Punkte Q und R, somit auch deren schiefe Entfernung.

Die Ausrechnung des Punktes P kann umgangen werden durch unmittelbares Bestimmen des Durchstoßpunktes Q der Geraden G_2 mit der Ebene E_3, zu welchem Zwecke man in der Ebene E_3 eine Decklinie D zur Geraden G_2 annimmt und deren Tonnlagswinkel φ_D auf dem für «Diagonalstrecken» üblichen Wege berechnet: (Fig. 4.)

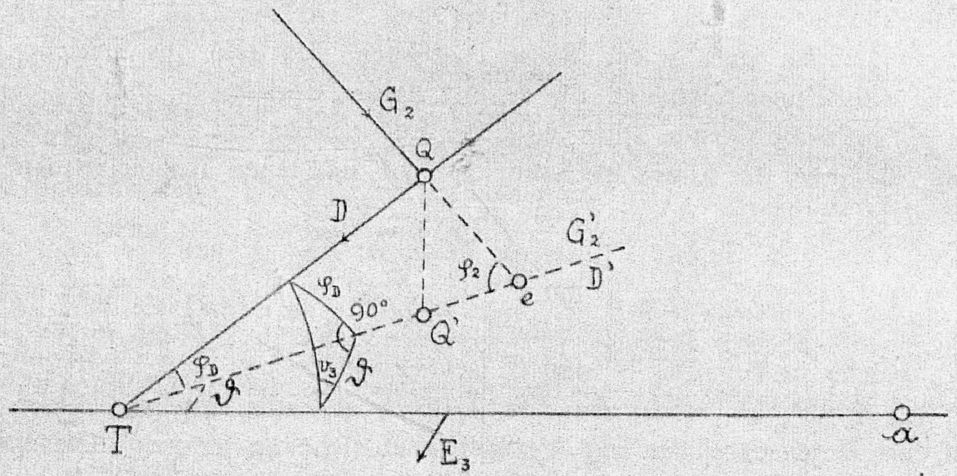

Fig. 4.

Der Unterschied der Richtung von G_2 bezw. D mit jener der Ebene E_3 ist $\vartheta = \varrho_3 - \varrho_2$ und mit diesem Winkel rechnet sich der Tonnlagswinkel der Decklinie D $\operatorname{tg} \varphi_D = \operatorname{tg} v_3 \cdot \sin \vartheta$.

Der Punkt T wird durch Einschneiden aus a und e bestimmt. Aus dem saigeren Dreiecke TQe berechnet man die schiefen Entfernungen TQ und eQ, somit auch die ebensöhligen TQ' und eQ', welche für die Berechnung der Koordinaten von Q gebraucht werden. Von Q und a aus bestimmt man R durch Vorwärtseinschneiden.

Dienstbarmachung der Fortführungsarbeiten für die Neugestaltung des Katasters.

Von **Ing. August Gabrielli,** Evidenzhaltungs-Oberinspektor in Salzburg.

Der finanzielle Zusammenbruch unseres Staates hat die Verwirklichung unserer Bestrebungen, die auch als Schaffung des «Einheitsplanes» in dem Organisationsstatut des Bundesvermessungsamtes eine gesetzliche Festlegung fanden, in sehr weite Ferne gerückt. Wir müssen deshalb trachten, die Fortführung des alten Operates so einzustellen, daß wir damit die öffentlichen Bedürfnisse noch durch hundert und mehr Jahre zu befriedigen in der Lage sind, und wenn möglich die mannigfaltigen Vermessungsarbeiten dieses Zeitraumes dazu verwenden, um die Neuvermessung des Bundesgebietes bezw. die Schaffung des Einheitsplanes vorzubereiten.

Vergleicht man die ursprüngliche Darstellung der Originalmappen der Uraufnahme aus den dreißiger Jahren des vorigen Jahrhunderts mit dem heutigen Stande der Fortführungsmappen, so wird man feststellen können, wie große Verschiedenheiten diese beiden Mappenbilder aufweisen, insbesondere dort, wo