Zurückführung der Aufgabe des Rückwärtseinschneidens auf die Berechnung eines Dreieckes aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel

Artur Morpurgo [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **19** (1–2), S. 4–17

1921

Zurückführung der Aufgabe des Rückwärtseinschneidens auf die Berechnung eines Dreieckes aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Von **Oberinspektor Ing. Artur Morpurgo** in Graz.

Die an und für sich einfache Aufgabe des Rückwärtsschnittes gestattet eine so mannigfache Art der Ueberwindung der scheinbaren Schwierigkeiten der mathematischen Lösung, daß mit einer Erschöpfung dieses Gegenstandes überhaupt nicht zu rechnen ist.

Aus der Beharrlichkeit, mit welcher immer wieder dem Pothenotschen Problem auf den Leib gerückt wird, muß geschlossen werden, daß das bisher allgemein in Anwendung gestandene Rechenverfahren, welches trotz der Fülle

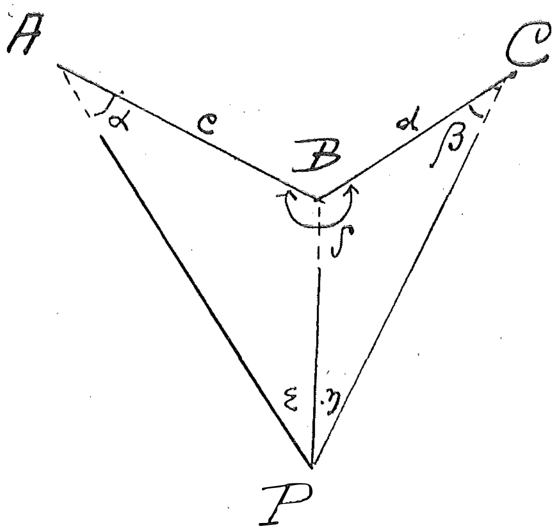


Fig. 1.

der alljährlich in der Fachliteratur erscheinenden Arbeiten von keinem neueren Verfahren mit Erfolg verdrängt werden konnte, keineswegs befriedigend erscheint.

Wenn schon bei nur beschränkter Anwendung der Punktbestimmung aus inneren Richtungen das Bedürfnis nach einer praktischeren Lösung dieses Problems vorgelegen ist, umso größer wird sich in Hinkunft das Verlangen nach einer Vereinfachung der Lösung dieser Aufgabe einstellen müssen. Bei den modernen Aufnahmemethoden wird der Grundsatz immer mehr zur Geltung kommen, nach Durchführung der Triangulierung des Aufnahmegebietes die für die Detailvermessung erforderlichen Standpunkte vorwiegend aus inneren Richtungen festzulegen. Bei richtiger Auswahl der Punkte — in der Praxis wird diesem Umstand leider noch zu wenig Beachtung gewidmet — ist die beim Rückwärtseinschneiden zu erwartende Genauigkeit durchaus hinreichend.

Um die in Rede stehende Aufgabe mit geringem Zeitaufwand und gegen Rechenfehler möglichst geschützt zahlenmäßig in einfacher Weise lösen zu können, geht der Verfasser von dem Grundsatze aus, daß diese Aufgabe sich auf eine einfache Dreiecksauflösung zurückführen läßt.

Es sind die drei Punkte A, B, C (Fig. 1) durch die Entfernungen c und d und durch den Brechungswinkel δ gegeben. Die Lage des Standpunktes P soll auf Grund der von diesem Punkte nach den gegebenen Punkten gemessenen Horizontalwinkel ε und η bestimmt werden.

Bei der Berechnung des Dreieckes aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bestehen die Beziehungen (Fig. 2):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \alpha+\beta=180^0-\gamma,$$

beim Rückwärtseinschneiden hingegen:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{d\sin\varepsilon}{c\sin\eta} \quad \text{und} \quad \alpha+\beta=360^0-(\delta+\varepsilon+\eta).$$

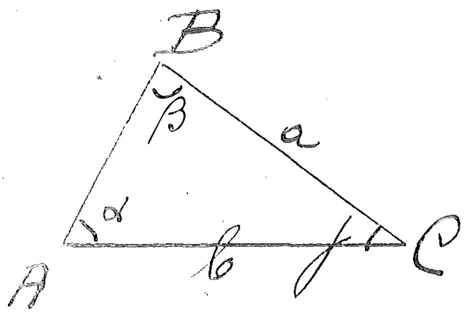


Fig. 2.

