Paper-ID: VGI_192009

Einfluß der bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen in Verwendung gezogenen Näherungswerte auf die ausgeglichenen Größen

Franz Aubell [1]

[1] *o. ö. Professor der Mont. Hochschule in Leoben*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **18** (4), S. 80–85

1920

BibTEX:

```
@ARTICLE{Aubell_VGI_192009,
Title = {Einflu{\ss} der bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen in
   Verwendung gezogenen N{\"a}herungswerte auf die ausgeglichenen Gr{\"o}{\ss}
   en},
Author = {Aubell, Franz},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {80--85},
Number = {4},
Year = {1920},
Volume = {18}
}
```

Länge der Dreiecksseiten in *m*.

Vor	Nach	Unterschied
der Ausgleichung		
$s_1 = 2000{\cdot}00$	1999·77	$-0{\cdot}23$
$s_2 = 2430{\cdot}57$	2430·63	$+0{\cdot}06$
$s_3 = 2252{\cdot}08$	2252·22	$+0{\cdot}14$

Südwinkel.

Vor	Nach	Unterschied
der Ausgleichung		
$\sigma_1 = 170^0\,15'\,39{\cdot}7''$	$170^0\,15'\,44{\cdot}2''$	$+\ 4{\cdot}5''$
$\sigma_2 = 290\ 05\ 20{\cdot}2$	290 05 04·7	$-15{\cdot}5$
$\sigma_3 = 239\ 41\ 50{\cdot}0$	239 42 04·6	$+14{\cdot}6$

Dreieckswinkel.

Gemessen	Aus endgültigen Südwinkeln abgeleitet	Unterschied
$\alpha_1 = 50^0\,23'\,00{\cdot}2''$	$50^0\,23'\,00{\cdot}1''$	$-0{\cdot}01''$
$\beta_1 = 69\ 26\ 20{\cdot}3$	69 26 20·4	$+0{\cdot}01$
$\gamma_1 = 60\ 10\ 39{\cdot}5$	60 10 39·5	0·00

Einfluß der bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen in Verwendung gezogenen Näherungswerte auf die ausgeglichenen Größen.

Von **Dr. F. Aubell,** o. ö. Professor der Mont. Hochschule in Leoben.

Bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen gibt es zwei Wege, die zu den ausgeglichenen Werten der Unbekannten führen: einen unmittelbaren, bei welchem man die Unbekannten in ihrer vollen Größe aus linearen Endgleichungen (den Normalgleichungen) rechnet, und einen mittelbaren, der insbesondere bei nicht linearer Form der zwischen den Beobachtungen und den Unbekannten bestehenden Funktionsgleichung einzuschlagen ist, bei welchem man die Unbekannten aus anderweitig gewonnenen Näherungswerten durch an diesen anzubringende, in der Regel kleine Zuschläge erhält, die sich wieder aus Endgleichungen der erwähnten Art rechnen lassen. In letzterem Falle ist die Frage naheliegend, inwieweit der ausgeglichene Wert durch die Annahme des Näherungswertes beeinflußt werde. Diese Frage findet ihre sofortige Beantwortung durch die bloße Ueberlegung, daß der ausgeglichene Wert ein eindeutiger sein, daß er somit vom Wege unabhängig sein müsse, der zu seiner Erreichung eingeschlagen wird, sofern nur bei diesem das Fundamentalgesetz der Ausgleichungsrechnung $[gvv] =$ Min. erfüllt wurde.

Es ist auch von Wichtigkeit, festzustellen, inwieweit der in der Regel aufgestellten Forderung «möglichst genauer» Näherungswerte Rechnung zu tragen ist. So lange die Fehler- (nach Hammer richtiger Verbesserungs-)gleichungen ihre strenge lineare Form behalten, ist die Wahl des Näherungswertes für die Unbekannten nicht an bestimmte Grenzen gebunden. Dies ist der Fall bei linearer Form der Funktionsgleichung. Bei nicht linearer Form derselben müssen die Näherungswerte nur so nahe an den wahrscheinlichsten Wert der Unbekannten herankommen, daß die Zuschläge zu den Näherungswerten, die man durchaus nicht als Differentiale aufzufassen braucht, noch nicht so groß geworden sind, daß in der Taylor'schen Reihe, durch welche die lineare Form der Fehlergleichung zustandekommt, die Berücksichtigung höherer als der ersten Ableitungen notwendig wird.

