Die Gleichung eines Meterstabes, ihre Darstellung und deren Fehlerhyperbeln

Alfred Basch [1]

[1] *Oberkommissär der Normal-Eichungs-Kommission, Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **19** (3–4), S. 38–46

1921

nischen Hochschule heute schon gegeben sind, diese Fächer schließlich und endlich für den Vermessungsingenieur doch immer die Hauptfächer bleiben müssen und nur einige Dozenturen betreffend die Kulturtechnik und agrarische Operationen geschaffen werden müßten, sprechen, in erster Linie ökonomische Momente für die Belassung des geodätischen Studiums an jener Stätte, mit welcher es organisch verbunden ist: an der Technischen Hochschule.

Ing. E. Bubla y.

Die Gleichung eines Meterstabes, ihre Darstellung und deren Fehlerhyperbeln.

Von Ing. Dr. Alfred Basch, Oberkommissär der Normal-Eichungs-Kommission, Wien.

Um einen Meterstab für genaue Messungen verwenden zu können, ist es notwendig zu wissen, um wie viel sich seine Länge bei der Temperatur des schmelzenden Eises von einem Meter unterscheidet (A) und um wie viel er sich bei 1° Celsius Temperaturzunahme ausdehnt (B); mit anderen Worten, man muß die Gleichung kennen, welche seine Länge (L) als Funktion der Temperatur (x) angibt. Man wird in der Regel die Ausdehnung B als eine innerhalb der in Betracht kommenden Temperaturen unveränderliche Größe betrachten, demnach in der Stabgleichung von der Einführung eines in Bezug auf die Temperatur quadratischen Gliedes absehen können. Die Gleichung lautet sodann:

$$L = 1^m + A + Bx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Um zu den Konstanten A und B zu gelangen, wird der Unterschied der Länge des Stabes und einem Meter (y) bei verschiedenen Temperaturen gemessen. Sind mehr als zwei zusammengehörige Wertepaare von x und y festgestellt, so sind die gesuchten Konstanten A und B überbestimmt. Ihre «plausibelsten» Werte A_0 und B_0 führen zu dem System der «vorteilhaftesten Fehler»

$$v = A_0 + B_0 x - y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und sind nach der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate durch die Bedingung

$$[v^2] = \text{Minimum} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

bestimmt. Hiebei ist vorausgesetzt, daß sämtlichen Beobachtungen gleiches Gewicht zukommt. Die Gleichung

$$y = A_0 + B_0 x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

gibt dann den plausibelsten Wert der «Korrektur» der Stablänge und ersetzt die Stabgleichung.

Jedes Beobachtungspaar werde durch eine in einem Punkte mit den orthogonalen Koordinaten x und y konzentrierte Masse versinnlicht. Das System sämtlicher die Beobachtungspaare versinnlichenden Massen werde als das «Beobachtungsbild» bezeichnet. n sei die Zahl der Beobachtungspaare. Die Koordinaten des Schwerpunktes des Beobachtungsbildes

$$s_x = \frac{[x]}{n}, \quad s_y = \frac{[y]}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

geben das arithmetische Mittel der beobachteten Temperaturen beziehungsweise der gemessenen Längenkorrekturen an.

$$i_x^2 = \frac{[x^2]}{n}, \quad i_y^2 = \frac{[y^2]}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

sind die Quadrate der Trägheitsradien des Beobachtungsbildes in Bezug auf die Achsen y und x,

$$f_{xy}^2 = \frac{[xy]}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

ist die Zentrifugalfläche in Bezug auf das Achsensystem xy.