Ein Vergleich der Beziehungen bei beiden Aufgaben läßt auf eine nahe Verwandtschaft derselben schließen.

Aus den vorerwähnten Beziehungen geht hervor, daß in einem Dreieck, bei welchem zwischen den Seiten a und b das Verhältnis $\frac{a}{b}=\frac{d\sin\varepsilon}{c\sin\eta}$ besteht und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel $\gamma=\delta+\varepsilon+\eta-180^0$ ist, die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel bezw. deren Supplemente die gesuchten Winkel α und β sein müssen.

Zur Ermittlung der Winkel α und β (Fig. 3), denn darauf läuft letzten Endes die gestellte Aufgabe hinaus, können nach dem Vorhergesagten mehrere Dreiecke in Betracht kommen, welche naturgemäß untereinander ähnlich sein werden.

In Fig. 3 sind ABR und CBQ zwei solche Hilfsdreiecke, welche zur Bestimmung der gesuchten Winkel am besten herangezogen werden können. Im Dreiecke ABR besteht zwischen den Seiten BR und AB das Verhältnis $\frac{d\sin\varepsilon}{\sin\eta}:c$, wodurch die eine Bedingung erfüllt wird, und weiters ist, da der Winkel $RBC=180^0-(\varepsilon+\eta)$ ist, $\gamma=\delta+\varepsilon+\eta-180^0$; daher muß im

Dreieck ABR der Winkel bei A der gesuchte Winkel α und jener bei R der Winkel β sein, vorausgesetzt daß $\delta + \varepsilon + \eta$ größer als 180^0 ist.

Die besonderen Fälle werden später einer Betrachtung unterzogen werden.

Die Richtigkeit der vorerwähnten Behauptung läßt sich aus der Konstruktion in Figur 3 ersehen. Da sowohl der Winkel ARB als auch der Winkel BCP den Winkel BRP auf 180^0 ergänzen, müssen die ersteren untereinander