Es soll nun im Folgenden unter der Voraussetzung einer strenge linearen Fehlergleichung dafür der mathematische Beweis erbracht werden, daß der ausgeglichene Wert der Unbekannten vom angenommenen Näherungswerte unabhängig sei, d. h. daß jede Aenderung des Näherungswertes durch eine entsprechende Aenderung der Zuschläge ausgeglichen werde.

Der Beweis, der sich leicht für beliebig viel Unbekannte verallgemeinern läßt, soll für zwei Unbekannte durchgeführt werden.

Aus der für vermittelnde Beobachtungen geltenden Fehlergleichung

$$v = ax + by + l,$$

in welcher bei Einführung von Näherungswerten x_0 und y_0 die Unbekannten sich in der Form $x = x_0 + \delta x$, $y = y_0 + \delta y$ darstellen lassen, ergibt sich die Fehlergleichung

$$v = a\,\delta x + b\,\delta y + (ax_0 + by_0 + l) \text{ und mit } ax_0 + by_0 + l = L$$

$$v = a\,\delta x + b\,\delta y + L.$$

Nun würden die Näherungswerte einer Veränderung unterzogen, und zwar ändere sich x_0 um $\triangle x_0$, y_0 um $\triangle y_0$. Es lautet dann die Fehlergleichung:

$$\begin{aligned} v' &= a\,\delta x' + b\,\delta y' + a(x_0 + \triangle x_0) + b(y_0 + \triangle y_0) + l \\ &= a\,\delta x' + b\,\delta y' + L', \text{ wobei } L' = L + a\triangle x_0 + b\triangle y_0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Die Zuschläge zu den Näherungswerten ergeben sich in Gaußischer Schreibweise aus den Symbolen:

$$\delta x = -\frac{[aL\cdot 1]}{[aa\cdot 1]} \qquad \delta x' = -\frac{[aL'\cdot 1]}{[aa\cdot 1]},$$

ebenso gelten für δy und $\delta y'$ ähnliche Beziehungen.

Die durch die Aenderung der Näherungswerte um $\triangle x_0$ bezw. $\triangle y_0$ hervorgerufene Aenderung der Zuschläge ist für die Größe x:

$$\delta x' - \delta x = \frac{-[aL'\cdot 1] + [aL\cdot 1]}{[aa\cdot 1]}.$$

Ersetzt man die Symbole durch ihre mathematischen Ausdrücke:

$$[aL'\cdot 1] = [aL'] - \frac{[ab][bL']}{[bb]}, \qquad [aL\cdot 1] = [aL] - \frac{[ab][bL]}{[bb]}$$

$$[aa\cdot 1] = [aa] - \frac{[ab][ab]}{[bb]},$$

so wird

$$\delta x' - \delta x = \frac{-[aL'][bb] + [ab][bL'] + [aL][bb] - [ab][bL]}{[aa][bb] - [ab][ab]}.$$

Im Zähler

$$[bb](-[aL'] + [aL]) + [ab]([bL'] - [bL])$$

läßt sich

$$-[aL'] + [aL] = [a(L - L')] = [-a(a\triangle x_0 + b\triangle y_0)] = -[aa]\triangle x_0 - [ab]\triangle y_0$$

und

$$[bL'] - [bL] = [(L' - L)] = [b(a\triangle x_0 + b\triangle y_0)] = [ab]\triangle x_0 + [bb]\triangle y_0$$

setzen. Dadurch erhält man:

$$\delta x' - \delta x = \frac{\triangle x_0(-[aa][bb] + [ab][ab]) + \triangle y_0(-[ab][bb] + [ab][bb])}{[aa][bb] - [ab][ab]}$$

$$= -\triangle x_0 \quad \text{oder} \quad \delta x' = \delta x - \triangle x_0; \quad \text{ebenso ist}$$

$$\delta y' - \delta y = -\triangle y_0 \quad \text{oder} \quad \delta y' = \delta y - \triangle y_0$$

d. h. einer Aenderung der Näherungswerte entspricht eine gleich große aber entgegengesetzte Aenderung der Zuschläge, so daß das Endergebnis der Ausgleichung, nämlich die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten unverändert bleiben.

Ebenso ergibt sich die Unabhängigkeit der an der Beobachtung anzubringenden Verbesserung vom Näherungswerte:

$$v' = a\delta x' + b\delta y' + L' = a(\delta x - \triangle x_0) + b(\delta y - \triangle y_0) + L + a\triangle x_0 + b\triangle y_0 = v$$

Als Beispiel soll der Fall einer transzendenten Form der Funktionsgleichung, wie sie bei dem Einschneidverfahren erscheint, behandelt werden, und zwar das Vorwärtseinschneiden eines Neupunktes aus 5 Punkten, entnommen einer im Jahre 1914 mit den Hörern der Mont. Hochschule in Windischgarsten durchgeführten Uebungsvermessung (s. Fig.).