Die Koordinaten in Bezug auf ein zum System xy paralleles System $\xi\eta$ von Schwerpunktachsen

$$\xi = x - s_x, \quad \eta = y - s_y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

geben die Abweichungen vom Mittel der beobachteten Temperaturen beziehungsweise der gemessenen Längenkorrekturen. Die Trägheitsradien des Beobachtungsbildes in Bezug auf diese Achsen, die durch die Gleichungen

$$i_\xi^2 = \frac{[\xi^2]}{n} = i_x^2 - s_x^2, \quad i_\eta^2 = \frac{[\eta^2]}{n} = i_y^2 - s_y^2 \quad \ldots\ldots (9)$$

gegeben sind, bezeichnen die mittlere quadratische Abweichung der beobachteten Temperaturen beziehungsweise der gemessenen Längenkorrekturen vom arithmetischen Mittel. Schließlich ist

$$f_{\xi\eta}^2 = \frac{[\xi\eta]}{n} = f_{xy}^2 - s_x s_y = i_\xi j_\eta = i_\eta j_\xi \quad \ldots\ldots (10)$$

die Zentrifugalfläche des Beobachtungsbildes in Bezug auf das neue Achsensystem.

Die aus n »Fehlergleichungen« von der Form (2) gebildeten, der Bedingung (3) entsprechenden »Normalgleichungen« lauten bei Division durch die Beobachtungszahl n

$$\left.\begin{aligned} A_0 + s_x B_0 &= s_y, \\ s_x A_0 + i_x^2 B_0 &= f_{xy}^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

und führen zu

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{i_x^2 s_y - f_{xy}^2 s_x}{i_x^2 - s_x^2} = \frac{i_\xi^2 s_y - f_{\xi\eta}^2 s_x}{i_\xi^2} = s_y - \frac{f_{\xi\eta}^2}{i_\xi^2} s_x \\ B_0 &= \frac{f_{xy}^2 - s_x s_y}{i_x^2 - s_x^2} = \frac{f_{\xi\eta}^2}{i_\xi^2} = \frac{j_\eta}{i_\xi} \end{aligned}\right\} \quad . (12)$$

Die Gerade (RR in Abb. 1), deren y-Ordinaten die plausibelsten Werte der Korrekturen angeben, hat in Bezug auf das Achsensystem $\xi\eta$ die Gleichung

$$i_\xi^2 \eta - f_{\xi\eta}^2 \xi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

und ist, wie man leicht ersicht, der zur $y(\eta)$-Richtung konjugierte Diameter der Culmannschen Zentralellipse des Beobachtungsbildes

$$i_\eta^2 \xi^2 - 2 f_{\xi\eta}^2 \xi\eta + i_\xi^2 \eta^2 = i_\xi^2 i_\eta^2 - f_{\xi\eta}^4, \quad \ldots\ldots (14)$$

da sie aus der Differentiation der Kurvengleichung nach η hervorgeht.

In Fig. 1 ist E die Zentralellipse des Beobachtungsbildes; dessen Schwerpunkt S ist Ursprung des Koordinatensystems $\xi\eta$. Der Trägheitsradius i_ξ gibt den Abstand der zu η parallelen Tangenten von dieser Achse an; ebenso gibt