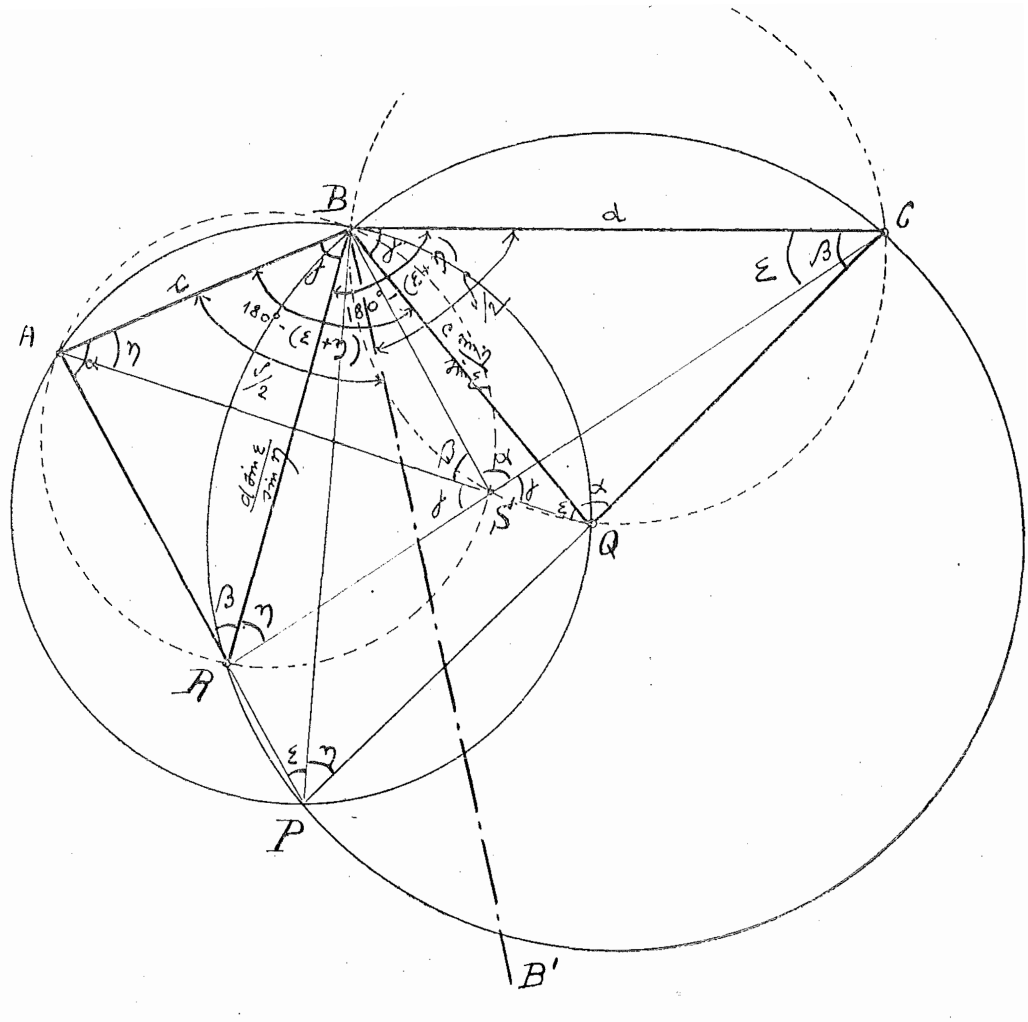


Fig. 3.

gleich sein, d. h. der Winkel ARB ist dem Winkel β gleich. Analoge Beziehungen ergeben sich auch hinsichtlich des Dreieckes BCQ.

Diese Betrachtungen führen zu einer einfachen Konstruktion des Punktes P auf Grund der gemessenen Winkel ε und η.

Mit der Seite BC und den anliegenden Winkeln ε bei C und $180^0 - (\varepsilon + \eta)$ bei B wird das Dreieck BCR konstruiert, wodurch sich im Punkte R der

Winkel η ergibt. Mit der Seite BA und den Winkeln η bezw. $180^0 - (\varepsilon + \eta)$ bei A bezw. bei B erhält man den Punkt Q mit dem Winkel ε. Der Schnittpunkt der Geraden AR und CQ ist der gesuchte Punkt P.

Der Winkel $RSA = 180^0 - (\alpha + \beta) = \delta + \varepsilon + \eta - 180^0 = \gamma$. Die Punkte A, B, S und R sowie die Punkte B, C, Q und S liegen auf je einem Kreise, der Winkel ASB ist dem Winkel β, der Winkel BSC dem Winkel α gleich. Ferner ist der Winkel ABP als Peripheriewinkel dem Winkel AQP gleich, d. i. $180^0 - \alpha - \varepsilon$, und der Winkel SBC ebenfalls $180^0 - \alpha - \varepsilon$, der Winkel ABR wurde dem Winkel $CBQ = \gamma = \delta + \varepsilon + \eta - 180^0$ gleich gemacht, d. h. die von B ausgehenden Richtungen BA und BC, BR und BQ, BS und BP weisen der den Winkel δ Halbierenden BB' gegenüber gegenseitig eine symmetrische Anordnung auf.

Diesen Umstand machen wir uns zunutze, wenn unter sonst günstigen Verhältnissen die Richtungen AR und CQ, wie in Beispiel 1, einen schlechten Schnitt ergeben sollten, indem wir durch die Richtung BP eine günstige Bestimmung des Punktes P erhalten.

Je näher der Punkt P dem durch die Punkte A, B, C gehenden sogen. gefährlichen Kreis rückt, desto kleiner werden die Abstände AR und QC, mithin auch die Genauigkeit der Bestimmung des Punktes P. Ist der Punkt P auf diesem Kreis gelegen, so fällt der Punkt R mit A, Q mit C zusammen, da der Winkel γ Null wird, und die Aufgabe wird nicht lösbar. Die Genauigkeit der Punktbestimmung ist also vor allem von der Größe des Winkels γ abhängig.

Der Schnittpunkt S wird in die Linie PB fallen, wenn $\alpha = 180^0 - \frac{\delta}{2} - \varepsilon$ und $\beta = 180^0 - \frac{\delta}{2} - \eta$ wird, d. h. wenn der Punkt P selbst auf der Symmetralen BB' liegt. Die Punkte P und S fallen zusammen, wenn $\alpha = \eta$ und $\beta = \varepsilon$ wird, was dann der Fall ist, wenn der Punkt P auf der Linie BB' liegt, und zwar mit dem Abstande von B, welcher der mittleren geometrischen Proportionalen zwischen den gegebenen Seiten c und d entspricht.

Ist die Summe $\delta + \varepsilon + \eta$ kleiner als 180^0, so wird γ negativ, und wir erhalten bei der Lösung des Hilfsdreieckes nicht die gesuchten Winkel α und β, sondern deren Ergänzung auf 180^0, welcher Umstand bei der Berechnung besonders zu beachten ist.