Beim Vorwärtseinschneiden hat bekanntlich die Funktionsgleichung die Form

$$F(x,y) = \sigma = \operatorname{arctg}\frac{y_n - y}{x_n - x} = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y = R_0 \pm 180 + v,$$

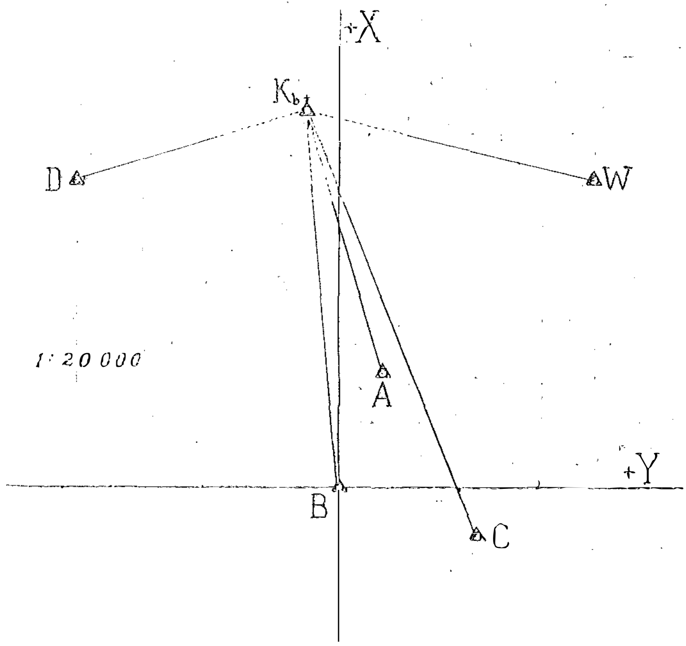
worin σ den vom zu bestimmenden Punkte ausgezählten endgültigen Richtungswinkel, x_n und y_n mit den Zeigern 1 bis n die Koordinaten der gegebenen Punkte, x_0 und y_0 die Näherungskoordinaten, δx und δy die an diesen anzubringenden Koordinatenzuschläge des einzuschaltenden Punktes, R_0 die in den gegebenen Punkten beobachtete äußere Richtung vorstellen. Die Fehlergleichungen, in welchen die Vorzahlen (Richtungskoeffizienten)

$$a = \frac{\partial F}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = \varrho''\frac{\sin\sigma'}{s'}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial y}\Bigg|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = -\varrho''\frac{\cos\sigma'}{s'}$$

mit dem aus den Näherungskoordinaten gerechneten Werten des Richtungswinkels σ' und der Seite s' vorkommen, lauten:

$$v = a\,\delta x + b\,\delta y + (\sigma' - R_0 \mp 180) = \delta\sigma + L.$$

Die Näherungskoordinaten des einzuschaltenden Punktes Kalvarienberg (K_b) wurden absichtlich aus den zwei zu diesem ungünstig gelegenen Dreieckspunkten A und B gerechnet. Dann wurden die Näherungskoordinaten um 0·1, 0·5, 1·0 m und schließlich um 5·0 m geändert und jedesmal die Koordinatenverbesserungen nochmals gerechnet. Das Ergebnis ist in Folgendem zusammengestellt.



Angaben:

Punkt	y	x	R_0
A	+ 111·298	+ 305·788	344° 22′ 29·6″
B	0·000	0·000	355 13 3·0
C	+ 364·161	— 132·938	338 29 15·6
D	— 703·461	+ 816·081	73 6 45·4
W	+ 676·231	+ 818·826	283 41 46·9

I.

$$x_0 = + 1004{\cdot}12 \qquad y_0 = - 84{\cdot}01$$
$$\delta x = + \quad 0\,003{,}5 \quad \delta y = - \quad 0{\cdot}007{,}3$$
$$x = + 1004{\cdot}123{,}5 \quad y = - 84{\cdot}017{,}3$$
$$m = \pm 4{\cdot}0''$$
$$m_x = \pm 0{\cdot}009{,}8\,m \qquad m_y = \pm 0{\cdot}010{,}3\,m$$