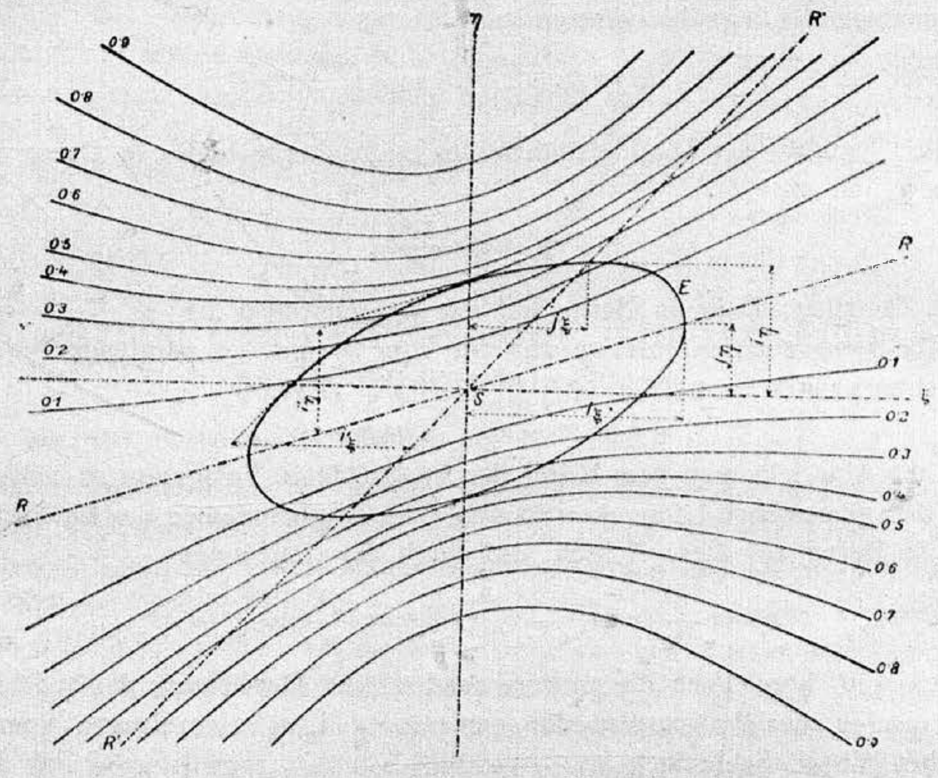

Fig. 1.

der Trägheitsradius i_η den Abstand der zur ξ-Achse parallelen Tangenten von dieser Achse. $\pm j_\eta$ ist die Ordinate der Berührungspunkte der zur η-Achse parallelen Tangenten, $\pm j_\xi$ die Abszisse der Berührungspunkte der zur ξ-Achse parallelen Tangenten in Bezug auf das System $\xi\eta$. Die Achsen x und y sind als für die augenblickliche Betrachtung unwesentlich nicht eingezeichnet. Durch die Berührungspunkte der zur η Achse parallelen Tangenten und durch den Schwerpunkt S geht die «Schaulinie» RR, die bei eingezeichneter x-Achse den zu jeder Temperatur gehörigen plausibelsten Wert der Korrektur angibt. Die Ordinaten der Schnittpunkte der Zentralellipse mit der η-Achse sind durch die Gleichung gegeben

$$i_\eta'^2 = \frac{i_\xi^2 i_\eta^2 - f_{\xi\eta}^4}{i_\xi^2} = \frac{[v^2]}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Sie geben demnach das quadratische Mittel der Abweichungen der errechneten Werte der Korrekturen von den beobachteten, gleichzeitig auch den Trägheitsradius des Beobachtungsbildes in Bezug auf die Schaulinie RR, sofern man, der Auffassung Binets folgend, den Abstand eines Punktes von einer Achse nicht in der zu ihr senkrechten, sondern in der zu ihr konjugierten Richtung mißt. Die Abszisse der Schnittpunkte der Zentralellipse mit der ξ-Achse, die durch die Gleichung

$$i_\xi'^2 = \frac{i_\xi^2 i_\eta^2 - f_{\xi\eta}^4}{i_\eta^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

gegeben ist, spielt ebenso wie der eingezeichnete, zur ξ-Achse konjugierte Diameter $R'R'$ in der hier behandelten Aufgabe keine wesentliche Rolle.

Die Schaulinie kann entweder mit Hilfe der graphostatischen Methode bestimmt oder es können ihre Konstanten errechnet werden.[1]) Will man die Schaulinie zeichnen ohne den graphostatischen Weg zu betreten, so dürfte es am zweckmäßigsten sein, die Ordinaten des Schwerpunktes des Beobachtungsbildes und die Korrektur A für 0° auszurechnen.

Das folgende Zahlenbeispiel ist dem «Lehrbuch der praktischen Physik» von F. Kohlrauch (elfte Auflage, Seite 13 f.) entnommen. Der zu prüfende Meterstab wurde bei $n = 4$ verschiedenen Temperaturen mit einem Normalmaßstab verglichen. Die betreffenden Werte sind in der folgenden Zahlentafel enthalten.