Auch dieser Fall erscheint in Figur 3 veranschaulicht, wenn die Punkte R, B und Q als gegeben betrachtet werden. Statt der früheren Hilfspunkte R und Q erhalten wir nun die Punkte A und C. Der der gegebenen Seite BR gegenüberliegende Winkel in A ist nun $180^0 - \beta$ und jener in R $180 - \alpha$.

Sind die Winkel α und β durch Auflösung des Hilfsdreieckes ermittelt, so ist die gegebene Aufgabe im Wesentlichen gelöst, da die Ableitung der übrigen Winkel und Abstände bezw. der Koordinaten des Punktes P in bekannter Weise erfolgen kann.

Zur Berechnung des Dreieckes aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel kann die Anwendung des Kosinussatzes schon aus dem Grunde nicht in Betracht kommen, weil derselbe keine durchgehende logarithmische Rechnung gestattet, während der Tangentensatz zu Fehlern leicht Anlaß geben kann. Es erscheint daher verlockend, das für Dreieckslösungen im allgemeinen einfachste rechnerische Verfahren, die Anwendung des Sinussatzes, auch für diesen Fall dienstbar zu machen.

Nachstehend soll gezeigt werden, daß durch Einführung von Näherungswerten für die gesuchten Winkel und mit Benützung der logarithmischen Differenzen der Sinussatz auch als bequemste Lösung für die vorstehende Aufgabe in Betracht kommen kann.

In Figur 2 seien die beiden Seiten a und b sowie der von ihnen eingeschlossene Winkel γ gegeben; es sollen hier nur die beiden Winkel α und β rechnerisch bestimmt werden, da die Ermittlung der dritten Seite sodann keinen Schwierigkeiten begegnen kann.

Zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken bestehen folgende Beziehungen:

1. aus der Dreieckssumme $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ ergibt sich:

$$\alpha + \beta = 180^0 - \gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

2. nach dem Sinussatz: $\dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \dfrac{a}{b}$ oder $\log \dfrac{a}{b} = D$ gesetzt,

$$\log \sin \alpha - \log \sin \beta = D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Zur Lösung der Gleichungen (1) und (2) wählen wir eine indirekte Methode.

Wird statt α ein Näherungswert α' angenommen, so erhält man aus Gleichung (1):

$$\beta' = 180 - (\gamma + \alpha') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Da die Gleichung (2) nur durch die wahren Werte für α und β restlos erfüllt wird, muß die Einführung der Näherungswerte α' und β' naturgemäß einen Widerspruch ergeben, welcher von der Größe der Winkel α und β und von dem Genauigkeitsgrad der angenommenen Werte α' und β' abhängig sein wird.

Von der Gleichung (2) ausgehend, erhalten wir mithin:

$$\log \sin \alpha' - \log \sin \beta' = D - d' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Um die gesuchten Werte α und β zu erhalten, müssen wir den Näherungswert α' um x und β' um $-x$ Sekunden verbessern.

Von den gesuchten Winkeln ist der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel kleiner als 90^0, welcher stets mit α' bezeichnet werden soll, weshalb sinngemäß auch $\dfrac{a}{b}$ immer kleiner als 1, bezw. D immer negativ sein muß.

Dies vorausgesetzt und weiters angenommen, daß x sehr klein ist, erhalten wir nach Anbringung der Verbesserungen aus (2):

$$(\log \sin \alpha' + x\, d\alpha') - (\log \sin \beta' - x\, d\beta') = D \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

wobei $d\alpha'$ und $\delta\beta'$ die logarithmischen Differenzen für 1 Sekunde bedeuten.

Nach Ordnung der Glieder erhält man aus (5):

$$\log \sin \alpha' - \log \sin \beta' = D - x\,(\delta\alpha' + \delta\beta')$$

oder mit Beziehung auf (4):

$$x = \frac{d'}{d\alpha' + \delta\beta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Aus (4) geht hervor:

$$d' = D - (\log \sin \alpha' - \log \sin \beta') \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Da x stets das Vorzeichen von d' hat, muß α' größer und β' kleiner werden, wenn d' positiv ist. Da α' stets kleiner als 90^0 ist, ist $d\alpha'$ immer positiv zu nehmen, während $\delta\beta'$ positiv bezw. negativ wird, wenn β' kleiner bezw. größer als 90^0 ist.