Punkt	a	b	L	$v = a\delta x' + b\delta y' + L$	$v = \sigma - R_0 \mp 180$
A	+ 76·6	+ 273·9	0·0″	— 1·8″	— 1·8″
B	+ 17·1	+ 204·0	— 0·1	— 1·6	— 1·5
C	+ 61·9	+ 157·0	+ 1·6	+ 0·7	+ 0·8
D	— 304·9	+ 92·6	+ 5·7	+ 3·9	+ 3·9
W	+ 256·1	+ 62·4	+ 4·7	+ 5·1	+ 5·2

II. $\triangle x_0 = \triangle y_0 = + 0{\cdot}1\ m.$

$$x_0 = +\ 1004{\cdot}22 \qquad y_0 = -\ 83{\cdot}91$$
$$\delta x' = -\ 0{\cdot}096{,}4 \qquad \delta y' = -\ 0{\cdot}107{,}3$$
$$x = +\ 1004{\cdot}123{,}6 \qquad y = -\ 84{\cdot}017{,}3$$
$$\delta x' - \delta x = -\ 0{\cdot}099{,}9 \qquad \delta y' - \delta y = -\ 0{\cdot}100{,}0$$

Punkt	a	b	L	$v = a\delta x' + b\delta y' + L$	$v = \sigma - R_0 \mp 180$
A	+ 76·6	+ 273·9	+ 35·0″	— 1·8″	— 1·8″
B	+ 17·0	+ 204·0	+ 22·0	— 1·5	— 1·5
C	+ 61·9	+ 157·0	+ 23·6	+ 0·8	+ 0·8
D	— 304·8	+ 92·6	— 15·5	+ 3·9	+ 3 9
W	+ 256·1	+ 62·5	+ 36·5	+ 5·1	+ 5·2

III. $\triangle x_0 = \triangle y_0 = + 0{\cdot}5\ m.$

$$x_0 = +\ 1004{\cdot}62 \qquad y_0 = -\ 83{\cdot}51$$
$$\delta x' = -\ 0\ 496{,}5 \qquad \delta y' = -\ 00{\cdot}507{,}5$$
$$x = +\ 1004{\cdot}123{,}0 \qquad y = -\ 84{\cdot}017{,}5$$
$$\delta x' - \delta x = -\ 0{\cdot}500{,}0 \qquad \delta y' - \delta y = -\ 0{\cdot}500{,}2$$

Pkt.	a	b	L	$v = a\delta x' + b\delta y' + L +$ **2. Abltgn.**	$v = \sigma - R_0 \mp 180$
A	+ 76·4	+ 273·9	+ 2′ 55·2″	— 1·7″ — **0·1**″ = — 1·8	— 1·9″
B	+ 17·0	+ 203 9	+ 1 50·4	— 1·5 + **0·0** = — 1·5	— 1·6
C	+ 61 8	+ 157·0	+ 1 51·2	+ 0·7 + **0·0** = + 0·7	+ 0·7
D	— 304 6	+ 92 6	— 1 40·4	+ 3·8 + **0·1** = 3·9	+ 3·9
W	+ 256·2	+ 62·7	+ 2 44·0	+ 5·0 + **0·1** = + 5·1	+ 5·2

IV. $\triangle x_0 = \triangle y_0 = + 1{\cdot}0\ m.$

$$x_0 = +\ 1005{\cdot}12 \qquad y_0 = -\ 83{\cdot}01$$
$$\delta x' = -\ 0{\cdot}997{,}0 \qquad \delta y' = -\ 1{\cdot}008{,}0$$
$$x = +\ 1004{\cdot}123{,}0 \qquad y = -\ 84{\cdot}018{,}0$$
$$\delta x' - \delta x = -\ 1{\cdot}000{,}5 \qquad \delta y' - \delta y = -\ 1{\cdot}000{,}7$$

Pkt.	a	b	L	$v = a\delta x' + b\delta y' + L +$ **2. Abltgn.**	$v = \sigma - R_0 \mp 180$
A	+ 76·0	+ 273·8	+ 5′ 50·1″	— 1·7″ — **0·3**″ = — 2 0″	— 2·0″
B	+ 16·8	+ 203·8	+ 3 40·8	— 1·4 — **0·2** = — 1·6	— 1 7
C	+ 61·7	+ 157·0	+ 3 40·4	+ 0·6 — **0·1** = + 0 5	+ 0·6
D	— 304·2	+ 92·7	— 3 26·2	+ 3·7 + **0·4** = + 4·1	+ 4·1
W	+ 256·2	+ 62·9	+ 5 23·6	+ 4·8 + **0·3** = + 5·2	+ 5·1