Punkt	x	y	x^2	xy	y^2	v
P_1	20	0·22	400	4·4	0·0484	+ 0·008
P_2	40	0·65	1600	26·0	0·4225	+ 0·002
P_3	50	0·90	2500	45·0	0·8100	— 0·036
P_4	60	1·05	3600	63·0	1·1025	+ 0·026
Summe	170	2·82	8100	138·4	2·3834	0
Mittelwert	$s_x = 42{\cdot}5$	$s_y = 0{\cdot}705$	$i_x{}^2 = 2025$	$f_{xy}{}^2 = 34{\cdot}6$	$i_y{}^2 = 0{\cdot}59585$	—

Durch die Kenntnis der Schwerpunktskoordinaten ist ein Punkt der «Schaulinie», der Schwerpunkt des Beobachtungsbildes (S), bereits gegeben. Wiewohl in der Gleichung für die Ausdehnung B Größen vorkommen, die sich auf das Koordinatensystem $\xi\eta$ beziehen, wird es nicht zweckmäßig sein, rechnungsmäßig die Koordinatentransformation vorzunehmen, da man dann, soferne man nicht für die Genauigkeit nachteilige Vernachlässigungen begehen will, unnötigerweise mit mehr Dezimalstellen zu rechnen hätte. Man berechnet vorteilhafter die für die Momente zweiten Grades in Bezug auf das Schwerpunktsachsensystem charakteristischen Größen aus den korrespondierenden Größen, die sich auf das parallele Achsensystem xy beziehen.

$$i_\xi{}^2 = i_x{}^2 - s_x{}^2 = 2025 - 1806{\cdot}25 = 218{\cdot}75$$
$$f_{\xi\eta}{}^2 = f_{xy}{}^2 - s_x s_y = 34{\cdot}6 - 29{\cdot}9625 = + 4{\cdot}6375$$
$$i_\eta{}^2 = i_y{}^2 - s_y{}^2 = 0{\cdot}59585 - 0{\cdot}497025 = 0{\cdot}098825.$$

Hieraus ergibt sich der plausibelste Wert der Ausdehnung

$$B_0 = \frac{f_{\xi\eta}{}^2}{i_\xi{}^2} = \frac{+ 4{\cdot}6375}{218{\cdot}75} = + 0{\cdot}0212\ mm/\text{Grad } C$$

und der plausibelste Wert der «Korrektur» für die Temperatur 0° C

$$A_0 = s_y - B_0 s_x = 0{\cdot}705 - 0{\cdot}901 = - 0{\cdot}196\ mm.$$

Demnach beträgt der wahrscheinlichste Wert der Länge des Stabes bei 0° C 0·999804 m und die Gleichung des Stabes lautet

[1] A. Basch, „Ueber eine Anwendung der graphostatischen Methode auf den Ausgleich von Beobachtungsergebnissen". Mitteilungen des k. k. Technischen Versuchsamtes. 1912. Oesterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen. 1913.

$$L = \overset{m}{1} - \overset{mm}{0\cdot196} + \overset{mm}{0\cdot0212}\,x,$$

wobei die Temperatur x in Graden Celsius einzusetzen ist.

Um die Zentralellipse zu zeichnen (Abbildung 2), kann man die folgenden Größen verwenden:

$$i_\xi = 14\cdot790, \qquad i_\eta = 0\cdot31436,$$

$$j_\xi = \frac{f_{\xi\eta}^2}{i_\eta} = 14\cdot752, \quad j_\eta = \frac{f_{\xi\eta}^2}{i_\xi} = 0\cdot31355.$$

Daß das Verhältnis

$$\frac{j_\xi}{i_\xi} = \frac{j_\eta}{i_\eta} = \frac{f_{\xi\eta}^2}{i_\xi\, i_\eta} = r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

der Einheit so nahe ist, ist ein Zeichen dafür, daß die Zentralellipse des Beobachtungsbildes sehr länglich ist und daß die zunächst einigermaßen willkürliche Annahme eines linearen Zusammenhanges zwischen Temperatur und Längenkorrektur vollkommen berechtigt war. Man bezeichnet dieses charakteristische Verhältnis, das von der Wahl der Maßeinheiten vollständig unabhängig ist, das also unverändert bliebe, wenn man die Längen z. B. in Wiener Zoll und die Temperatur nach Graden Reaumur messen würde[1], als «Korrelationskoeffizienten»[2]; er ist in dem betrachteten Beispiel

$$r = +\,0\cdot9974.$$

Da r von der positiven Einheit sich nur wenig unterscheidet, besteht zwischen Temperatur und Längenkorrektur nahezu die «vollkommene positive Korrelation».