Nach Ermittlung der Verbesserung x erhält man:

$$\alpha = \alpha' + x, \text{ und } \beta = \beta' - x \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Das Ergebnis ist als einwandfrei zu betrachten, wenn die Probe (2):

$$\log \sin \alpha - \log \sin \beta = D$$

stimmt.

Wenn x verhältnismäßig groß ist, genügt eine einmalige Rechnung nicht, da die logarithmischen Differenzen $d\alpha'$ und $\delta\beta'$ wohl den Näherungswerten, nicht aber den gesuchten Winkeln α und β entsprechen. Um die Verbesserung x mit hinreichender Genauigkeit bestimmen zu können, müßte statt $d\alpha'$ das arithmetische Mittel zwischen $d\alpha$ und $d\alpha'$ berücksichtigt werden.

Eingehende Versuche haben ergeben, daß es zweckmäßiger erscheint, von jeder nachträglichen Abänderung der logarithmischen Differenzen abzusehen, vielmehr, falls die nach (2) vorzunehmende Probe nicht stimmen sollte, die für α und β erhaltenen Werte neuerlich als Näherungswerte zu behandeln und das Verfahren so lange fortzusetzen, bis die Probe keinen Widerspruch ergibt.

Um zumeist schon in erster, in ungünstigen Fällen aber in zweiter Näherung die tatsächlichen Werte für α und β zu erhalten, hat der Verfasser Tafeln zur Ermittlung der Näherungswerte zusammengestellt.

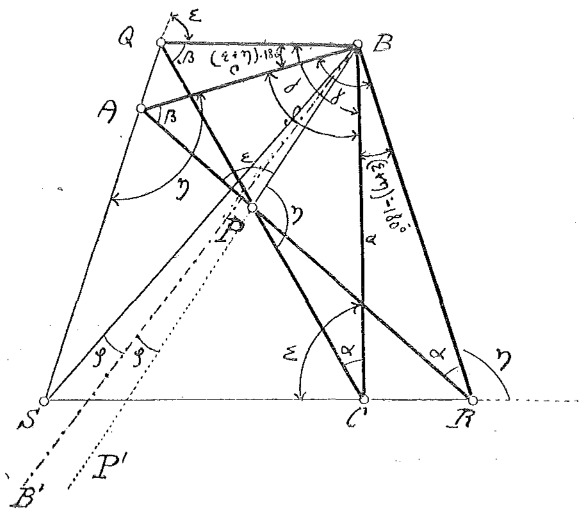
Es sei hier ausdrücklich hervorgehoben, daß es beim Gebrauche dieser Tafeln vollständig genügt, die Einschaltung für die Zwischenwerte von γ und D nur schätzungsweise vorzunehmen, da erfahrungsgemäß die schlimmstenfalls unvermeidliche zweite Näherung rascher zum Ziele führt, als eine genaue Ableitung des den Argumenten γ und D entsprechenden Näherungswertes.

Zur Vereinfachung der Tafeln wurden die Winkelwerte nur von Grad zu Grad berücksichtigt und von der Anwendung mehr als dreistelliger Logarithmen abgesehen, da die Genauigkeit des Endergebnisses, welche dem jeweiligen Zweck entsprechend beliebig weit getrieben werden kann, hiedurch nicht berührt wird.

Weiters wird aus Zweckmäßigkeitsgründen in den Tafeln unter α' stets der kleinere von den gesuchten zwei Dreieckswinkeln verstanden, weil dadurch α' immer nur eindeutig bestimmt ist und hiefür nur die Werte bis 90^0 in Betracht kommen können.

Die folgenden Beispiele dürften genügen, um über die Anwendung der Tafeln hinreichenden Aufschluß zu geben.

Zu Beispiel 1.