V. $\triangle x_0 = \triangle y_0 = +5{\cdot}0\ m.$

$$\begin{array}{rlrl} x_0 = & +\ 1009{\cdot}12 & y_0 = & -\ 79\ 01 \\ \delta x' = & -\quad 5{\cdot}006{,}3 & \delta y' = & -\quad 5{\cdot}020{,}8 \\ \hline x = & +\ 1004{\cdot}113{,}7 & y = & -\ 84{\cdot}030{,}8 \\ \delta x' - \delta x = & -\quad 5{\cdot}009{,}8 & \delta y' - \delta y = & -\quad 5{\cdot}013{,}5 \end{array}$$

Pkt.	a	b	L	$v =$ $a\delta x' + b\delta y' + L +$ **2. Abltgn.**	$v =$ $\sigma - R_0 \mp 180$
A	$+\ 73{\cdot}9$	$+\ 273{\cdot}3$	$+\ 29'\ 4{\cdot}2''$	$+\ 2{\cdot}0'' -$ **8·4**$'' = -\ 6{\cdot}4$	$-\ 6{\cdot}3''$
B	$+\ 15{\cdot}9$	$+\ 203{\cdot}2$	$+\ 18\ 20{\cdot}2$	$+\ 0{\cdot}6\ -$ **5·0** $= -\ 4{\cdot}4$	$-\ 4{\cdot}3$
C	$+\ 60{\cdot}9$	$+\ 157{\cdot}0$	$+\ 18\ 13{\cdot}6$	$+\ 0{\cdot}5\ -$ **2·6** $= -\ 2{\cdot}1$	$-\ 2{\cdot}0$
D	$-\ 301{\cdot}5$	$+\ 93{\cdot}2$	$-\ 17\ 25{\cdot}7$	$-\ 4{\cdot}2\ +$ **10·0** $= +\ 5{\cdot}8$	$+\ 5{\cdot}8$
W	$+\ 256{\cdot}8$	$+\ 64{\cdot}7$	$+\ 26\ 44{\cdot}8$	$-\ 5{\cdot}7\ +$ **7·5** $= +\ 1{\cdot}8$	$+\ 1{\cdot}8$

In diesem Beispiele, das sich wegen der verhältnismäßig kurzen Dreiecksseiten für die Feststellung des zu prüfenden Einflusses besonders eignet, ersieht man nun Folgendes: Für Aenderungen der Näherungskoordinaten bis 0·5 m ist die Bestimmung der ausgeglichenen Koordinaten überhaupt, für eine solche bis 1 m ist sie praktisch genommen unempfindlich. Erst von da an zeigt sich, wie die Durchrechnung mit $\triangle x_0 = \triangle y_0 = 5\ m$ erkennen läßt, ein merklicher Unterschied gegenüber den anfänglich erhaltenen endgültigen Koordinaten, der aber noch immer fast innerhalb der durch die mittleren Fehler m_x bzw. m_y der ausgeglichenen Koordinaten gegebenen Grenze liegt, so daß das Ergebnis der Ausgleichung auch dann nicht als vollkommen unbrauchbar erscheint, wenn die Näherungskoordinaten um 5 m vom wahrscheinlichsten Werte abweichen. Gerade in diesem letzten Falle ist es interessant zu beobachten, wie die Ausgleichungsrechnung auch bei ziemlich abweichenden Näherungswerten das Endergebnis in die Nähe des wahrscheinlichsten Wertes zwingt.

Für Koordinatenzuschläge, die größer als 1 m sind, müßten eben in der Taylor'schen Reihe schon die zweiten Ableitungen herangezogen werden, so daß die durch die Koordinatenzuschläge $\delta x'$ und $\delta y'$ hervorgerufene Richtungsänderung durch die Beziehung gegeben ist:

$$\delta\sigma = a\,\delta x' + b\,\delta y' + \frac{ab}{\varrho''}(\delta y'^2 - \delta x'^2) + \frac{a^2 - b^2}{\varrho''}\,\delta x'\,\delta y',$$

was natürlich der Fehlergleichung $v = \delta\sigma + (\sigma' - R_0 \mp 180)$ ihre lineare Form nimmt. Der Einfluß der zweiten Ableitungen auf v ist von III an ersichtlich gemacht. Die zwei Werte von v, von welchen der eine durch die Fehlergleichung, der zweite aus dem mit den ausgeglichenen Koordinaten gerechneten Richtungswinkel σ erhalten wird, sind neben einander eingetragen.

Die mit Obigem gegebene Untersuchung sowie das darangeschlossene Beispiel dürften namentlich vom didaktischen Standpunkte aus von Interesse sein.