Besser verwendbar für die Zeichnung der Ellipse sind ihre Schnittpunkte mit den Schwerpunktsachsen $\xi\,\eta$, gegeben durch

$$i_\xi'^2 = \frac{i_\xi^2 i_\eta^2 - f_{\xi\eta}^4}{i_\eta^2} = 1\cdot1333,$$

$$i_\eta'^2 = \frac{i_\xi^2 i_\eta^2 - f_{\xi\eta}^4}{i_\xi^2} = 0\cdot000512,$$

daher

$$i_\xi' = 1\cdot0646, \quad i_\eta' = 0\cdot022627.$$

Die Tangenten in den Schnittpunkten der Koordinatenachsen mit der Zentralellipse sind den zu den betreffenden Achsen konjugierten Diametern parallel. In dem hier betrachteten Beispiel ist der nahezu vollkommenen Korrelation wegen zwischen den Richtungen dieser beiden konjugierten Diameter, der Richtung der großen Achse der Zentralellipse und jener der einen Diagonale des der Ellipse umschriebenen koordinatenachsparallelen Rechteckes kein großer Unterschied.

Die Gerade, welche die Gleichung des Meterstabes versinnlicht, stimmt nicht mit jener überein, zu der man gelangen würde, wenn unendlich viel Beobachtungen vorliegen würden. Die durchschnittliche quadratische Abweichung

---

[1] Wie aus Gleichung (17) und der Fig. 1 hervorgeht, ist r das Verhältnis zwischen gleichgerichteten Strecken. Darin liegt auch die Ursache der Unabhängigkeit von den gewählten Maßeinheiten.

[2] Vergl. G. Udny Yule, An Introduction to the Theory of Statistics.

eines beobachteten Korrekturwertes von dem durch diese Gerade gegebenen wird größer sein als i_η'. Man bezeichnet als mittleren Fehler einer Beobachtung jenen Fehler, dessen Quadrat durch Division der Summe der Quadrate der vorteilhaftesten Fehler durch die Zahl der Ueberbestimmungen hervorgeht; es ist daher

$$\mu_y^2 = \frac{[v'^2]}{n-2} = \frac{n}{n-2} i_\eta'^2. \qquad (18)$$

Für das vorliegende Beispiel ergibt sich, da $\frac{n}{n-2} = 2$

$$\mu_y^2 = 0{\cdot}001024, \quad \mu_y = \pm 0{\cdot}032.$$

Die Genauigkeit der Bestimmung der beiden «Parameter» A und B der «Schaulinie» ist durch deren «mittlere Fehler» gegeben, es ist

$$\left.\begin{aligned} \mu_A &= \mu_y \sqrt{\frac{i_x^2}{i_x^2 - s_x^2}} = \frac{i_x}{i_\xi} \mu_y \\ \mu_B &= \mu_y \sqrt{\frac{1}{i_x^2 - s_x^2}} = \frac{\mu_y}{i_\xi} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Im vorliegenden Beispiel ist

$$\mu_B = \pm \frac{0{\cdot}032}{14{\cdot}790} = \pm 0{\cdot}0022$$

und da $i_x = 45$

$$\mu_A = i_x \mu_B = \pm 0{\cdot}09736.$$

Dieser letzte Wert gibt den mittleren Fehler der Korrektur der Stablänge für die Temperatur 0^0, diese ist daher in der symbolischen, die Genauigkeit ihrer Bestimmung kennzeichnenden Schreibweise

$$A = -0{\cdot}196 \pm 0{\cdot}097;$$

ebenso ist die Ausdehnung des Stabes bei $1^0\,C$ Temperaturerhöhung

$$B = \pm 0{\cdot}0212 \pm 0{\cdot}0022.$$

Die «wahren Werte» der Parameter A und B bleiben natürlich unbestimmt und unbestimmbar. Dafür, daß ihre «wahren Werte» zwischen A und $A + dA$, beziehungsweise zwischen B und $B + dB$ liegen, bestehen die Wahrscheinlichkeiten