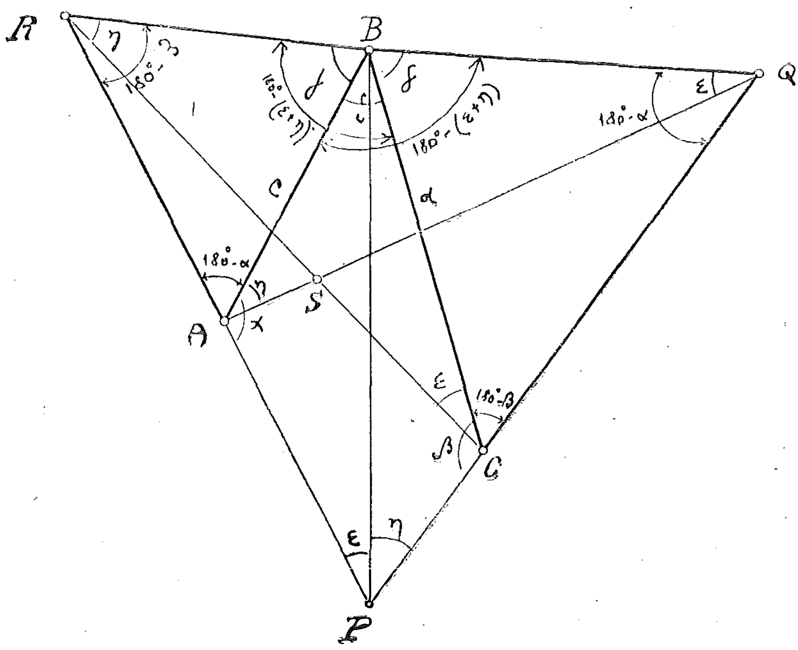
Beispiel 1.

$c =$	2540 m	$d =$	4060 m	$\delta =$	75°	21'	47"				
$\log \sin \eta$	9·963 6011	$\log d$	3·608 5260	$\varepsilon =$	83	46	23				
$+ \log c$	3·404 8337	$+ \log \sin \varepsilon$	9·997 4301	$\eta =$	113	07	54				
$\log (c \sin \eta)$	3·368 4348	$\log (d \sin \varepsilon)$	3·605 9561	$\delta + \varepsilon + \eta =$	272	16	04				
$(c \sin \eta < d \sin \varepsilon)$		$(d \sin \varepsilon < c \sin \gamma)$		—	180						
$- \log (d \sin \varepsilon)$	3·605 9561	$- \log (c \sin \eta)$	—	$\gamma =$	92	16	04				
$D =$	9·762 4787	$D =$	—	$180 - \gamma =$	87	43	56				
$\gamma +$	α in C ✓	$\gamma +$	α in A —	$\alpha + \beta =$							
$\gamma -$	$(180 - \alpha)$ in C —	$\gamma -$	$(180 - \alpha)$ in A —	$\alpha' =$	29	27		$\beta' =$	58	16	56
				$180 - \alpha' =$	—	—	—	$180 - \beta' =$	—	—	—
				$x =$	+	1	51	$-x =$	—	1	51
				$\alpha =$	29	28	51	$\beta =$	58	15	05
				$180 - \alpha =$	—	—	—	$180 - \beta =$	—	—	—

Aus den Tafeln				$D = 9.762$	
γ		α'		α'	
		29°	30°		
°	'	D		°	'
92		753	771	29	30
93		757	775	29	20
92	16			29	27

1. Näherung		log Diff.	2. Näherung bezw. Probe		log Diff.	Probe		log Diff.
$\log \sin \alpha'$	9.691 6683	37.3	$\log \sin \alpha$	9.692 0819	37.3			
$- \log \sin \beta'$	9.929 7499	+ 13.0	$- \log \sin \beta$	9.929 6054	+ 13.1			
$D - d' =$	9.761 9184	50.3	$D - d'' =$	9.762 4765	50.4			
$D =$	9.762 4787		$D =$	9.762 4787				
$d' =$	+ 5603		$d'' =$	+ 22				
$x =$	+ 5603 : 50·3 = + 111"		$x_1 =$	+ 22 : 50·4 = + 0·4"				

Zu Beispiel 2.



Beispiel 2.

$c =$	3532 m
$\log \sin \eta$	9.784 6309
$+ \log c$	3.683 6773
$\log (c \sin \eta)$	3.468 3082
$(c \sin \eta < d \sin \varepsilon)$	
$- \log d \sin \varepsilon$	—
$D =$	—
$\gamma +$	α in C —
$\gamma -$	$(180 - \alpha)$ in C —

$d =$	4827 m
$\log d$	3.548 0207.
$+ \log \sin \varepsilon$	9.682 5300
$\log (d \sin \varepsilon)$	3.230 5507
$(d \sin \varepsilon < c \sin \eta)$	
$- \log c \sin \eta$	3.468 3082
$D =$	9.762 2425
$\gamma +$	α in A —
$\gamma -$	$(180 - \alpha)$ in A ∠

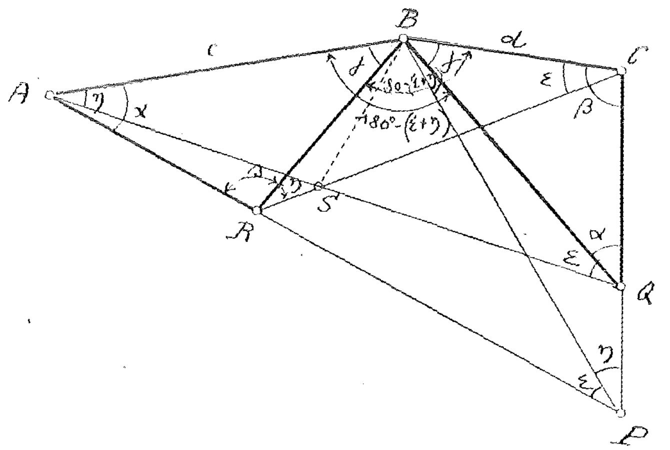
$\delta =$	43°	18′	12″
$\varepsilon =$	28	46	43
$\eta =$	37	31	07
$\delta + \varepsilon + \eta =$	109	36	02
—	180		
$\gamma =$	−70	23	58
$360 - (\alpha + \beta) =$	109	36	02
$\alpha' =$	—	—	—
$180 - \alpha' =$	34	00	
$x =$	+	3	44
$\alpha =$	145	56	16
$180 - \alpha =$	34	03	44

$\beta' =$	—	—	—
$180 - \beta' =$	75	36	02
$- x =$	—	3	44
$\beta =$	104	27	42
$180 - \beta =$	75	32	18

Aus den Tafeln				$D = 9.762$	
γ		α'		α'	
		34°	35°		
°	′	D		°	′
70		9.761	9.774	34	00
71		9.763	9.776	34	00
70	24			34	00

1. Näherung		log Diff.	2. Näherung bezw. Probe		log Diff.	Probe		log Diff.
$\log \sin \alpha'$	9.747 5617	31.2	$\log \sin \alpha$	9.748 2600	31.1			
$- \log \sin \beta'$	9.986 1380	+ 5.4	$- \log \sin \beta$	9.986 0166	+ 5.4			
$D - d' =$	9.761 4237	36.6	$D - d'' =$	9.762 2434	36.5			
$D =$	9.762 2425		$D =$	9.762 2425				
$d' =$	+ 8188		$d'' =$	— 9				
$x =$	$+8188 : 36.6 = +224''$		$x_1 =$	$-9 : 36.5 = -0{\cdot}2''$				

Zu Beispiel 3.



Beispiel 3.

$c =$	$2000\ m$	$d =$	$1200\ m$
$\log \sin \eta$	9.675 5931	$\log d$	3.079 1812
$+ \log c$	3.301 0300	$+ \log \sin \varepsilon$	9.708 4292
$\log (c \sin \eta)$	2.976 6231	$\log (d \sin \varepsilon)$	2.787 6104
$(c \sin \eta < d \sin \varepsilon)$		$(d \sin \varepsilon < c \sin \eta)$	
$- \log d \sin \varepsilon$	—	$- \log (c \sin \eta)$	2.976 6231
$D =$	—	$D =$	9.810 9873
$\gamma +$	α in C —	$\gamma +$	α in A
$\gamma -$	$(180 - \alpha)$ in C —	$\gamma -$	$(180 - \alpha)$ in A —

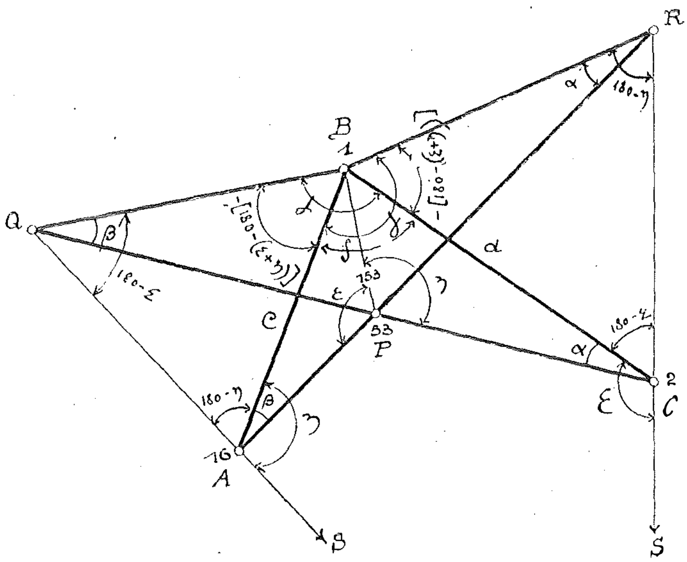
	°	′	″
$\delta =$	162	21	19
$\varepsilon =$	30	43	45
$\eta =$	28	16	52
$\delta + \varepsilon + \eta =$	221	21	56
—	180		
$\gamma =$	41	21	56
$\alpha + \beta =$	138	38	04
$\alpha' =$	39	46	—
$180 - \alpha' =$	—	—	—
$x =$	—	1	25
$\alpha =$	39	44	35
$180 - \alpha =$	—	—	—