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{W}(A) &= \frac{1}{\mu_A\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\mu_A^2}(A-A_0)^2} dA = \frac{i_\xi}{\mu_y i_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i_\xi^2}{2\mu_y^2 i_x^2}(A-A_0)^2} dA \\ \mathfrak{W}(B) &= \frac{1}{\mu_B\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\mu_B^2}(B-B_0)^2} dB = \frac{i_\xi}{\mu_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i_\xi^2}{2\mu_y^2}(B-B_0)^2} dB \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Da die Abweichungen der «wahren Werte» der beiden Parameter von ihren «plausibelsten Werten» voneinander keineswegs unabhängig sind, besteht für die Koexistenz der Abweichungen $A - A_0$ und $B - B_0$ die von dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten verschiedene Wahrscheinlichkeit[1]

[1] Vergl. E. Czuber, „Theorie der Beobachtungsfehler", Leipzig, 1891.

$$\mathfrak{W}(A,B) = \frac{i_\xi}{2\pi\mu_y^2} e^{-\frac{1}{2\mu_y^2}\left[(A-A_0)^2 + 2 s_x (A-A_0)(B-B_0) + i_x^2 (B-B_0)^2\right]} dA \cdot dB \qquad (21)$$

Alle Geraden

$$y = A + Bx\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

deren Parameter die Bedingung

$$(A-A_0)^2 + 2 s_x (A-A_0)(B-B_0) + i_x^2 (B-B_0)^2 = k^2 \quad \ldots \quad (23)$$

erfüllen, wobei k einen konstanten Wert bedeutet, besitzen die gleiche Wahrscheinlichkeit, «wahre Schaulinie» zu sein. Die durch die Gleichungen (22) und (23) gegebene Schar von «Schaulinien gleicher Wahrscheinlichkeit» besitzt eine Hyperbel von der Gleichung

$$\frac{(\eta - B_0\,\xi)^2}{k^2} - \frac{\xi^2}{i_\xi^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

als «Einhüllende». Mittelpunkt der Hyperbel ist der Schwerpunkt des Beobachtungsbildes. Die «plausibelste Schaulinie» ist der zur η-Richtung konjugierte imaginäre Diameter dieser Hyperbel, der reelle Diameter der η-Richtung beträgt $2\,k$.[1]

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Parameter der «wahren Schaulinie» die Bedingung

$$(A-A_0)^2 + 2 s_x (A-A_0)(B-B_0) + i_x^2 (B-B_0)^2 < k^2 \quad \ldots \quad (25)$$

erfüllen, mithin die Hyperbel (24) in zwei imaginären Punkten schneiden, beträgt

$$W_1 = \iint \mathfrak{W}(A,B) =$$

$$= \frac{i_\xi}{2\pi\mu_y^2} \iint e^{-\frac{1}{2\mu_y^2}\left[(A-A_0)^2 + 2 s_x (A-A_0)(B-B_0) + i_x^2 (B-B_0)^2\right]} dA \cdot dB =$$

$$= \frac{1}{\mu_y^2} \int_0^k e^{-\frac{k^2}{2\mu_y^2}} k\,dk = 1 - e^{-\frac{k^2}{2\mu_y^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Sieht man k als variablen Parameter an, so ist Gleichung (24) die Gleichung einer Schar von Hyperbeln, welche die Genauigkeit der Bestimmung der Schaulinie kennzeichnen und daher als die «Fehlerhyperbeln» der Schaulinie bezeichnet werden könnten.

Der Parameter derjenigen «Fehlerhyperbel», für welche die Wahrscheinlichkeit, von der «wahren Schaulinie» nicht in reellen Punkten geschnitten zu werden, W_1 beträgt, ist durch die Gleichung

$$k^2 = \mu_y^2 \log\text{nat} \frac{1}{(1-W_1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

gegeben.

Nachstehend sind einige Werte des Verhältnisses $\frac{k}{\mu_y}$ für gegebene Wahrscheinlichkeiten W_1 zusammengestellt.