	°	′	″
$\beta' =$	98	52	04
$180 - \beta' =$	—	—	—
$- x =$	+	1	25
$\beta =$	98	53	29
$180 - \beta =$	—	—	—

Aus den Tafeln				$D = 9.811$	
γ		α'		α'	
		39°	40°		
°	′	D		°	′
41		9.806	9.813	39	43
42		9.804	9.812	39	52
41	22			39	46

1. Näherung		log Diff.	2. Näherung bezw. Probe		log Diff.	Probe		log Diff.
$\log \sin \alpha'$	9.805 9510	25.3	$\log \sin \alpha$	9.805 7358	25.3			
$- \log \sin \beta'$	9.994 7775	$-$ 3.3	$- \log \sin \beta$	9.994 7495	$-$ 3.3			
$D - d' =$	9.811 1735	22.0	$D - d'' =$	9.810 9863	22.0			
$D =$	9.810 9873		$D =$	9.810 9873				
$d' =$	$-$ 1862		$d'' =$	$+$ 10				
$x =$	$-1862 : 22{\cdot}0 = -85''$		$x_1 =$	$+10 : 22{\cdot}0 = +0{\cdot}5''$				

Zu Beispiel 4.



Beispiel 4

aus der österr. Instruktion für Polygonalvermessungen vom Jahre 1904, Seite 110.

	Y	X
1	— 18755·73	— 112370·96
2	— 20272·86	— 111178·68
16	— 18152·68	— 111044·47

$\log \sin \eta$	9.960 3523	$\log d$	3.285 4591
$+ \log c$	3.163 5004	$+ \log \sin \varepsilon$	9.912 8432
$\log (c \sin \eta)$	3.123 8527	$\log (d \sin \varepsilon)$	3.198 3023
$(c \sin \eta < d \sin \varepsilon)$		$(d \sin \varepsilon < c \sin \eta)$	
$- \log (d \sin \varepsilon)$	3.198 3023	$- \log (c \sin \eta)$	—
$D =$	9.925 5504	$D =$	—
$\gamma +$	α in C	$\gamma +$	α in A —
$\gamma -$	$(180 - \alpha)$ in C —	$\gamma -$	$(180 - \alpha)$ in A —

	°	′	″
$\delta =$	76	17	04
$\varepsilon =$	125	05	53
$\eta =$	114	06	42
$\delta + \varepsilon + \eta =$	315	29	39
—	180		
$\gamma =$	135	29	39
$\alpha + \beta =$	44	30	21
$\alpha' =$	20	15	
$180 - \alpha' =$	—	—	—
$x =$	—		3
$\alpha =$	20	14	57
$180 - \alpha =$	—	—	—

	°	′	″
$\beta' =$	24	15	21
$180 - \beta =$	—	—	—
$- x =$		+	3
$\beta =$	24	15	24
$180 - \beta =$	—	—	—

Aus den Tafeln				$D = 9.926$	
γ		α'		α'	
		20°	21°		
°	′	D		°	′
135		9.908	9.945	20	30
136		9.925	9.962	20	00
135	30			20	15

1. Näherung		log Diff.	2. Näherung bezw. Probe		log Diff.	Probe		log Diff.
$\log \sin \alpha'$	9.539 2230	57·1	$\log \sin \alpha$	9.539 2059	57·1			
$- \log \sin \beta'$	9.613 6428	+ 46·7	$- \log \sin \beta$	9.613 6568	+ 46·7			
$D - d' =$	9.925 5802	103·8	$D - d'' =$	9.925 5491	103·8			
$D =$	9.925 5504		$D =$	9.925 5504				
$d' =$	— 298		$d'' =$	+ 13				
$x =$	$- 298 : 103·8 = - 3''$		$x_1 =$	$+ 13 : 103·8 = + 0·1''$				