---

[1] A. Basch, „Ueber Hyperbeln beziehungsweise Hyperboloide als Präzisionscharakteristika empirisch bestimmter linearer Funktionen". Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse; Bd. CXXIII., Abt. II a. Oktober 1914.

W_i	$\frac{k}{\mu_y}$	W_i	$\frac{k}{\mu_y}$
0·1	0·4486	0·6	1·3537
0·2	0·6681	0·7	1·5518
0·3	0·8460	0·8	1·7941
0·4	1·0108	0·9	2·1460
0·5	1·1774		

Jene Hyperbel, für die $W_i = \frac{1}{2}$, bei der also die Wahrscheinlichkeit, von der «wahren Schaulinie» reell oder imaginär geschnitten zu werden, gleich groß ist, wäre als «wahrscheinliche Fehlerhyperbel» zu bezeichnen. Für sie ist $k = 1·1774\,\mu_y$.

In Fig. 1 sind die zur Zentralellipse E des Beobachtungsbildes gehörigen, den eingeschriebenen Wahrscheinlichkeiten entsprechenden Fehlerhyperbeln eingezeichnet. Es ist hiebei eine sehr große Beobachtungszahl vorausgesetzt, so daß $\mu_y = \lambda_\eta'$. In diesem, aber nur in diesem Falle wird die Hyperbel, deren Parameter $k = \mu_y$, die Zentralellipse in deren Schnittpunkten mit der η-Achse tangieren. Die Hyperbel, deren Paramater $k = \mu_y$, wird als «mittlere Fehlerhyperbel» zu bezeichnen sein.[1] Die Tangenten dieser Hyperbel werden in ihrer Gesamtheit die größte Wahrscheinlichkeit besitzen, die «wahre Schaulinie» zu sein. Würde man die Ebene durch Hyperbeln der Schar (24) in Ringe teilen, die in der η Achse, und zwar in deren Richtung gemessen die konstante Stärke dk besitzen, so hätte jener Ring, welcher die «mittlere Fehlerhyperbel» umgibt, unter allen Ringen die größte Wahrscheinlichkeit, von der wahren Schaulinie nur in seiner konvexen Umfassung geschnitten, d. h. zweipunktig, aber nicht vierpunktig geschnitten, also geschnitten, aber nicht von ihr durchsetzt zu werden.[2] Wählt man umgekehrt die Hyperbeln derart aus, daß die ihnen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten um gleiche Beträge dW_i zunehmen, so erreicht die Dichte der gezeichneten Hyperbeln bei der «mittleren Fehlerhyperbel» das Maximum. Die «mittlere Fehlerhyperbel» liegt derjenigen Fehlerhyperbel, für die $W_i = 0·4$, sehr nahe, sie ist daher in Abb. 1 nicht eingezeichnet.

In Fig. 2 ist die zur Schaulinie RR gehörige «mittlere Fehlerhyperbel» eingezeichnet. Ihre Gleichung lautet

$$\frac{(\eta - 0·0212\,\xi)^2}{0·001024} - \frac{\xi^2}{218·75} = 1$$

Für jede beliebige Temperatur ist durch die Ordinate der Schaulinie der plausibelste Wert der Längenkorrektur gegeben. Der Unterschied zwischen den Ordinaten der mittleren Fehlerhyperbel und den Ordinaten der Schaulinie ist

[1] Vergl. auch S. Wellisch: „Ueber Fehlerhyperbeln" in der „Oesterr. Zeitschrift für Vermessungswesen", 1915.

[2] Vergl. A. Basch, letztzitierte Stelle.

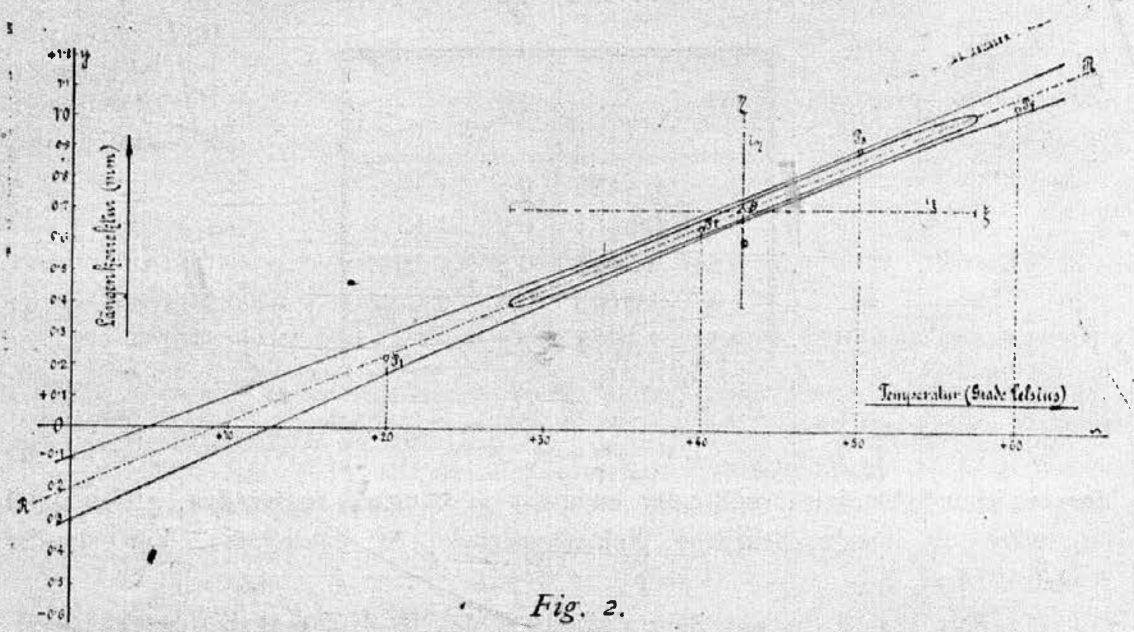

Fig. 2.

der mittlere Fehler der betreffenden Längenkorrektur[1]. So ist z. B. für die Temperatur $x = 15^0$ der plausibelste Wert der Längenkorrektur

$$y_{15} = -0{\cdot}196 + 0{\cdot}0212 \times 15 = +0{\cdot}122.$$

Der mittlere Fehler dieser Korrektur ist durch die Beziehung gegeben

$$\mu_{15}^2 = \mu_y^2 \left(1 + \frac{\xi^2}{i_\xi^2}\right) = \frac{\mu_y^2}{i_\xi^2}\left[i_\xi^2 + (x - s_x)^2\right],$$

das ist in dem behandelten Zahlenbeispiel

$$\mu_{15}^2 = \frac{0{\cdot}001024}{218{\cdot}75}\left[218{\cdot}75 + (15 - 42{\cdot}5)^2\right] = 0{\cdot}004564,$$

daher

$$\mu_{15} = \pm 0{\cdot}068.$$

Für die Temperatur 0^0 ergab sich schon früher als plausibelste Korrektur $A = -0{\cdot}196$ und als deren mittlerer Fehler $\mu_A = \pm 0{\cdot}098$.

Für die Temperatur $s_x = 42{\cdot}5^0$ ist der plausibelste Wert der Längenkorrektur $s_y = +0{\cdot}705$. Für diese Temperatur ist der mittlere Fehler der Längenkorrektur am kleinsten, und zwar $\mu_y = \pm 0{\cdot}032$.

Man könnte zur Kennzeichnung der Genauigkeit der Lagenbestimmung der Schaulinie ebensogut die «wahrscheinliche Fehlerhyperbel» verwenden.

Wien, Anfang Mai 1915.

Ueber die Schärfe der Zahlenrechnung.

Von Baurat Ing. S. Wellisch.

Nichts, was Menschen unternehmen, ist vollkommen. Aber in allem Tun soll der Mensch versuchen, sich der Vollkommenheit zu nähern. Wenn er sie auch nie ganz erreicht, so soll er sich doch mit einer halbwegs befriedigenden

[1] Vergl. auch R. Schumann, „Bestimmung einer Geraden durch Ausgleichung der beobachteten Koordinaten ihrer Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate". Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse Bd. CXXV, Abt. IIa. 1916.